

# GEOMETRIA COMPUTACIONAL

## TEOREMA DA GALERIA DE ARTE

### 1. DEFINIÇÕES E CONVENÇÕES

Uma *curva poligonal* é uma seqüência finita  $(v_0, e_0, v_1, \dots, e_{n-2}, v_{n-1})$  onde  $v_0, \dots, v_{n-1}$  são pontos em  $\mathbb{R}^2$  e  $e_i$  é um segmento de reta com extremidades  $v_i$  e  $v_{i+1}$  ( $i = 0, \dots, n-2$ ). Os pontos  $v_0, \dots, v_{n-1}$  também são chamados de *vértices* e os segmentos  $e_0, \dots, e_{n-2}$  de *arestas*. (Notação: os índices serão considerados ciclicamente, assim, por exemplo,  $v_n = v_0, e_{n-1} = e_0, \dots$ ) Uma curva poligonal é *fechada* se o último ponto da seqüência é igual ao primeiro, ou seja,  $v_n = v_0$ . Uma curva poligonal é *simples* se ela não se autointersecta. Mais precisamente, isto significa que o segmento  $e_i$  só intersecta (possivelmente) o segmento  $e_{i+1}$  no ponto  $v_{i+1}$  ( $i = 0, \dots, n-2$ ).

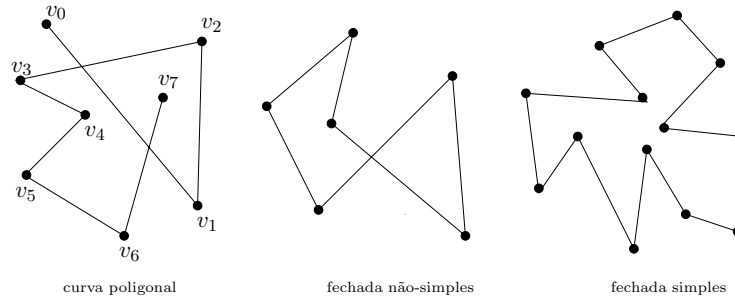


FIGURA 1. Curvas poligonais.

O famoso Teorema de Jordan diz que toda curva plana fechada simples divide o plano em duas regiões: o *interior* e o *exterior* da curva. Definimos um *polígono* como sendo a região fechada do plano (no sentido topológico) limitada por uma curva poligonal fechada simples. O termo *polígono simples* também é freqüentemente usado com este mesmo sentido. Convencionaremos que os vértices de um polígono serão sempre listados na ordem em que eles aparecem ao percorrermos a fronteira do polígono no sentido anti-horário. A fronteira de um polígono  $P$  será denotada por  $\partial P$ . Da nossa definição temos que  $\partial P \subseteq P$ .

Diremos que dois pontos  $p$  e  $q$  de um polígono  $P$  *vêm* ou *enxergam* um ao outro se o segmento que liga  $p$  e  $q$ , denotado por  $pq$ , está inteiramente contido no polígono  $P$ .

A planta de uma sala, com  $n$  paredes, de uma galeria de arte pode ser vista como sendo um polígono formado por  $n$  vértices (ou arestas). Considere o problema de determinar-se onde devemos dispor guardas na galeria de tal modo que cada ponto da sala possa ser visto por pelo menos um guarda. Pensaremos em um guarda como sendo um ponto e diremos que um conjunto de guardas *guardam* ou *cobrem* um polígono se cada ponto do polígono pode ser visto por pelo menos um guarda. Victor Klee propôs o seguinte problema.

**Problema 1.** *Dado  $n$ , determinar, como uma função de  $n$ , o número mínimo de guardas suficientes para cobrir um polígono arbitrário com  $n$  vértices.*

Se denotarmos por  $g(P)$  o menor número de guardas necessários para cobrirmos um polígono  $P$  e por  $G(n)$  o menor número de guardas necessários para cobrirmos um polígono com  $n$  vértices, então temos que

$$G(n) = \max\{g(P) \mid P \text{ é um polígono com } n \text{ vértices}\}.$$

Não é difícil ver que  $G(n) \leq n$ . Podemos colocar um guarda em cada vértice do polígono. Apesar deste fato ser trivial, é interessante notar que a generalização para o espaço tridimensional é falsa (!).

