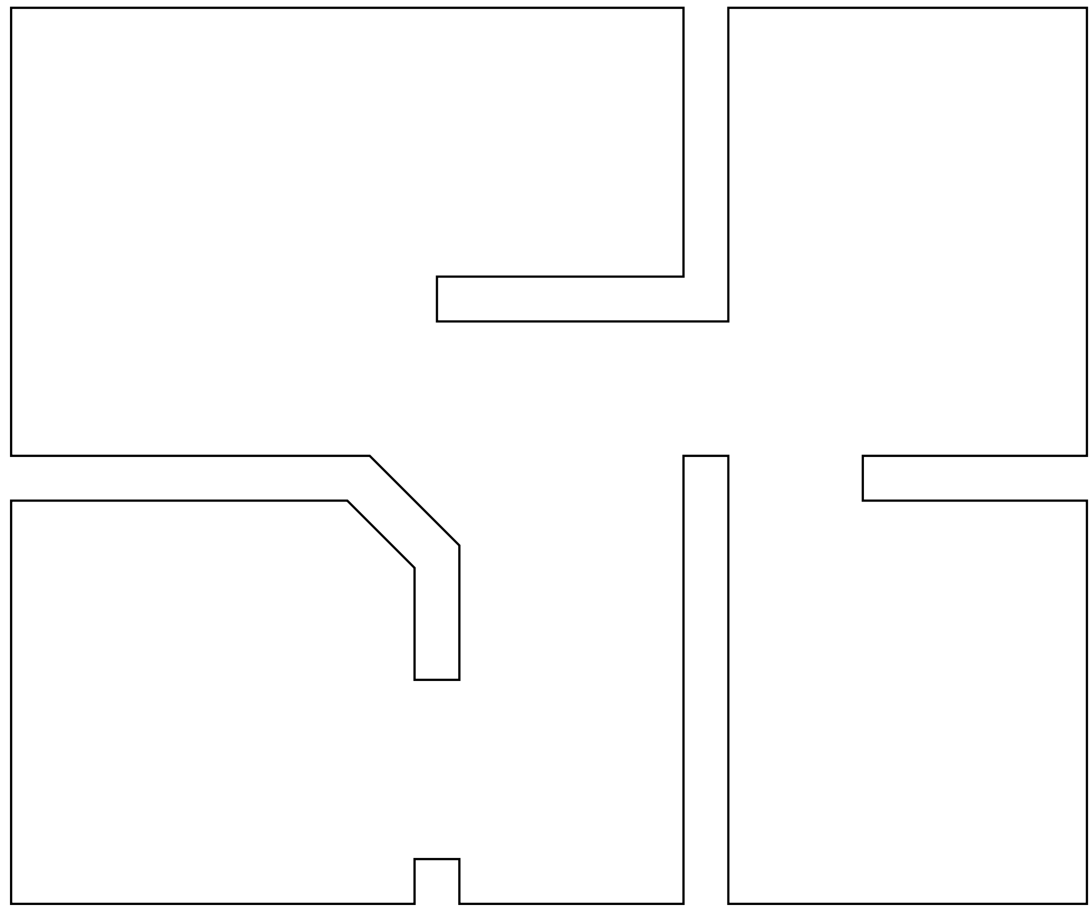
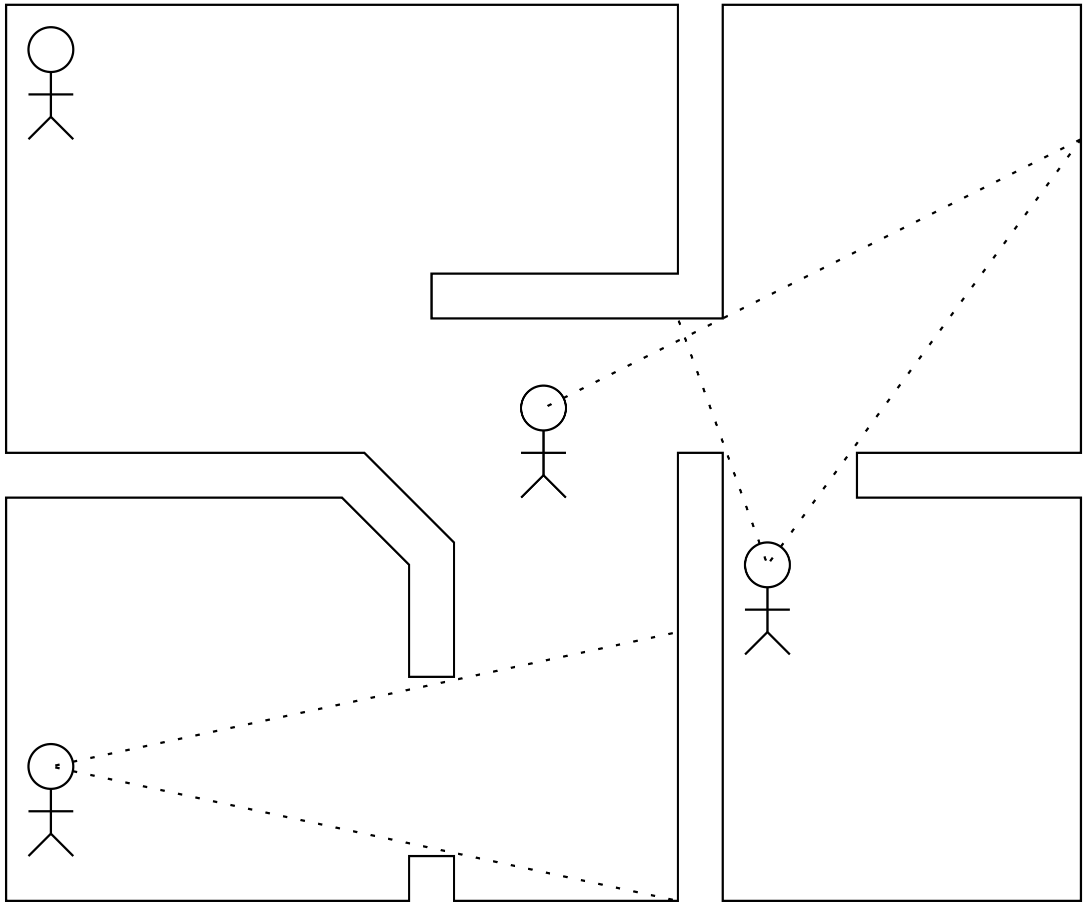
Teorema da Galeria de Arte



