Algoritmos Probabilísticos

Segundo semestre de 2006

Lista 3

1. Descreva uma implementação do algoritmo de Luby para uma CREW PRAM, ou seja, explique uma implementação do algoritmo que não faça tentativas de escrita simultâneas. Você pode precisar gastar mais memória para evitar as tentativas de escritas simultâneas.

2. Seja c é uma constante positiva menor que 1 e $X_0, X_1, \ldots$ variáveis aleatórias tais que $X_0 = m$ e $X_i \in \{0, \ldots, X_{i-1}\}$ e é tal que $\mathrm{E}[X_i] \leq c\,\mathrm{E}[X_{i-1}]$, para $i = 1, 2, \ldots$. Seja t o menor i tal que $X_i = 0$. Mostre que $\mathrm{E}[t] = O(\lg m)$.

3. Prove a desigualdade de Chebyshev.

4. Sejam $X_1, \ldots, X_n$ variáveis aleatórias 2 a 2 independentes e seja $X = \sum_{i=1}^{n} X_i$. Prove que $\mathrm{Var}[X] = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Var}[X_i]$.

5. Seja A um algoritmo PP para uma linguagem L. Considere a análise que fizemos na aula de um algoritmo BPP, para ampliar a sua probabilidade de acerto. Para cada inteiro positivo t, seja A^t o algoritmo para L obtido de maneira semelhante ao dessa análise. Adapte a análise que fizemos na aula para esse algoritmo A^t e comente o que você observar ao adaptar a análise. Elabore sobre isso.

6. No *problema do colecionador de cupons*, existem n tipos de cupons diferentes e, ao ganhar um novo cupon, ele é sempre de um dos n tipos escolhido aleatoriamente (de acordo com a distribuição uniforme). Seja X o número de cupons ganhos até o colecionador ter pelo menos um cupom de cada tipo. Na lista passada, você calculou o valor esperado de X. Compare a delimitação para $\Pr[X \geq 2E[X]]$ obtida da desigualdade de Markov e a delimitação obtida da desigualdade de Chebyshev.

7. Seja X o número de caras obtidas ao jogarmos n vezes uma moeda honesta. Quanto vale $\mathrm{E}[X]$? Quanto vale $\mathrm{Var}[X]$? Calcule uma delimitação para $\Pr[X \geq 3n/4]$ da desigualdade de Markov e da desigualdade de Chebyshev.

8. Seja $X_1, X_2, X_3, \ldots$ uma seqüência de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas com $\Pr[X_i = 1] = \Pr[X_i = -1] = 1/2$. Seja $Y_0 = 0$ e $Y_i = Y_{i-1} + X_i$ para $i \geq 1$. Na lista passada, você mostrou que, para todo j, $\mathrm{E}[Y_j] = 0$, porém mostrou também que $E[Y_t]$ pode não ser zero se t for também uma variável aleatória. Mostre que se t é uma variável aleatória independente de X_i, para $i = 1, 2, \ldots$, então $E[Y_t] = 0$.

9. Na lista passada você adaptou o algoritmo RP visto em aula para decidir se um grafo bipartido tinha ou não emparelhamento perfeito para que funcionasse para grafos arbitrários. Neste exercício vamos estudar a adaptação do algoritmo RP que encontra um emparelhamento perfeito em um grafo bipartido (ou responde que o grafo não tem um emparelhamento perfeito) para que este funcione para grafos arbitrários. Para tanto, seja G um grafo (não necessariamente bipartido) que tem um emparelhamento perfeito e, para cada aresta ij de G, seja w_{ij} um número em $\{1, \ldots, 2m\}$ ao qual nos referimos como peso da aresta ij. (Como sempre, m denota o número de aresta do grafo G.)

   Suponha que os pesos w_{ij} sejam tais que há um único emparelhamento perfeito de peso mínimo em G e seja D a matriz obtida da matriz de Tutte (dada no exercício 11 da lista 2) após substituirmos cada x_{ij} por $2^{w_{ij}}$.

   (a) Qual é a maior potência de 2 que divide $\det D$?

   (b) Seja D_{ij} a matriz obtida de D após a remoção da linha i e da coluna j. Se ij é uma aresta e está no único emparelhamento perfeito de peso mínimo de G, então o que você pode dizer sobre a maior potência de 2 que divide $\det D_{ij}$?

   (c) Se ij é uma aresta mas não está no único emparelhamento perfeito de peso mínimo de G, então o que você pode dizer sobre a maior potência de 2 que divide $\det D_{ij}$?

   (d) Adapte o algoritmo visto em aula para grafos arbitrários.