EXERCÍCIO. Encontre um poliedro em  $\mathbb{R}^3$  tal que mesmo colocando um guarda em cada vértice teremos pontos no interior do poliedro que não são visto por nenhum dos guardas. (Este poliedro é certamente não-convexo.)

Salas que têm o formato de um polígono convexo, com qualquer número de vértices, podem ser cobertas por apenas um guarda, colocado em qualquer ponto da sala. Todo polígono com três vértices é convexo, logo  $G(3) = 1$ . Existem polígonos com quatro vértices que não são convexos. Diremos que um vértice de um polígono é *reflexo* ou *concavo* se o seu ângulo interior é maior do que  $\pi$ . Já se o ângulo interior do vértice de um polígono for no máximo  $\pi$ , diremos que o vértice é *convexo*.

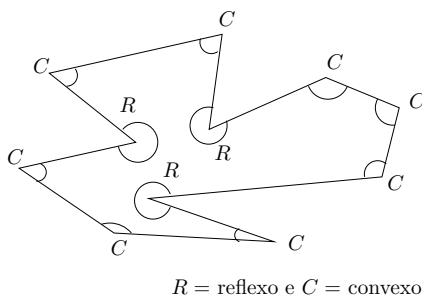


FIGURA 2. Um polígono e seus vértices reflexos e convexas.

Um polígono com quatro vértices (um quadrilátero) pode ter no máximo um ângulo reflexo, mas mesmo assim é possível cobrirmos o polígono com apenas um guarda, ou seja,  $G(4) = 1$ . Um polígono com cinco vértices pode ter 0, 1 ou 2 vértices reflexos. Fazendo alguns experimentos podemos ver que polígonos com 5 vértices podem ser cobertos por apenas um guarda, ou seja,  $G(5) = 1$ . Existem polígonos com 6 vértices que necessitam de 2 guardas para serem cobertos.

Uma questão interessante em geometria combinatória é saber como o número de guardas necessários para cobrir um polígono cresce como uma função de  $n$ . O polígono ‘pente’ da Figura 3 mostra que  $G(n) \geq \lfloor n/3 \rfloor$ .

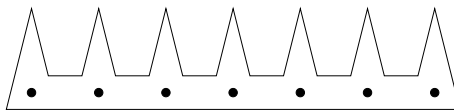


FIGURA 3. Exemplo de polígonos onde  $\lfloor n/3 \rfloor$  guardas são necessários.

Este número é sempre suficiente, ou seja, um polígono com  $n$  vértices pode ser sempre guardado por no máximo  $\lfloor n/3 \rfloor$  guardas. É o que mostra um resultado muito bacana em geometria combinatória, o chamado *Chvátal’s Art Gallery Theorem*.

**Teorema 2** (Teorema da Galeria de Arte). *Dado um polígono com  $n$  vértices, existe uma maneira de dispormos no máximo  $\lfloor n/3 \rfloor$  guardas neste polígono de modo que cada ponto do polígono seja coberto por pelo menos um guarda.*

A primeira demonstração deste teorema é, naturalmente, devida a Chvátal. Fisk, três anos mais tarde, apresentou uma prova muito simples deste teorema. Esta prova baseia-se em dois conceitos: triangulação de polígonos e coloração de vértices de um grafo.

**1.1. Diagonais e triangulação.** Dois vértices  $u$  e  $v$  de um polígono  $P$  se vêem ou enxergam *claramente* se o segmento  $uv$  com extremos  $u$  e  $v$  está inteiramente contido em  $P$  e se, além disso, a intersecção de  $uv$  com a fronteira  $\partial P$  de  $P$  é igual a  $\{u, v\}$ . Ou seja  $u$  e  $v$  se vêem claramente se

- (i)  $uv \subset P$ ; e
- (ii)  $uv \cap \partial P = \{u, v\}$ .