Quantos guardas são necessários?

Teorema da Galeria de Arte



Quantos guardas são necessários? Quatro?

Teorema de Chvátal

Teorema da Galeria de Arte: Dado um polígono com n vértices, existe uma maneira de dispormos no máximo $\lfloor n/3 \rfloor$ guardas neste polígono de modo que cada ponto do polígono seja coberto por pelo menos um guarda.

Teorema de Chvátal

Teorema da Galeria de Arte: Dado um polígono com n vértices, existe uma maneira de dispormos no máximo $\lfloor n/3 \rfloor$ guardas neste polígono de modo que cada ponto do polígono seja coberto por pelo menos um guarda.

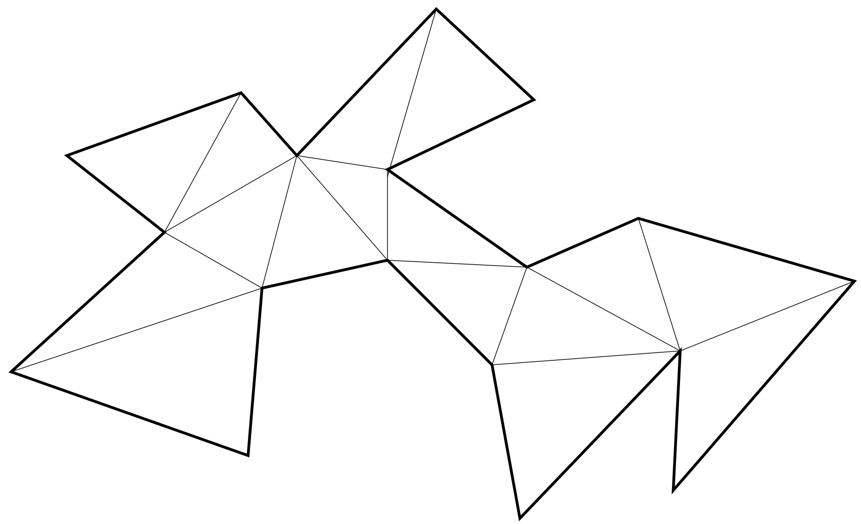
Primeira prova: Chvátal

Prova que veremos: Fisk

Ingredientes:
triangulação de polígonos e coloração de grafos

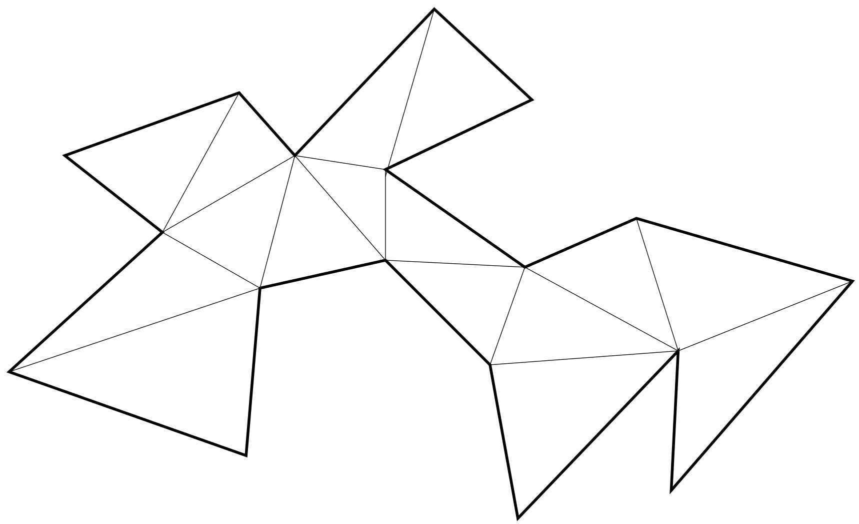
Triangulação de polígonos

Uma triangulação de P é obtida adicionando-se a P um conjunto maximal de diagonais de P que duas a duas não se cruzam.



