Geometria Computacional

Departamento de Ciência da Computação – IME/USP

Segundo Semestre de 2007

Lista 8

(1) (Estrutura *winged-edge*) Considere um politopo representado por uma estrutura winged-edge.
 (a) Escreva um algoritmo que, dada uma face f, obtém todos os vértices desta face em tempo linear no número vértices de f.
 (b) Escreva uma algoritmo que, dado um vértice v, obtém todos os vértices adjacentes a v em tempo linear no número de arestas incidentes a v.

(2) ($\mathrm{Del}(S) \Rightarrow \mathrm{Vor}(S)$) Descreva um algoritmo que: dado o diagrama de Delaunay $\mathrm{Del}(S)$ de um conjunto de sítios S, constrói o diagrama de Voronoi $\mathrm{Vor}(S)$. Tente fazer com que seu algoritmo tenha complexidade de tempo linear.

(3) (Vértice de Delaunay de grau grande) Descreva conjunto S de n pontos (n arbitrário), que não contenha quatro pontos cocirculares, tal que o diagrama de Delaunay $\mathrm{Del}(S)$ tem um vértice (sítio) de grau $n-1$.

(4) (Uma aresta de $\mathrm{Del}(S)$ a partir de S_1 e S_2) Seja S um conjunto de pontos (sítios) de E^2 e sejam S_1 e S_2 subconjuntos não-vazios de S tal que $S_1 \cup S_2 = S$ e $S_1 \cap S_2 = \emptyset$ (ou seja, (S_1, S_2) é uma partição de S). Prove que se uv é um segmento de menor comprimento entre os segmentos em $\{s_1 s_2 \mid s_1 \in S_1 \text{ e } s_2 \in S_2\}$, então uv é uma aresta do diagrama de Delaunay.

(5) (Exercício 5.3.3.1 do livro de O'Rourke — Polígono regular) Descreva os diagramas de Voronoi e Delaunay dos vértices de um polígono regular.

(6) (Exercício 5.4.5.2 do livro de O'Rourke — Diagrama de Voronoi unidimensional) Um diagrama de Voronoi unidimensional de um conjunto $S = \{p_1, \ldots, p_n\}$ de sítios na reta (digamos, no eixo das abscissas) é um conjunto de pontos $\mathrm{Vor}(S) = \{x_1, \ldots, x_{n-1}\}$ tal que x_i é o ponto médio do segmento $p_i p_{i+1}$.

 Descreva um critério que permite que determinemos se um dado conjunto $\{x_1, \ldots, x_{n-1}\}$ de pontos é um diagrama de Voronoi unidimensional. Qual é a complexidade do algoritmo resultante do critério que você obteve?

(7) Prove que se S é um conjunto de n pontos de E^2 com no máximo k pontos cocirculares então cada vértice do diagrama de Voronoi $\mathrm{Vor}(S)$ de S tem grau entre 3 e k.

(8) (Grafo de vizinhanca relativa) Um *grafo de vizinhanca relativa* (*relative neighborhood graph*) de um conjunto S de n pontos de E^2, denotado por RNG(S), é um grafo cujo conjunto de vértices é S e existe uma aresta ligando dois pontos p e q, $\{p, q\} \subseteq S$, se

$$\text{distância}(p,q) \leq \min_{r \in S \setminus \{p,q\}} \max\{\text{distância}(p,r), \text{distância}(q,r)\}.$$

Esta desigualdade determina uma região 'proibida' para o ponto r se p e q são adjacentes no grafo de RNG(S). Esta região é formada pela intersecção dos círculos de centro p e q e raio distância(p, q).

(a) Prove que toda aresta de RNG(S) é uma aresta de Del(S).

(b) (MST $\subseteq$ RNG) Prove que toda aresta de uma árvore geradora Euclidiana mínima de S (MST(S)) é uma aresta de RNG(S).

(c) Descreva um algoritmo de complexidade de tempo $O(n^2)$ que constrói o grafo de vizinhança relativa de um dado conjunto S de n pontos. Mostre a correção e analise a complexidade do seu algoritmo.