Uma *diagonal* de um polígono  $P$  é um segmento de reta entre dois vértices de  $P$  que se vêem claramente. Duas diagonais distintas  $uv$  e  $wx$  de  $P$  se cruzam se  $uv \cap wx \not\subset \{u, v, w, x\}$ . Se colocarmos em um polígono  $P$  o maior número possível de diagonais que duas-a-duas não se cruzam obteremos uma *triangulação* do polígono  $P$ . Uma triangulação de  $P$  pode ser vista como a união das arestas de  $P$  e um conjunto maximal de diagonais de  $P$  que duas-a-duas não se intersectam, a não ser, eventualmente, nos seus extremos. Uma outra maneira de pensarmos em uma triangulação de um polígono  $P$  (e as vezes será mais conveniente pensarmos desta maneira) é como um conjunto de triângulos que cobrem o polígono  $P$  e que se intersectam apenas em vértices e diagonais de  $P$ . A Figura 4 mostra a triangulação de um polígono.

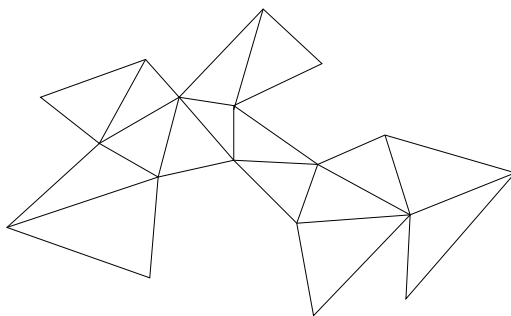


FIGURA 4. Triangulação de um polígono.

**Teorema 3** (Triangulação). *Todo polígono pode ser particionado em triângulos através da inclusão de diagonais (zero ou mais).*

Demonstraremos o Teorema 3 na próxima seção. A demonstração é baseada no fato de que todo polígono com pelo menos 4 vértices possui uma diagonal. Este fato pode parecer trivial, entretanto, teremos um pouco de trabalho em verificá-lo.

**1.2. Coloração de vértices de um grafo.** Um grafo  $G = (V, E)$  é  $k$ -colorível se for possível atribuímos cores  $c_1, \dots, c_k$  aos (ou colorirmos os) vértices de  $G$  de tal forma que se  $u$  e  $v$  são vértices adjacentes em  $G$  então a cor atribuída a  $u$  é diferente da cor atribuída a  $v$ .

Associaremos um grafo (planar)  $G_T = (V, E)$  à triangulação  $T$  de um polígono  $P$  da seguinte maneira. O conjunto dos vértices  $V$  de  $G_T$  será o conjunto dos vértices de  $P$  e existirá uma aresta em  $E$  ligando vértices  $u$  e  $v$  de  $G_T$  se o segmento  $uv$  faz parte da triangulação  $T$ , veja a Figura 5.

É um fato conhecido que todo grafo planar pode ser 4-colorido (o famoso *Teorema das 4 Cores*). Com grafos associados à triangulações, que são planares, podemos fazer melhor que isto.

**Teorema 4.** *Seja  $G_T$  um grafo associado a uma triangulação de um polígono. Então  $G_T$  é 3-colorível.*

O teorema anterior também será demonstrado na próxima seção.