Triangulação de polígonos

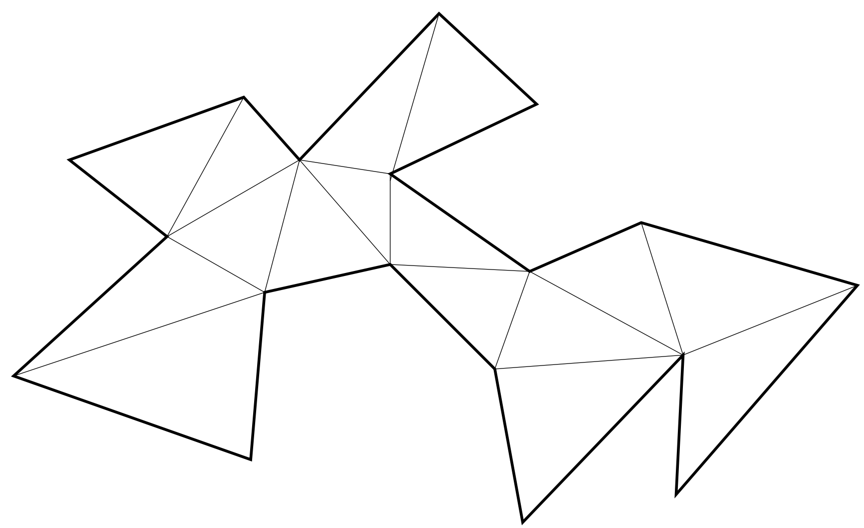
Uma triangulação de P é obtida adicionando-se a P um conjunto maximal de diagonais de P que duas a duas não se cruzam.



Triangulação: conjunto de triângulos que cobrem P e que se intersectam apenas em vértices ou diagonais de P.

Triangulação de polígonos

Uma triangulação de P é obtida adicionando-se a P um conjunto maximal de diagonais de P que duas a duas não se cruzam.



Triangulação: conjunto de triângulos que cobrem P e que se intersectam apenas em vértices ou diagonais de P.

Teorema 1 (Triangulação): Todo polígono pode ser particionado em triângulos através da inclusão de diagonais.

Coloração de grafos

Um grafo $G = (V, E)$ tem uma k-coloração (ou é k-colorível) se existe uma função $c : V \leftarrow \{1, \ldots, k\}$ tal que $c(u) \neq c(v)$ para toda aresta uv em E.

Coloração de grafos

Um grafo $G = (V, E)$ tem uma k-coloração (ou é k-colorível) se existe uma função $c : V \leftarrow \{1, \ldots, k\}$ tal que $c(u) \neq c(v)$ para toda aresta uv em E.

P: polígono

T: triangulação de P

$G_T = (V, E)$ grafo onde V são os vértices de P e $uv \in E$ sse uv está em T

Coloração de grafos

Um grafo $G = (V, E)$ tem uma k-coloração (ou é k-colorível) se existe uma função $c : V \leftarrow \{1, \ldots, k\}$ tal que $c(u) \neq c(v)$ para toda aresta uv em E.

P: polígono $\qquad$ T: triangulação de P

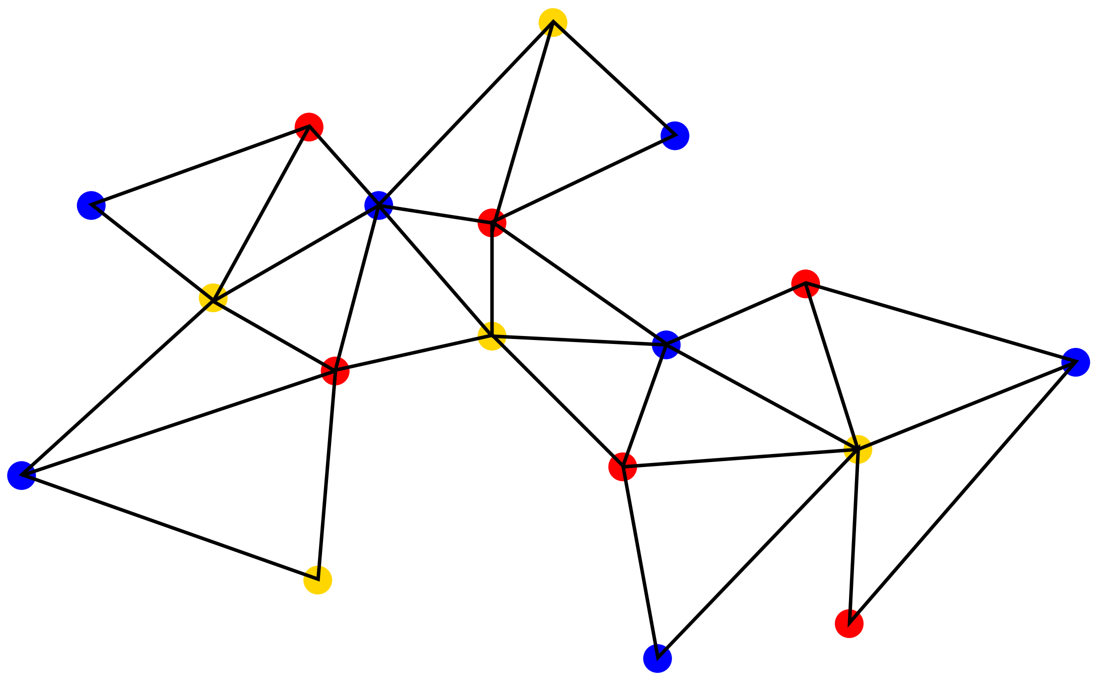
$G_T = (V, E)$ grafo onde V são os vértices de P e
$uv \in E$ sse uv está em T

G_T é um grafo outerplanar
(planar com todos os vértices na face externa)

Teorema 2 (Coloração de grafos de triangulação): Seja G_T o grafo associado à triangulação T de um polígono P. Então G_T tem uma 3-coloração.

