MAC 5711 - Análise de Algoritmos

Departamento de Ciência da Computação

Segundo semestre de 2005

Lista 5

Devolução dos exercícios 2 e 7: **6 de outubro**

2. O *problema da coleção máxima de intervalos disjuntos* consiste no seguinte: dada uma coleção de intervalos $\mathcal{S} = \{[c_i \ldots f_i] : 1 \leq i \leq n\}$, encontrar uma subcoleção $\mathcal{S}'$ de $\mathcal{S}$ de intervalos dois a dois disjuntos onde $|\mathcal{S}'|$ é máximo.

   Mostre que nenhuma das três seguintes idéias gulosas resolve este problema. Idéia 1: Escolha o menor intervalo dentre os que são compatíveis com os intervalos já escolhidos. Idéia 2: Escolha um intervalo que seja compatível com os já escolhidos e que intercepta o menor número possível de intervalos ainda não escolhidos. Idéia 3: Escolha o intervalo compatível com os já selecionados que tenha o menor instante de início.

   Descreva um algoritmo guloso que resolva o problema acima. Mostre que de fato seu algoritmo está correto e analise o seu consumo de tempo.

7. Seja T uma árvore geradora mínima de um grafo G, e seja L uma lista ordenada dos pesos das arestas de T. Mostre que, para qualquer outra árvore geradora mínima T' de G, a lista L é também uma lista ordenada dos pesos das arestas de T'.

   Resolução: Observe que, se provarmos a afirmação para uma árvore geradora mínima (MST) T arbitrária, o resultado vale para qualquer MST T. Assim, podemos escolher T como uma MST produzida pelo algoritmo de Kruskal.

   Sejam $e_1, \ldots, e_{n-1}$ as arestas de T em ordem de peso. Para uma MST T', seja i o maior valor de j tal que $\{e_1, \ldots, e_{j-1}\} \subseteq T'$. Vamos mostrar por indução em $n - i$ que a lista ordenada dos pesos das arestas de T' é L.

   Se $n - i = 0$, ou seja, se $i = n$, então $T' = T$ e claro que a afirmação vale. Se $n - i > 0$, então seja f uma aresta no único circuito em $T' + e_i$ que não esteja em T. Claro que $f \not\in \{e_1, \ldots, e_i\}$. Além disso, claro que $T' + e_i - f$ é uma árvore geradora e portanto o custo de f é menor ou igual ao custo de e_i.

   Por outro lado, pelo algoritmo de Kruskal, f não pode ter custo menor que e_i, ou f teria sido incluída em T pelo algoritmo antes dele incluir e_i. Ou seja, f tem custo igual ao custo de e_i e $T' + e_i - f$ é uma MST e tem a mesma lista ordenada que T'.

   Como $\{e_1, \ldots, e_i\} \subseteq T' + e_i - f$, por indução, a lista ordenada dos pesos das arestas de $T' + e_i - f$ é L. Isso conclui a prova, já que T' e $T' + e_i - f$ têm a mesma lista.