**1.3. Demonstração do Teorema da Galeria de Arte.** Seja  $P$  um polígono com  $n$  vértices. Mostraremos que  $P$  pode ser coberto por  $\lceil n/3 \rceil$  guardas. Pelo Teorema 3 sabemos que todo polígono é triangularizável, em particular seja  $T$  uma triangulação de  $P$ . Do Teorema 4 sabemos que o grafo  $G_T$  associado a  $T$  é 3-colorível. Considere uma tal 3-coloração e suponha que as cores usadas foram, digamos, azul, verde e amarela. Observemos que cada triângulo de  $T$  tem pelo menos um vértice de

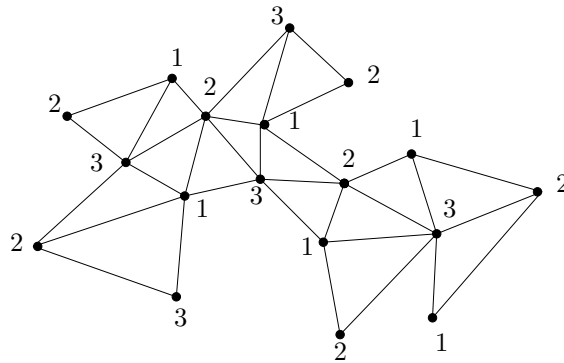


FIGURA 5. Grafo associado a triangulação da Figura 4 e uma 3-coloração deste grafo. As cores são 1, 2 e 3.

cada uma dessas cores. Como a coleção de triângulos de  $T$  cobrem  $P$  e cada triângulo tem um vértice de cor amarela (ou qualquer outra cor) então guardas colocados nos vértices amarelos cobrem  $P$ . Analogamente, guardas colocados em vértices de cor azul cobrem  $P$  e guardas colocado em vértices de cor verde cobrem  $P$ . Pelo menos uma dessas 3 cores é usada em não mais do que  $n/3$  vértices. Como o número de vértices com uma determinada cor é um número inteiro podemos trocar  $n/3$  por  $\lfloor n/3 \rfloor$ . Logo,  $\lfloor n/3 \rfloor$  guardas são suficiente e eventualmente necessários para cobrirmos um polígono com  $n$  vértices. ■

## 2. TEORIA DE TRIANGULAÇÕES

Neste seção provaremos alguns resultados relacionados com triangulação de polígonos. Também mostraremos o Teorema 3 e 4, que deixamos de provar na seção anterior. Para estudarmos os aspectos algorítmicos de triangulação e partição de polígono ainda teremos que esperar um pouco.

**Lema 5.** *Todo polígono tem um vértice estritamente convexo.*

**Demonstração.** Seja  $P$  um polígono. Oriente as arestas de  $P$  no sentido anti-horário. Um transeunte andando sobre  $\partial P$ , e seguindo a orientação, teria o interior do polígono à sua esquerda. Assim, em um vértice estritamente convexo o nosso transeunte virará à esquerda e em um vértice estritamente reflexo ele virará à direita.

Seja  $v$  o vértice de  $P$  com

- (i)  $y$ -coordenada mínima; e
- (ii)  $x$ -coordenada máxima, respeitando (i).

Seja  $l$  a reta horizontal passando sobre  $v$ . A aresta seguindo  $v$  deve estar acima de  $l$  (veja Figura 6). Logo, nosso transeunte deve vira à esquerda em  $v$ . Portanto,  $v$  é um vértice estritamente convexo. ■

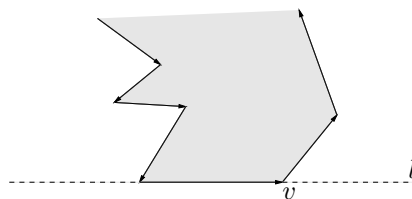


FIGURA 6. Ilustração da prova do Lema 5.

**Lema 6** (Meister [5]). *Todo polígono com pelo menos 4 vértices possui uma diagonal.*

**Demonstração.** Seja  $P$  um polígono com  $n \geq 4$  vértices e seja  $v$  um vértice estritamente convexo de  $P$ . Sejam  $u$  e  $w$  vértices adjacentes a  $v$ . Se  $uw$  é uma diagonal do polígono então não há o que demonstrar. Logo, suponhamos que  $uw$  não é uma diagonal de  $P$ , ou seja

- ou  $uw \not\subset P$ ;
- ou  $uw \subset P$  e  $uw \cap \partial P \not\subset \{u, w\}$ .