Coloração de grafos

Teorema 2 (Coloração de grafos de triangulação): Seja G_T o grafo associado à triangulação T de um polígono P. Então G_T tem uma 3-coloração.



Teorema de Chvátal

Teorema da Galeria de Arte: Dado um polígono com n vértices, existe uma maneira de dispormos no máximo $\lfloor n/3 \rfloor$ guardas neste polígono de modo que cada ponto do polígono seja coberto por pelo menos um guarda.

Teorema de Chvátal

Teorema da Galeria de Arte: Dado um polígono com n vértices, existe uma maneira de dispormos no máximo $\lfloor n/3 \rfloor$ guardas neste polígono de modo que cada ponto do polígono seja coberto por pelo menos um guarda.

Prova: Seja P um polígono com n vértices.
Pelo teorema 1, existe uma triangulação T de P.

Teorema de Chvátal

Teorema da Galeria de Arte: Dado um polígono com n vértices, existe uma maneira de dispormos no máximo $\lfloor n/3 \rfloor$ guardas neste polígono de modo que cada ponto do polígono seja coberto por pelo menos um guarda.

Prova: Seja P um polígono com n vértices.
Pelo teorema 1, existe uma triangulação T de P.

Pelo teorema 2, o grafo G_T tem uma 3-coloração.

Teorema de Chvátal

Teorema da Galeria de Arte: Dado um polígono com n vértices, existe uma maneira de dispormos no máximo $\lfloor n/3 \rfloor$ guardas neste polígono de modo que cada ponto do polígono seja coberto por pelo menos um guarda.

Prova: Seja P um polígono com n vértices.
Pelo teorema 1, existe uma triangulação T de P.

Pelo teorema 2, o grafo G_T tem uma 3-coloração.

Se colocarmos um guarda em cada um dos vértices de G_T de uma das cores, o polígono P está coberto. Isso porque todo triângulo de T tem um vértice de cada uma das três cores, e os triângulos de T cobrem P.

Teorema de Chvátal

Teorema da Galeria de Arte: Dado um polígono com n vértices, existe uma maneira de dispormos no máximo $\lfloor n/3 \rfloor$ guardas neste polígono de modo que cada ponto do polígono seja coberto por pelo menos um guarda.

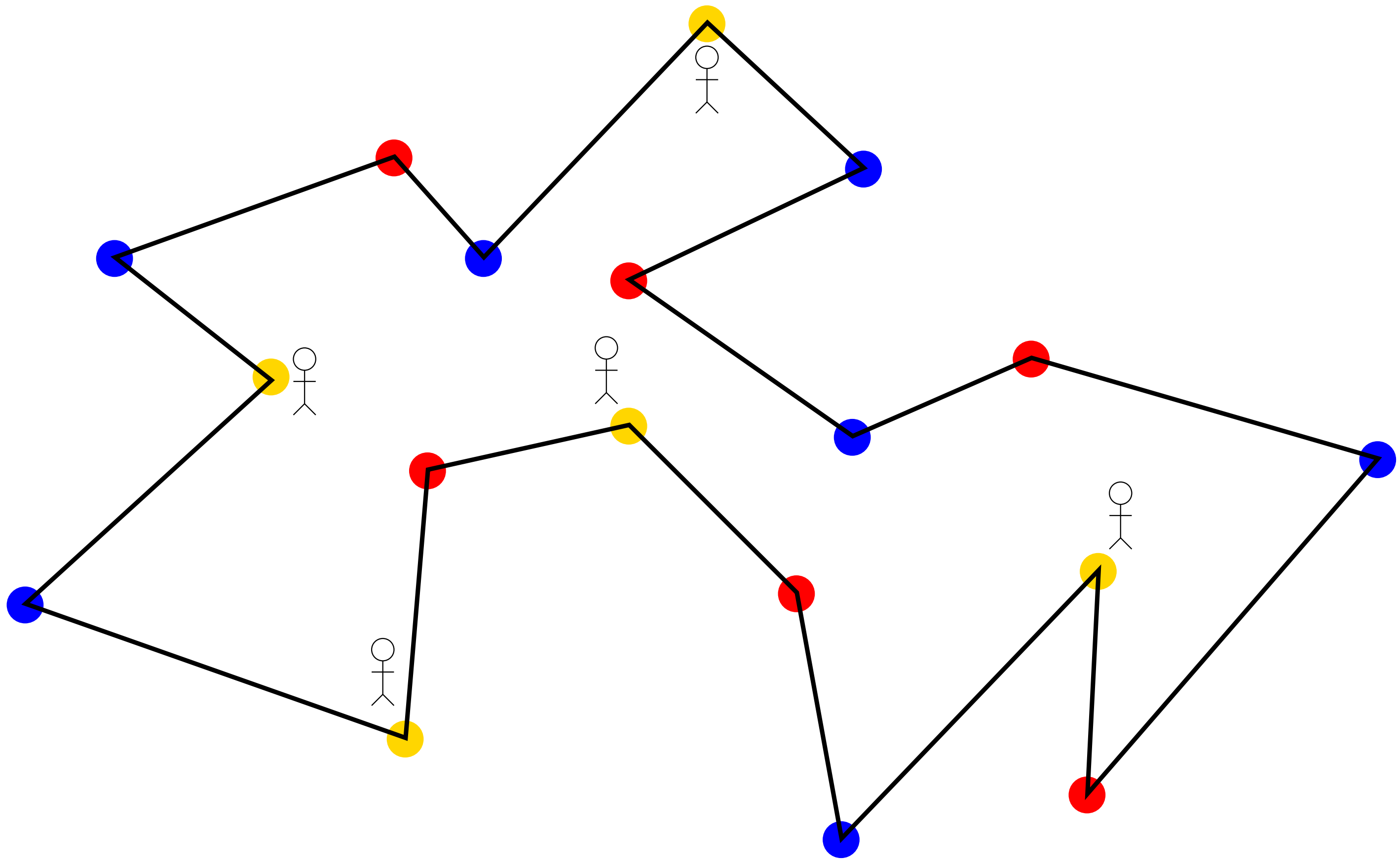
Prova: Seja P um polígono com n vértices.
Pelo teorema 1, existe uma triangulação T de P.

