

Estruturas de Dados
Departamento de Ciência da Computação
Primeiro semestre de 2006

Remoção de Árvore Rubro-Negra

As árvores rubro-negras foram propostas por Bayer, em 1972, mas foram analisadas por Guibas e Sedgwick em 1978.

Abaixo está um esquema do algoritmo de remoção de um nó de uma árvore rubro-negra, conforme discutimos na aula de hoje.

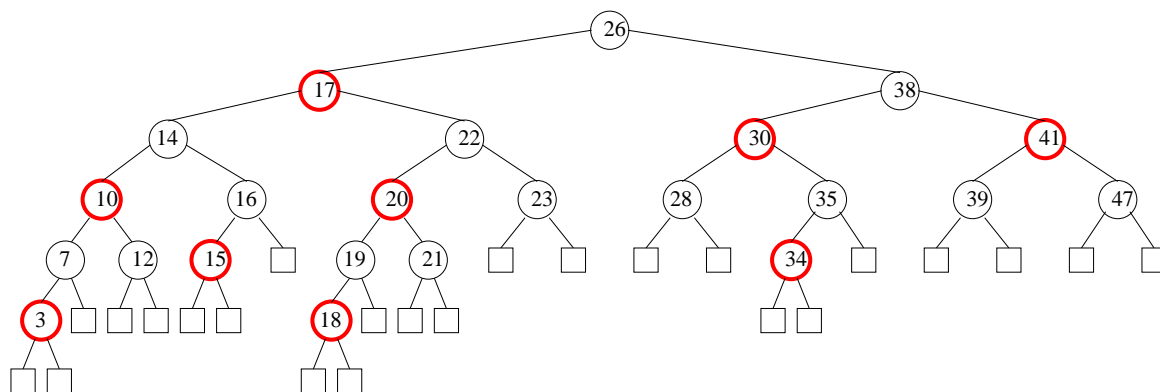
```
RemoveRN( $t, q$ )
1  ...                                ▷ Remoção usual de árvore binária de busca
2  se cor( $p$ ) = negra                 ▷  $p$  é o nó efetivamente removido
3    então ConsertaRN( $t, f$ )          ▷  $f$  é o filho de  $p$ 
4  Libera-Célula( $p$ )
```

Agora vamos à rotina que efetivamente conserta a árvore rubro-negra. Ela recebe como parâmetros dois apontadores t e x . O apontador t é a raiz de uma árvore rubro-negra que tem um nó x com uma cor negra “extra”. As propriedades rubro-negras desta árvore estão todas valendo se considerarmos esta cor negra “extra” no nó x . A rotina conserta a árvore para que volte a ser uma árvore rubro-negra usual (sem cores negras extras). A idéia é subir a cor negra extra até um nó vermelho, que então pode ser pintado de negro, ou até a raiz, quando o problema se resolve sozinho.

```
ConsertaRN( $t, x$ )
1  enquanto  $x \neq t$  e cor( $x$ ) = negra faça
2    se  $x = \text{esq}(\text{pai}(x))$ 
3      então  $w \leftarrow \text{dir}(\text{pai}(x))$            ▷ Irmão de  $x$ 
4        se cor( $w$ ) = vermelha                 ▷ Garante que o irmão de  $x$  é negro
5          então cor( $w$ )  $\leftarrow$  negra
6            cor( $\text{pai}(x)$ )  $\leftarrow$  vermelha
7            Rotaciona-Esquerda( $t, \text{pai}(x)$ )
8             $w \leftarrow \text{dir}(\text{pai}(x))$ 
9        se cor( $\text{esq}(w)$ ) = negra e cor( $\text{dir}(w)$ ) = negra   ▷ Sobe a cor negra
10       então cor( $w$ )  $\leftarrow$  vermelha
11        $x \leftarrow \text{pai}(x)$ 
12       senão se cor( $\text{dir}(w)$ ) = negra   ▷ Garante que o filho direito de  $w$  é vermelho
13         então cor( $\text{esq}(w)$ )  $\leftarrow$  negra
14           cor( $w$ )  $\leftarrow$  vermelha
15           Rotaciona-Direita( $t, w$ )
16            $w \leftarrow \text{dir}(\text{pai}(x))$ 
17           cor( $w$ )  $\leftarrow$  cor( $\text{pai}(x)$ )
18           cor( $\text{pai}(x)$ )  $\leftarrow$  negra
19           cor( $\text{dir}(w)$ )  $\leftarrow$  negra
20           Rotaciona-Esquerda( $t, \text{pai}(x)$ )
21            $x \leftarrow t$ 
22       senão ...                               ▷ Caso simétrico:  $x$  é filho direito do seu pai
23     cor( $x$ )  $\leftarrow$  negra
```

Exercícios

Considere a seguinte árvore rubro-negra.



1. Simule, sempre a partir da árvore acima (não na resultante da remoção anterior), a remoção dos nós que contêm a chave 18, 7, 12 e 28. Mostre a árvore rubro-negra resultante de cada uma das remoções.
2. Simule a remoção de 18, 7, 12 e 28 desta vez sempre fazendo a próxima remoção a partir da árvore resultante da remoção anterior. Mostre a árvore rubro-negra resultante depois de cada uma das remoções.
3. Simule a remoção da chave 26 da árvore acima. (Lembre-se de como funciona a remoção em ABBs normais!)
4. Aproveite a árvore acima para simular várias remoções e inserções numa árvore rubro-negra. Use esse exemplo para ajudar você a entender o código de remoção e inserção em árvores rubro-negras.

Árvores AVL

Uma árvore binária de busca é AVL se e somente se, para todo nó, a diferença entre a altura da subárvore esquerda do nó e a direita é -1 , 0 ou 1 .

Árvores AVL foram as primeiras árvores balanceadas propostas na literatura. Elas foram introduzidas por Adelson-Velsky (ou Adelson-Velskii) e Landi em 1962. Cada nó de uma árvore AVL tem um campo para guardar a diferença entre a altura de suas duas subárvores. O processo de inserção e remoção de árvores AVL é parecido com o processo de inserção e remoção de árvores rubro-negras. No entanto, uma inserção em uma árvore AVL pode requerer $O(\log n)$ rotações para restaurar a árvore.

Para saber mais sobre árvores AVL, consulte o livro do Wirth, página 218, ou o livro do Manber, páginas 75 a 77. Veja também a animação em java das árvores AVL

<http://www.cs.jhu.edu/~goodrich/dsa/trees/avltree.html>

e compare-as com as árvores rubro-negras.