Como  $n \geq 4$  então o triângulo de vértices  $v, u, w$ , denotado por  $\Delta(v, u, w)$ , contém pelo menos um vértice de  $P$  distinto de  $v, u$  e  $w$ . Seja  $t$  um vértice de  $P$  em  $\Delta(v, u, w)$  mais-próximo de  $v$ ; onde a distância é medida ortogonalmente à reta passando pelo segmento  $uw$ . Logo,  $t$  é o primeiro vértice de  $P$  atingido quando movemos a reta  $l$  paralela a  $vw$  de  $v$  na direção de  $uw$  (veja Figura 7).

Afirmamos que  $vt$  é uma diagonal de  $P$ . De fato, seja  $L$  a reta passando por  $t$  e paralela ao segmento  $uw$ . Notemos que a intersecção do semiplano determinado por  $L$  contendo o vértice  $v$  com o triângulo  $\Delta(u, v, w)$  é um triângulo que não tem *nenhum* ponto de  $\partial P$  no seu interior. Logo, o vértice  $v$  vê  $t$  claramente. Portanto,  $vt$  é uma diagonal de  $P$ . ■

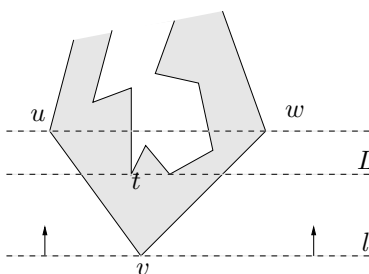


FIGURA 7. Ilustração da prova do Lema 6.

Estamos prontos para provar o Teorema 3. Abaixo repetimos o seu enunciado.

**Teorema 7** (Triangulação). *Todo polígono pode ser particionado triângulos através da inclusão de diagonais (zero ou mais).*

**Demonstração.** Seja  $P$  um polígono. A prova é por indução no número  $n$  de vértices do polígono  $P$ . Se  $n = 3$  o polígono é um triângulo e o teorema vale, já que não precisamos adicionar nenhuma diagonal.

Suponha que  $n \geq 4$ . Pelo Lema 6 sabemos que  $P$  possui uma diagonal  $d$ . O segmento  $d$  particiona  $P$  em dois polígonos com menos do que  $n$  vértices; cada um tendo  $d$  como aresta. Aplicando a hipótese de indução temos que cada um desses (sub)polígono pode ser triangularizado. Logo, combinando as triangulações de cada um dos polígonos e  $d$  obtemos uma triangulação de  $P$ . (A situação está ilustrada na Figura 8.) ■

**Lema 8** (Número de diagonais). *Toda triangulação de um polígono de  $n$  vértices consiste de  $n - 3$  diagonais e  $n - 2$  triângulos.*

**Demonstração.** Seja  $P$  um polígono. Provaremos o lema por indução no número  $n$  de vértices de  $P$ . Ambas as afirmações são verdadeiras para  $n = 3$ , ou seja, para um triângulo.

Suponhamos que  $n \geq 4$ . Particionemos  $P$  em dois polígono  $P_1$  e  $P_2$  através de uma diagonal arbitrária  $d$ . Suponhamos que  $P_1$  tenha  $n_1$  vértices e  $P_2$  tenha  $n_2$  vértices. Assim, temos que  $n_1 + n_2 = n + 2$ .

Aplicando a hipótese de indução ao polígono  $P_1$  e ao polígono  $P_2$ , temos que toda triangulação de  $P_1$  possui  $n_1 - 3$  diagonais e toda triangulação de  $P_2$  possui  $n_2 - 3$  diagonais. Toda triangulação de  $P$  que possui  $d$  induz triangulações de  $P_1$  e  $P_2$ . Assim, toda triangulação de  $P$  que possui  $d$  tem