Pelo teorema 2, o grafo G_T tem uma 3-coloração.

Se colocarmos um guarda em cada um dos vértices de G_T de uma das cores, o polígono P está coberto. Isso porque todo triângulo de T tem um vértice de cada uma das três cores, e os triângulos de T cobrem P.

Uma das cores é usada no máximo $\lfloor n/3 \rfloor$ vezes na coloração. ∎

Exemplo



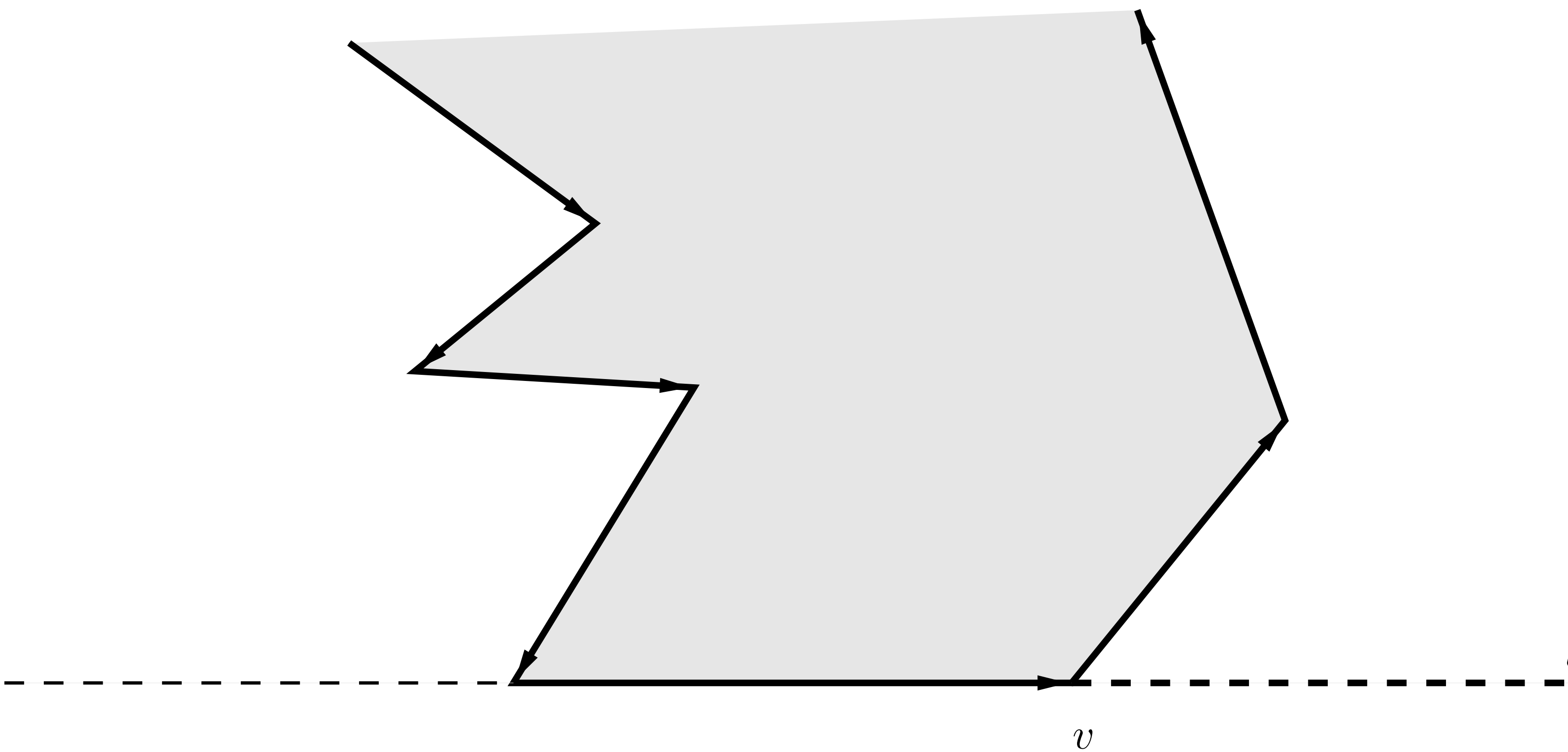
Teoria de triangulação

Lema: Todo polígono tem um vértice estritamente convexo.

