Algoritmos Probabilísticos

Departamento de Ciência da Computação – IME/USP

Segundo Semestre de 2006

Um esclarecimento sobre a prova do lema do isolamento

Na prova do lema do isolamento, em um ponto, queremos calcular a probabilidade de haver empate com o elemento e_i. Acho que fiz uma afirmação errada na aula, então aqui vai um pequeno esclarecimento sobre a delimitação desta probabilidade.

$$
\begin{aligned}
&\Pr[\text{empate com } e_i] \\
&= \sum_{\substack{k_1,\ldots,k_{i-1},k_{i+1},\ldots,k_m \\ \in\{0,\ldots,2m-1\}^{m-1}}} \Pr[\text{empate com } e_i \text{ e } w_j = k_j \text{ para todo } j \neq i] \\
&= \sum_{\substack{k_1,\ldots,k_{i-1},k_{i+1},\ldots,k_m \\ \in\{0,\ldots,2m-1\}^{m-1}}} \Pr[\text{empate com } e_i \mid w_j = k_j \text{ para todo } j \neq i] \Pr[w_j = k_j \text{ para todo } j \neq i] \\
&= \sum_{\substack{k_1,\ldots,k_{i-1},k_{i+1},\ldots,k_m \\ \in\{0,\ldots,2m-1\}^{m-1}}} \Pr[\text{empate com } e_i \mid w_j = k_j \text{ para todo } j \neq i] \left(\frac{1}{2m}\right)^{m-1}.
\end{aligned}
$$

Para cada $k_1,\ldots,k_{i-1},k_{i+1},\ldots,k_m$ em $\{0,\ldots,2m-1\}^{m-1}$, considere $w_j = k_j$ para todo $j \neq i$. Seja $W^- = \min\{w(S_j) : e_i \notin S_j\}$ e $W^+ = \min\{w(S_j \setminus \{e_i\}) : e_i \in S_j\}$. Temos que

$$
\begin{aligned}
\Pr[\text{empate com } e_i \mid w_j = k_j \text{ para todo } j \neq i] &= \Pr[w_i = W^- - W^+ | w_j = k_j \text{ para todo } j \neq i] \\
&= \begin{cases} \frac{1}{2m} & \text{se } W^- - W^+ \in \{0,\ldots,2m-1\} \\ 0 & \text{se } W^- - W^+ \notin \{0,\ldots,2m-1\}. \end{cases}
\end{aligned}
$$

Disso concluímos que

$$
\Pr[\text{empate com } e_i] \leq \sum_{\substack{k_1,\ldots,k_{i-1},k_{i+1},\ldots,k_m \\ \in\{0,\ldots,2m-1\}^{m-1}}} \frac{1}{2m}\left(\frac{1}{2m}\right)^{m-1} = (2m)^{m-1}\frac{1}{2m}\left(\frac{1}{2m}\right)^{m-1} = \frac{1}{2m}.
$$