$$(n_1 - 3) + (n_2 - 3) + 1 = n_1 + n_2 - 5 = n + 2 - 5 = n - 3$$

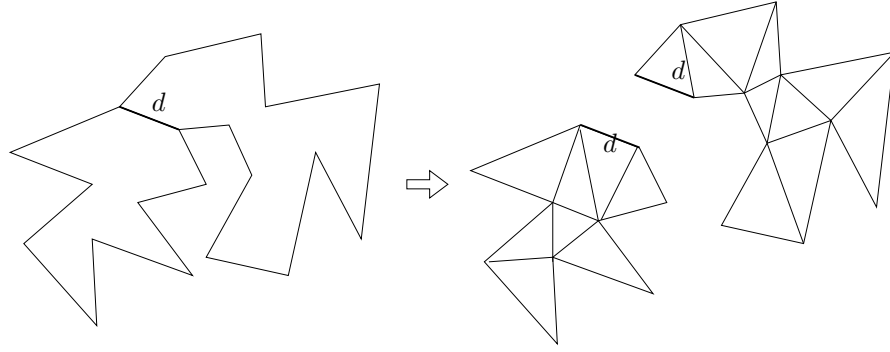


FIGURA 8. Ilustração da prova do Teorema 6.

diagonais. Como a escolha de  $d$  foi arbitrária concluímos que toda triangulação de  $P$  possui  $n - 3$  diagonais. O número de triângulos é claramente um a mais que o número de diagonais. ■

**Lema 9** (Soma dos ângulos). *A soma dos ângulos internos de um polígono de  $n$  vértices é  $(n - 2)\pi$ .*

**Demonstração.** Pelo Lema 8 existem  $n - 2$  triângulos em uma triangulação de um polígono com  $n$  vértices e cada triângulo contribui com  $\pi$  para a soma dos ângulos internos. ■

Diremos que 3 vértices consecutivos  $u, v, w$  de um polígono formam uma *orelha* se  $uw$  é uma diagonal. Duas orelhas não se sobrepõem se os seus interiores são disjuntos.

**Teorema 10** (Meister's Two Ears Theorem). *Todo polígono com pelo menos 4 vértices possui pelo menos duas orelhas.*

O teorema acima segue imediatamente do seguinte teorema.

**Teorema 11.** *Seja  $P$  um polígono com pelo menos 4 vértices e  $T$  uma triangulação de  $P$ . Então pelo menos dois triângulos de  $T$  formam orelhas de  $P$ .*

**Demonstração.** A demonstração é por indução no número de vértices  $n$  de  $P$ . Se  $n = 4$  então  $P$  é um quadrilátero e os dois triângulos de  $T$  são orelhas de  $P$ . Suponhamos que  $n \geq 5$ . Particionemos  $P$  em dois polígono  $P_1$  e  $P_2$  através de uma diagonal arbitrária  $d$  de  $T$ . Sejam  $T_1$  e  $T_2$  as triangulações de  $P_1$  e  $P_2$ , respectivamente, obtidas através da restrição da triangulação  $T$  a  $P_1$  e  $P_2$ . Pela hipótese de indução Cada um dos (sub)polígonos  $P_1$  e  $P_2$  é um triângulo ou, pela hipótese de indução, possuem duas orelhas formadas por triângulos em  $T_1$  e  $T_2$ , respectivamente. Pelo menos um desses (possivelmente dois) triângulos de  $T_1$  é uma orelha de  $P$ . Analogamente, pelo menos um desses (possivelmente dois) dos triângulos de  $T_2$  é uma orelha de  $P$ . Como estes triângulos são disjuntos, a prova do teorema está completa. ■

Estamos agora preparados para demonstrar o Teorema 4 da seção anterior.