Teoria de triangulação

Lema: Todo polígono tem um vértice estritamente convexo.

Prova: (Feita na aula passada.)



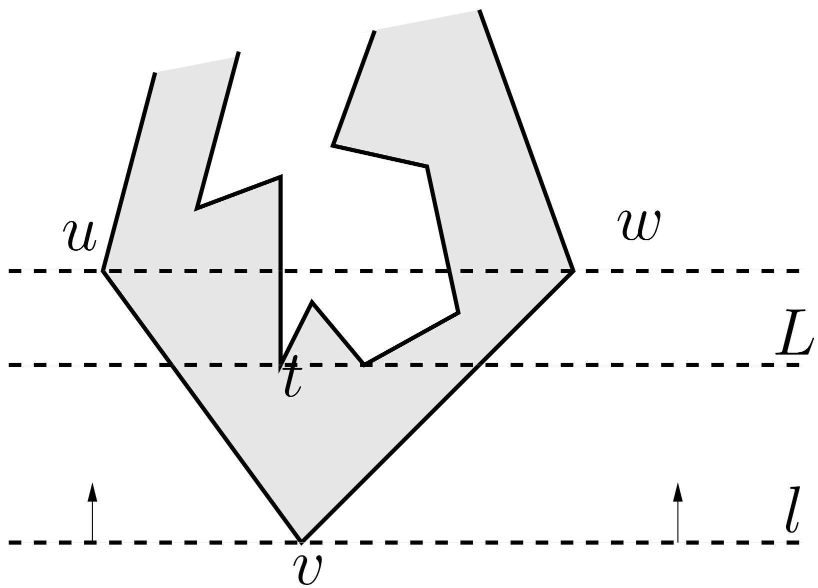
Teoria de triangulação

Lema (Meister): Todo polígono com pelo menos 4 vértices tem uma diagonal.

Teoria de triangulação

Lema (Meister): Todo polígono com pelo menos 4 vértices tem uma diagonal.

Prova: (Feita na aula.)



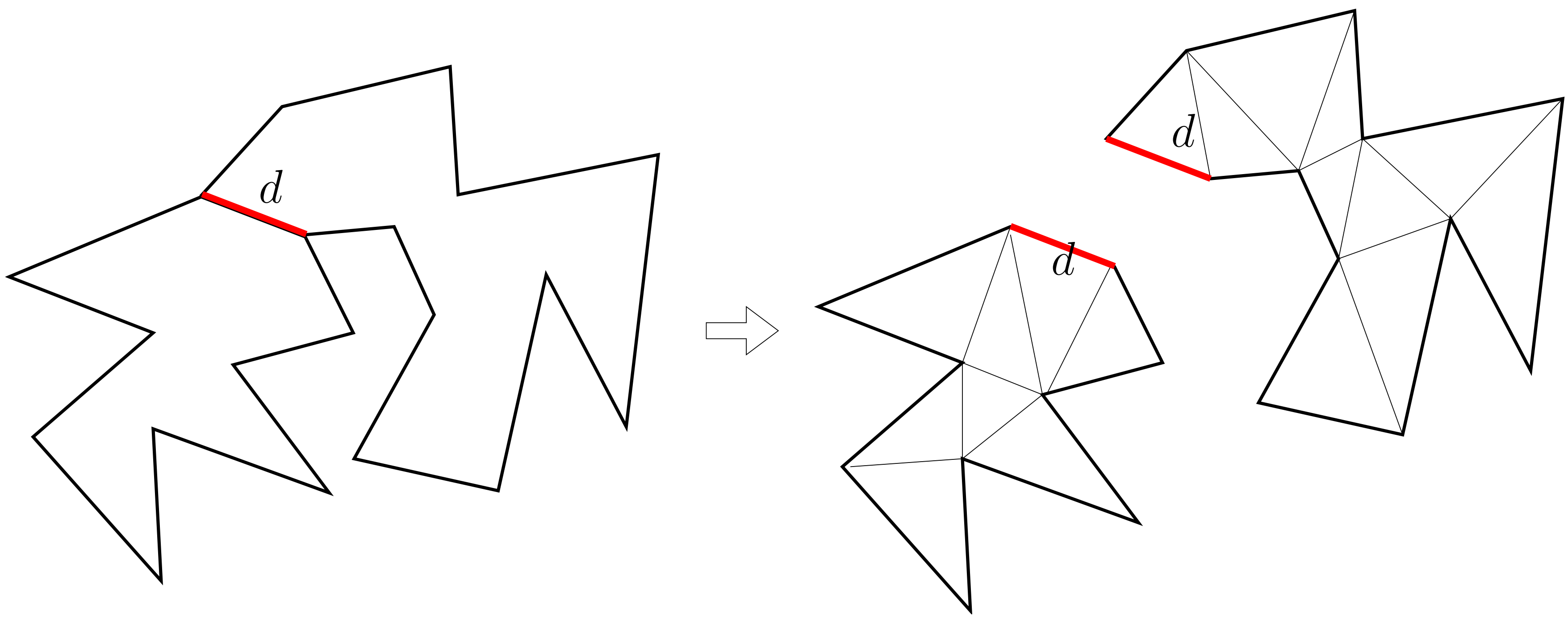
Teoria de triangulação

Teorema 1 (Triangulação): Todo polígono com n vértices pode ser particionado em $n - 2$ triângulos através da inclusão de $n - 3$ diagonais.

