

# Geometria Computacional

Departamento de Ciência da Computação – IME/USP

Segundo Semestre de 2007

## LISTA 1

- (1) [Exercício 1.1.4.6 do O’Rourke — guardando a parede] Construa um polígono  $P$  e disponha guardas em  $P$  de tal forma que os guardas vêem todos os pontos em  $\partial P$ , mas existem pontos em  $P$  que não são vistos/cobertos pelos guardas.
- (2) [Exercício 1.1.4.6 do O’Rourke — guardas em poliedros] Descreva um poliedro em  $\mathbb{R}^3$  que mesmo colocando-se guardas em todos os vértices existam pontos do poliedro que não são cobertos pelos guardas.

**Sugestão.** Veja o Capítulo 9 do O’Rourke (1987).

- (3) [‘Tetraedrização’ de poliedros] Descreva um politopo (um politopo é um poliedro limitado) de genus zero (ou seja o politopo não tem ‘buracos’) em  $\mathbb{R}^3$  que não pode ser particionado em tetraedros tendo vértices selecionados dentre os vértices do politopo.

**Sugestão.** Veja o Capítulo 10 do O’Rourke (1987).

**Observação.** Ruppert e Seidel mostraram que o seguinte problema é NP-completo: dado um politopo  $P$  em  $\mathbb{R}^3$ , decidir se  $P$  pode ser tetraedrizado. Below, De Loera e Richter-Gebert provaram que o problema de minimizar o número de tetraedros em uma tetraedrização de um politopo convexo em  $\mathbb{R}^3$  é NP-difícil. (Note que isto, em particular, significa que politopos convexos possui tetraedrizações com um número diferente de tetraedros — em dimensão 2 não temos um fato semelhante.)

- (4) Pelo Teorema da Galeria de Arte sabemos que  $\lfloor n/3 \rfloor$  guardas são ocasionalmente necessários e sempre suficientes para cobrir qualquer polígono com  $n$  vértices.

Tendo este teorema em mente o professor Maqui Sperto fez a seguinte afirmação: Seja  $P = (v_0, v_1, \dots, v_n)$  um polígono (vértices em ordem anti-horário a medida que eles ocorrem quando percorremos  $\partial P$ ) e seja  $V_k := \{v_i \mid i \bmod 3 = k\}$  ( $k = 0, 1, 2$ ). Então guardas colocados nos vértices em  $V_k$  cobrem o polígono  $P$  para algum  $k \in \{0, 1, 2\}$ . Apresente um exemplo que mostra que o professor Sperto está enganado.

- (5) [Exercício 1.1.4.2 do O’Rourke — visibilidade clara] Seja  $G'(n)$  o menor número de guardas suficientes para verem claramente cada ponto de um polígono com  $n$  vértices. Qual é a relação entre  $G(n)$  e  $G'(n)$ ? A prova de Fisk estabelece que  $G'(n) \leq \lfloor n/3 \rfloor$ ? Tente determinar  $G'(n)$  exatamente.

- (6) [Exercício 1.1.4.3 do O'Rourke — guardas nos vértices] Tente resolver o exercício anterior com a restrição que os guardas só podem ser colocados em vértices do polígono.
- (7) [Exercício 1.2.5.1 do O'Rourke — soma dos ângulos externos] Qual é a soma dos ângulos externos de um polígono com  $n$  vértices.
- (8) O *dual* de uma triangulação  $T$  de um polígono  $P$  é um grafo com um vértice associado a cada triângulo de  $T$  e uma aresta ligando dois vértices se e somente se os triângulos correspondentes têm um lado (diagonal) em comum.  
 Prove que o dual  $D$  de uma triangulação é uma árvore (uma árvore é um grafo conexo sem ciclos).
- (9) Prove ou de um contra-exemplo: Toda árvore binária é dual de uma triangulação de algum polígono.
- (10) [Exercício 1.2.5.3 do O'Rourke — triangulações extremas] Quais polígonos tem o menor número de triangulações (em função do número de vértices  $n$ )? Um polígono de  $n$  vértices pode ter uma única triangulação? Quais polígonos de  $n$  vértices tem o maior número de triangulações distintas?
- (11) [Exercício 1.2.5.4 do O'Rourke — número de triangulações] Qual o número de triangulações distintas de um polígono convexo com  $n$  vértices?  
**Sugestão.** Veja o Capítulo 10, páginas 505–508, de Grimaldo (1994).
- (12) [Exercício 1.2.5.7 do O'Rourke — rotações em árvores] Para aqueles que conhecem a operação de **rotação** para manter o balanceamento de árvores binárias de busca. Interprete a operação de **rotação** em termos de triangulação de polígonos.
- (13) O professor Maqui Sperto (novamente) propôs uma alteração para a prova do Lema 6 (Meister). Ele sugeriu que o vértice  $t$ , escolhido na demonstração, fosse um vértice tal que a distância entre  $v$  e  $t$  fosse mínima e afirmou que escolhendo  $t$  dessa maneira  $vt$  é uma diagonal do polígono  $P$ . O professor conseguiu dar um palpite correto desta vez? (Você precisa ver a demonstração do lema para fazer este exercício.)
- (14) [Minimizar o número de guardas está em NP] Descreva um algoritmo de complexidade de tempo polinomial que resolve o seguinte problema de decisão: dados um polígono  $P$  e pontos  $p_1, \dots, p_k$ , decidir se guardas colocados nos pontos  $p_1, \dots, p_k$  cobrem  $P$ .
- (15) [Minimizar o número de guardas é NP-difícil] Considere o problema de decisão: dados um polígono  $P$  e um inteiro positivo  $k$ , decidir se  $P$  pode ser coberto por  $k$  guardas. Mostre que este problema é NP-completo.  
**Sugestão.** Veja o Capítulo 9 do O'Rourke (1987).