**Teorema 12.** *Seja  $G_T$  um grafo associado a uma triangulação  $T$  de um polígono  $P$ . Então  $G_T$  é 3-colorível.*

**Demonstração.** A prova é por indução no número de vértices  $n$  de  $G_T$ . Claramente um triângulo é 3-colorível. Logo, podemos supor que  $n \geq 4$ . Pelo Teorema 11 sabemos que  $P$  tem uma (na realidade pelo menos duas) orelha que é formada por um triângulo  $\Delta(u, v, w)$  de  $T$ . Seja  $P'$  o polígono obtido a partir de  $P$  através da remoção desta orelha (isto é, troque a subsequência  $\dots, u, v, w, \dots$  na fronteira  $\partial P$  de  $P$ , pela subsequência  $\dots, u, w, \dots$ ) e seja  $T'$  a triangulação de  $P'$  obtida a partir de  $T$ , simplesmente removendo-se  $\Delta(u, v, w)$ .  $P'$  tem  $n - 1$  vértices e pela hipótese de indução o grafo  $G_{T'}$  associado a triangulação  $T'$  é 3-colorível. O grafo  $G_T$  pode ser obtido a partir de  $G_{T'}$  simplesmente adicionando o vértice  $v$  e as arestas  $uv$  e  $vw$ . Logo, existe (um única!) maneira de estendermos a 3-coloração de  $G_{T'}$  a uma 3-coloração de  $G_T$  ('pinte'  $v$  com a cor que não pintamos  $u$  nem  $w$ ). ■

## 3. EXERCÍCIOS

1. (Exercício 1.1.4.6 de [7] — guardando a parede) Construa um polígono  $P$  e disponha guardas em  $P$  de tal forma que os guardas vêem todos os pontos em  $\partial P$ , mas existem pontos em  $P$  que não são vistos/cobertos pelos guardas.
2. (Exercício 1.1.4.6 de [7] — guardas em poliedros) Descreva um poliedro em  $\mathbb{R}^3$  que mesmo colocando-se guardas em todos os vértices existem pontos do poliedro que não são cobertos pelos guardas.
3. (‘Tetraedrização’ de poliedros) Descreva um politopo (um politopo é um poliedro limitado) de genus zero (ou seja o politopo não tem ‘buracos’) em  $\mathbb{R}^3$  que não pode ser particionado em tetraedros tendo vértices selecionados dentre os vértices do politopo.

**Sugestão.** Veja o Capítulo 9 O’Rourke [6].

**Observação.** Ruppert e Seidel [8] mostraram que o seguinte problema é NP-completo: *dado*: um politopo  $P$  em  $\mathbb{R}^3$ ; *questão*:  $P$  pode ser tetraedrizado? Below, De Loera e Richter-Gebert[1] provaram que o problema de minimizar o número de tetraedros em uma tetraedrização de um politopo convexo em  $\mathbb{R}^3$  é NP-difícil (note que isto, em particular, significa que politopos convexos possui tetraedrizações com um número diferente de tetraedros — em dimensão 2 não temos um fato semelhante).

4. Pelo Teorema da Galeria de Arte sabemos que  $\lfloor n/3 \rfloor$  guardas são ocasionalmente necessários e sempre suficientes para cobrir qualquer polígono com  $n$  vértices.

Tendo este teorema em mente o professor Maqui Sperto fez a seguinte afirmação: Seja  $P = (v_0, v_1, \dots, v_n)$  um polígono (vértices em ordem anti-horário a medida que eles ocorrem quando percorremos  $\partial P$ ) e seja  $V_k := \{v_i \mid i \bmod 3 = k\}$  ( $k = 0, 1, 2$ ). Então guardas colocados nos vértices em  $V_k$  cobrem o polígono  $P$  para algum  $k \in \{0, 1, 2\}$ . Apresente um exemplo que mostra que o professor Sperto está enganado.

5. (Exercício 1.1.4.2 de [7] — Visibilidade clara) Seja  $G'(n)$  o menor número de guardas suficientes para verem claramente cada ponto de um polígono com  $n$  vértices. Qual é a relação entre  $G(n)$  e  $G'(n)$ ? A prova de Fisk estabelece que  $G'(n) \leq \lfloor n/3 \rfloor$ ? Tente determinar  $G'(n)$  exatamente.
6. (Exercício 1.1.4.3 de [7] — Guardas nos vértices) Tente resolver o exercício anterior com a restrição que os guardas só podem ser colocados em vértices do polígono.
7. (Exercício 1.2.5.1 de [7] — Soma dos ângulos externos) Qual é a soma dos ângulos externos de um polígono com  $n$  vértices.
8. O *dual* de uma triangulação  $T$  de um polígono  $P$  é um grafo com um vértice associado a cada triângulo de  $T$  e uma aresta ligando dois vértices se e somente se os triângulos correspondentes têm um lado (diagonal) em comum.