Teoria de triangulação

Teorema 1 (Triangulação): Todo polígono com n vértices pode ser particionado em $n-2$ triângulos através da inclusão de $n-3$ diagonais.

Prova: (Feita na aula.)



Teoria de triangulação

Teorema 1 (Triangulação): Todo polígono com n vértices pode ser particionado em $n-2$ triângulos através da inclusão de $n-3$ diagonais.

Teoria de triangulação

Teorema 1 (Triangulação): Todo polígono com n vértices pode ser particionado em $n-2$ triângulos através da inclusão de $n-3$ diagonais.

Lema extra (soma dos ângulos): A soma dos ângulos internos de um polígono de n vértices é $(n-2)\pi$.

Teoria de triangulação

Teorema 1 (Triangulação): Todo polígono com n vértices pode ser particionado em $n-2$ triângulos através da inclusão de $n-3$ diagonais.

Lema extra (soma dos ângulos): A soma dos ângulos internos de um polígono de n vértices é $(n-2)\pi$.

Prova: Conseqüência direta do Teorema da Triangulação.

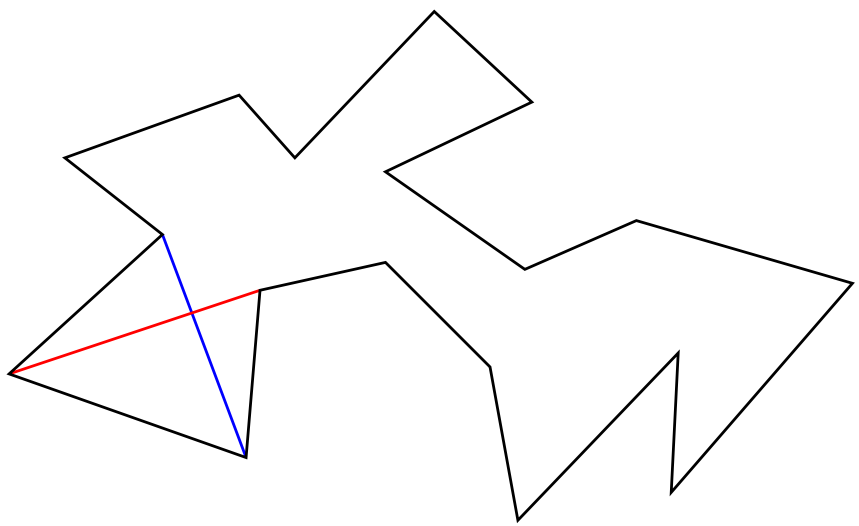
Orelhas de polígonos

Três vértices consecutivos u, v, w de um polígono P formam uma orelha de P se uw é uma diagonal de P.

Orelhas de polígonos

Três vértices consecutivos u, v, w de um polígono P formam uma orelha de P se uw é uma diagonal de P.

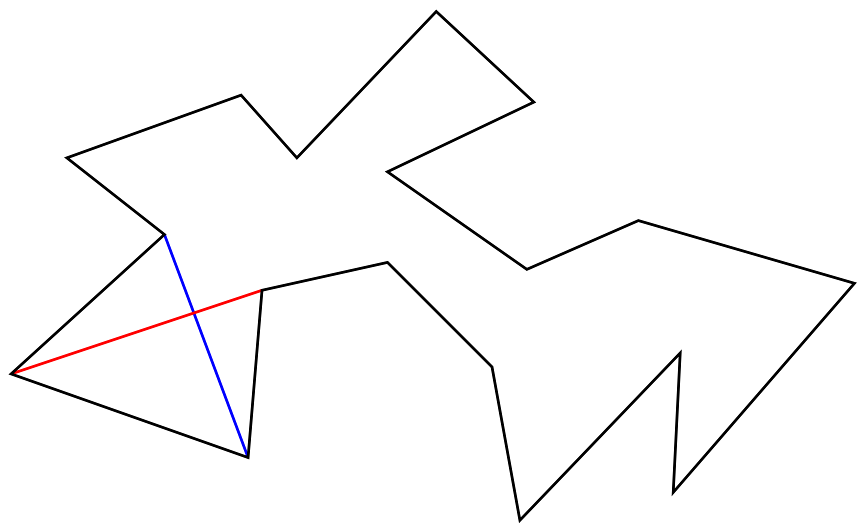
Duas orelhas não se sobrepõem se seus interiores são disjuntos.



Orelhas de polígonos

Três vértices consecutivos u, v, w de um polígono P formam uma orelha de P se uw é uma diagonal de P.

Duas orelhas não se sobrepõem se seus interiores são disjuntos.



