Algoritmos Probabilísticos

Segundo semestre de 2006

Lista 2

1. Prove a desigualdade de Markov.

2. Escreva cuidadosamente a prova de que RP $\cap$ coRP $\subseteq$ ZPP.

3. Mostre que coRP $\subseteq$ coNP.

4. Mostre ZPP $\subseteq$ coRP, ou seja, mostre como converter um algoritmo ZPP para uma linguagem L em um algoritmo coRP e argumente que o algoritmo obtido de fato é um algoritmo coRP.

5. PSPACE é a classe das linguagem para as quais há um algoritmo que as reconhece e que consome *espaço* polinomial. Mostre que PP $\subseteq$ PSPACE.

6. Um navio chega ao porto de Santos e 40 marinheiros que estavam a bordo descem em Santos para espairecer. Mais tarde, à noite, os 40 marinheiros voltam para o navio e, embriagados, cada um escolhe uma cabine aleatoriamente para dormir.

   (a) Calcule o número esperado de marinheiros que dormirá na sua própria cabine.

   (b) Calcule a probabilidade de que nenhum marinheiro durma em sua própria cabine.

7. No *problema do colecionador de cupons*, existem n tipos de cupons diferentes e, ao ganhar um novo cupon, ele é sempre de um dos n tipos escolhido aleatoriamente (de acordo com a distribuição uniforme). Seja X o número de cupons ganhos até o colecionador ter pelo menos um cupom de cada tipo. Qual é o valor esperado de X?

8. Considere o algoritmo das propostas para o problema dos casamentos estáveis. Lembre-se que n denota o número de rapazes, e também o número de moças. O objetivo deste exercício é escrever o cálculo do número esperado de propostas efetuadas por esse algoritmo quando a lista de cada rapaz é escolhida aleatoriamente dentre todas as permutações de 1 a n. Para tanto, considere a versão modificada do algoritmo das propostas em que cada rapaz monta sua lista *on-line*, como descrito em aula. Ou seja, a cada iteração em que um rapaz é escolhido por ainda estar solteiro, ele escolhe a próxima moça da sua lista aleatoriamente dentre aquelas para as quais ele ainda não tinha proposto. Explique a versão "com amnésia" deste algoritmo, e calcule o número esperado de propostas feitas por essa versão. Deduza algo sobre o número esperado de propostas efetuadas pelo algoritmo original das propostas quando a lista de cada rapaz é escolhida aleatoriamente dentre todas as permutações de 1 a n.

9. Suponha que $X_0, X_1, X_2, X_3, \ldots$ é uma seqüência de variáveis aleatórias inteiras positivas tais que $X_0 = N$ e, para cada $i \geq 1$ e cada $j \in \{1, 2, \ldots, X_{i-1}\}$,

$$\Pr[X_i = j | X_1, X_2, \ldots, X_{i-1}] \;=\; 1/X_{i-1}.$$

   Seja t o menor i tal que $X_i = 1$. Calcule o valor esperado de t exatamente.

10. Sejam $X_1, X_2, X_3, \ldots$ uma seqüência de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas com $\Pr[X_i = 1] = \Pr[X_i = -1] = 1/2$. Seja $Y_0 = 0$ e $Y_i = Y_{i-1} + X_i$ para $i \geq 1$.

    (a) Prove que, para todo j, $\mathrm{E}[Y_j] = 0$.

    (b) Mostre que $E[Y_t]$ pode não ser zero se t for também uma variável aleatória.

11. O objetivo dessa questão é obtermos um algoritmo RP para decidir se um grafo arbitrário tem ou não um emparelhamento perfeito. A matriz de Tutte para um grafo arbitrário $G = (V, E)$ é a matriz M onde

$$M_{ij} = \begin{cases} x_{ij} & \text{se } (i,j) \in E \text{ e } i < j \\ -x_{ji} & \text{se } (i,j) \in E \text{ e } i > j \\ 0 & \text{se } (i,j) \notin E. \end{cases}$$

    (a) Escreva uma expressão para o determinante de M.

    (b) Prove que se existe um emparelhamento perfeito em G, então $\det M$ é não-nulo. (*Dica:* Dê valores explícitos para os x_{ij} que comprovem isso.)

    (c) Mostre que $\mathrm{sinal}(\pi) = \mathrm{sinal}(\pi^{-1})$, onde π é uma permutação e π^{-1} é a permutação inversa de π (ou seja, aquela que, se aplicada a π, leva à identidade).

    (d) Use o item (c) para argumentar que os monômios com coeficientes não-nulos no determinante correspondem a emparelhamentos perfeitos em G (possivelmente mais de um emparelhamento perfeito). Conclua que $\det M \neq 0$ se e somente se existe um emparelhamento perfeito em G.