Prove que o dual  $D$  de uma triangulação é uma árvore (uma árvore é um grafo conexo sem ciclos).

9. Prove ou de um contra-exemplo: Toda árvore binária é dual de uma triangulação de algum polígono.
10. (Exercício 1.2.5.3 de [7] — triangulações extremas) Quais polígonos tem o menor número de triangulações (em função do número de vértices  $n$ )? Um polígono de  $n$  vértices pode ter uma única triangulação? Quais polígonos de  $n$  vértices tem o maior número de triangulações distintas?
11. (Exercício 1.2.5.4 de [7] — número de triangulações) Qual o número de triangulações distintas de um polígono convexo com  $n$  vértices?

**Sugestão.** Veja o Capítulo 10, páginas 505–508, de [4].

12. (Exercício 1.2.5.7 de [7] — rotações em árvores) Para aqueles que conhecem a operação de **rotação** para manter o balanceamento de árvores binárias de busca. Interprete a operação de **rotação** em termos de triangulação de polígonos.
13. O professor Maqui Sperto (novamente) propôs uma alteração para a prova do Lema 6 Ele sugeriu que o vértice  $t$ , escolhido na demonstração, fosse um vértice tal que a distância entre  $v$  e  $t$  fosse mínima e afirmou que escolhendo  $t$  dessa maneira  $vt$  é uma diagonal do polígono  $P$ . O professor conseguiu dar um palpite correto desta vez? (Você precisa ver a demonstração do lema para fazer este exercício.)

14. (Minimizar o número de guardas está em NP) Descreva um algoritmo de complexidade de tempo polinomial que resolve o seguinte problema de decisão: *dados*: um polígono  $P$  e pontos  $p_1, \dots, p_k$ ; *questão*: guardas colocados nos pontos  $p_1, \dots, p_k$  cobrem  $P$ ?
15. (Minimizar o número de guardas é NP-difícil) Considere o problema de decisão: *dados*: um polígono  $P$  e um inteiro positivo  $k$ ; *questão*:  $P$  pode ser coberto por  $k$  guardas? Mostre que este problema é NP-completo.

**Sugestão.** Veja o Capítulo 9 O'Rourke [6].

#### REFERÊNCIAS

- [1] A. Below, J.A. De Loera e J. Richter-Gebert, Finding minimal triangulations of convex 3-polytopes is NP-hard, *Proceedings of the Eleventh Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms*, ACM-SIAM, 2000, pp. 65–66.
- [2] V. Chvátal, A combinatorial theorem in plane geometry, *Journal of Combinatorial, Series B* **18** (1975), 39–41.
- [3] S. Fisk, A short proof of Chvátal's watchman theorem, *Journal of Combinatorial Theory, series B* **24** (1978), 374.
- [4] R.P. Grimaldi, *Discrete and combinatorial mathematics*, Addison-Wesley, 1994, QA832 G861d.
- [5] G.H. Meister, Polygons have ears, *American Mathematical Monthly* **82** (1975), 648.
- [6] J. O'Rourke, *Art gallery theorems and algorithms*, The International Series of Monographs on Computer Science, Oxford University Press, New York, 1987, QA830 O74a.
- [7] ———, *Computational geometry in C*, Cambridge University Press, Cambridge, 1993, Second Edition, 1998.
- [8] J. Ruppert e R. Seidel, On the difficult of triangulating three-dimensional non-convex polyhedra, *Discrete and Computational Geometry* **7** (1992), 227–253.