Teorema (Meister's Two Ears Theorem): Todo polígono com pelo menos 4 vértices possui pelo menos duas orelhas.

Orelhas de polígonos

Teorema (Meister's Two Ears Theorem): Todo polígono com pelo menos 4 vértices possui pelo menos duas orelhas.

Orelhas de polígonos

Teorema (Meister's Two Ears Theorem): Todo polígono com pelo menos 4 vértices possui pelo menos duas orelhas.

Segue do teorema abaixo.

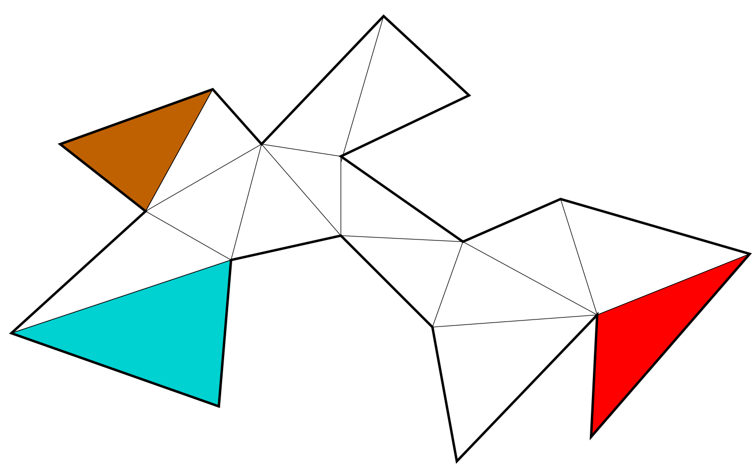
Orelhas de polígonos

Teorema (Meister's Two Ears Theorem): Todo polígono com pelo menos 4 vértices possui pelo menos duas orelhas.

Segue do teorema abaixo.

Teorema 3: Seja P um polígono com pelo menos 4 vértices e T uma triangulação de P. Então pelo menos dois triangulos de T formam orelhas de P.

Prova: (Feita na aula.)



Coloração do grafo de triangulação

Teorema 2 (Coloração de grafos de triangulação): Seja G_T o grafo associado à triangulação T de um polígono P. Então G_T tem uma 3-coloração.

Coloração do grafo de triangulação

Teorema 2 (Coloração de grafos de triangulação): Seja G_T o grafo associado à triangulação T de um polígono P. Então G_T tem uma 3-coloração.

Prova: (Feita na aula.)

Algoritmos para triangulação

Como encontrar uma diagonal?

Algoritmos para triangulação

Como encontrar uma diagonal?

Intersecção de segmentos: como decidir se dois segmentos se intersectam ou não?

Algoritmos para triangulação

Como encontrar uma diagonal?

Intersecção de segmentos: como decidir se dois segmentos se intersectam ou não?

Algoritmo super ingênuo: $O(n^4)$

Algoritmo um pouco menos ingênuo: $O(n^2)$, usando orelhas!

Algoritmos para triangulação

Como encontrar uma diagonal?

Intersecção de segmentos: como decidir se dois segmentos se intersectam ou não?

Algoritmo super ingênuo: $O(n^4)$

Algoritmo um pouco menos ingênuo: $O(n^2)$, usando orelhas!

Algoritmos mais rápidos:

- $O(n \lg n)$, veremos em breve...
- $O(n)$, complicado... não estudaremos...
- $O(n \lg^* n)$, mais simples e rápido na prática

Representação de ponto

Ponto: vetor de dimensão apropriada

Representação de ponto

Ponto: vetor de dimensão apropriada

Ficar nos inteiros enquanto for possível

Representação de ponto

Ponto: vetor de dimensão apropriada

Ficar nos inteiros enquanto for possível

```
#define X 0
#define Y 1
#define DIM 2 /* dimensão do espaço */

/* tipo ponto inteiro */
typedef int tPointi[DIM];

/* tipo ponto real */
typedef double tPointd[DIM];
```

Representação de polígono

Polígono: vetor ou lista ligada de pontos

Representação de polígono

Polígono: vetor ou lista ligada de pontos

Qual das duas opções escolher? Depende...

Representação de polígono

Polígono: vetor ou lista ligada de pontos

Qual das duas opções escolher? Depende...

Com vetor...

```
/* número máximo de pontos em um polígono */
#define PMAX 1000

/* tipo polígono de pontos inteiros */
typedef tPointi tPolygoni[PMAX];

/* tipo polígono de pontos reais */
typedef tPointd tPolygond[PMAX];
```

Cálculos de área

Triângulo

Cálculos de área

Triângulo

```
int Area2 (tPointi a, b, c) {
   return a[X]*b[Y]-a[Y]*b[X]+a[Y]*c[X]
         -a[X]*c[Y]+b[X]*c[Y]-c[X]*b[Y];
}
```

Cálculos de área

Triângulo

```
int Area2 (tPointi a, b, c) {
   return a[X]*b[Y]-a[Y]*b[X]+a[Y]*c[X]
         -a[X]*c[Y]+b[X]*c[Y]-c[X]*b[Y];
}
```

Com menos multiplicações e em pseudocódigo:

Area2(a, b, c)

1 **devolva** $(a[X] - c[X]) * (b[Y] - c[Y]) -$
$(a[Y] - c[Y]) * (b[X] - c[X])$