(9) (Atualização dinâmica do diagrama de Delaunay) Dado o digrama de Delaunay Del(S) de um conjunto S de n pontos de E^2 e um ponto $p \in S$ descreva um algoritmo que constrói o diagrama de Delaunay de $S \setminus \{p\}$. A complexidade de tempo do seu algoritmo deve ser $O(k \log k)$ onde k é o número de arestas adjacentes ao sítio p. Mostre a correção e analise a complexidade do seu algoritmo.

(10) (Construção do diagrama de Delaunay *on-line*) Seja S um conjunto de n sítios em E^2 e seja p um sítio tal que $p \notin S$ e $p \in \text{conv}(S)$.

(a) Mostre que se p é um sítio no interior do triângulo $\triangle(a, b, c)$ do diagrama Del(S) então pa, pb e pc são arestas de Del($S \cup \{p\}$).

(b) Mostre que se p é um sítio da aresta ab do diagrama Del(S) que é compartilhada pelos triângulos $\triangle(a, b, c)$ e $\triangle(d, b, a)$ de Del(S) então pa, pb, pc e pd são arestas do digrama Del($S \cup \{p\}$).

(c) Chamaremos de *suspeitas* as arestas de Del(S) que suspeitamos que não fazem parte de Del($S \cup \{p\}$). Após as operações descritas nos itens (a) e (b) quais arestas de Del(S) são *supeitas*? Mostre como testar em tempo constante se uma aresta suspeita pertence ou não a Del($S \cup \{p\}$).

(d) Se constatarmos que uma aresta suspeita ab não pertence a Del($S \cup \{p\}$) então qual aresta deverá ser inserida no diagrama? Depois de inserirmos esta aresta quais arestas que eram `não-suspeitas` passam a ser `suspeitas`?

(e) Quantas vezes uma aresta `suspeita` será testada?

(f) Dados o diagrama de Delaunay de um conjunto S de n sítios de E^2, um sitio $p \notin S$ e o triângulo $\triangle(a,b,c)$ do diagrama de Delaunay de S que contém p, descreva um algoritmo que constrói o diagrama de Delaunay de $S \cup \{p\}$. A complexidade do seu algoritmo deve ser $O(k)$ onde k é o número de arestas inseridas mais o número de arestas removidas. (Se você não conseguir um algoritmo $O(k)$ então tente descrever um algoritmo $O(n)$.) Mostre a correção e analise a complexidade do seu algoritmo. (Se $p \notin \mathrm{conv}(S)$ então $\mathrm{Del}(S \cup \{p\})$ pode ser construído através do Algoritmo `MergeDelaunay`.)

[Note que o algoritmo pedido por este item é o passo central de um algoritmo *on-line* que constrói o diagrama de Delaunay de um conjunto de n sítios em tempo $O(n^2)$.]

(11) (Exercício 5.4.5.3 do livro de O'Rourke — Diagrama de Voronoi cinético) Imagine um conjunto de pontos movendo-se no plano, cada ponto com uma direção e velocidade fixas. Seja $V(t)$ o diagrama de Voronoi deste pontos no instante t. É um problema em aberto obter um limite *tight* para o número de diagramas combinatorialmente distintos que podemos obter ao longo do tempo. Tente obter a conhecida cota inferior de $\Omega(n^2)$. Em outra palavras, encontre um conjunto de n pontos tal que $V(t)$ muda a sua estrutura combinatória cn^2 vezes onde c é um constante.

Ninguém foi capaz até agora de encontrar um exemplo onde mais de n^2 mudanças são necessárias, mas o melhor limite superior conhecido é $O(n^3)$ (cf. Fu e Lee [1], veja também Guibas, Mitchell e Roos [2]).

Referências

[1] J.-J. Fu e R.C.T. Lee, Voronoi diagrams of moving points in the plane, *International Journal on Computational Geometry and Applications* **1** (1991), no. 1, 23–32.

[2] L.J. Guibas, J.S.B. Mitchell e T. Roos, Voronoi diagrams of moving points in the plane, *Proceedings of the 17th International Workshop Graph-Theoretic Concepts in Computer Science*, Lecture Notes Computer Science, vol. 570, Springer-Verlag, 1991, pp. 113–125.