Análise de Algoritmos

Departamento de Ciência da Computação
Segundo semestre de 2005

Gabarito parcial da lista 1

1. Sejam $n \in \mathbf{Z}$ e $x \in \mathbf{R}$. Prove que

   (a) $\lfloor x \rfloor < n \iff x < n$; $n < \lceil x \rceil \iff n < x$.
   Solução: (Só da primeira afirmação. A outra é semelhante.)
   Lembre-se que $\lfloor x \rfloor = \max\{m \in \mathbf{Z} : m \leq x\}$.

$$\begin{aligned} \lfloor x \rfloor < n &\iff \max\{m \in \mathbf{Z} : m \leq x\} < n \\ &\iff n \notin \{m \in \mathbf{Z} : m \leq x\} \\ &\iff n \not\leq x \\ &\iff n > x \end{aligned}$$

   (e) $\lfloor -x \rfloor = -\lceil x \rceil$.
   Solução: Da definição de $\lceil x \rceil$, temos que $x \leq \lceil x \rceil < x + 1$. Multiplicando-se por -1, obtemos que $-x - 1 < -\lceil x \rceil \leq -x$. Similarmante, pela definição de $\lfloor -x \rfloor$, temos que $-x - 1 < \lfloor -x \rfloor \leq -x$. Como há apenas um inteiro no intevalo $(-x - 1, -x]$ e $-\lceil x \rceil$ e $\lfloor -x \rfloor$ são inteiros, temos que $-\lceil x \rceil = \lfloor -x \rfloor$.

2. Mostre que $\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \leq \lfloor x + y \rfloor$, com igualdade se e somente se (sse) $x + y - 1 < \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor$. Encontre uma fórmula análoga para $\lceil\ \rceil$.

   Solução: Por 1(b), temos que

$$\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \leq \lfloor x + y \rfloor \quad \iff \quad \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \leq x + y.$$

   Como $\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \leq x + y$ vale trivialmente, pois $\lfloor x \rfloor \leq x$ e $\lfloor y \rfloor \leq y$, temos que $\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \leq \lfloor x + y \rfloor$.
   Quanto à igualdade, por 1(c), temos que

$$\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor = \lfloor x + y \rfloor \quad \iff \quad x + y - 1 < \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \leq x + y.$$

   Mas a segunda desigualdade ($\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \leq x + y$) vale sempre e portanto pode ser omitida. Temos assim que

$$\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor = \lfloor x + y \rfloor \quad \iff \quad x + y - 1 < \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor.$$

3. Mostre que se $x \in \mathbf{R}$, $m, n \in \mathbf{Z}$ e $n > 0$, $\left\lfloor \frac{x+m}{n} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{\lfloor x \rfloor + m}{n} \right\rfloor$.

4. Para inteiros n, m, simplifique

   (a) $\left\lfloor \frac{n+m}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n-m+1}{2} \right\rfloor$
   Solução:
   Caso 1: n e m têm a mesma paridade.
   Neste caso, existem inteiros p e q tais que $n + m = 2p$ e $n - m = 2q$. Temos então que

$$\left\lfloor \frac{n+m}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n-m+1}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{2p}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2q+1}{2} \right\rfloor = p + q = n.$$

   Caso 2: n e m não têm a mesma paridade.
   Neste caso, existem inteiros p e q tais que $n + m = 2p + 1$ e $n - m = 2q - 1$. Temos então que

$$\left\lfloor \frac{n+m}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n-m+1}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{2p+1}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2q-1}{2} \right\rfloor = p + q = n.$$

5. Dê exemplos de funções $f, g : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$, estritamente crescentes, tais que nem $f(n) = O(g(n))$ nem $g(n) = O(f(n))$.

6. Prove que, para todas funções $f, g : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$,

   (a) $af(n) + b = O(f(n)) \quad (a, b$ constantes$)$.

   Solução: Para resolver este item, precisamos assumir primeiro que $f(n)$ é assintoticamente positiva, ou seja, que existe $n_1 > 0$ tal que $f(n) > 0$ para todo $n \geq n_1$. Segundo, que $af(n)+b$ é assintoticamente positiva, o que é equivalente a assumir que $a > 0$ e $b > -a$, dado que $f(n)$ é assintoticamente positiva.

   Queremos mostrar que existem $c > 0$ e $n_0 > 0$ tais que $0 \leq af(n) + b \leq cf(n)$ para todo $n \geq n_0$. Para todo $n \geq n_1$, temos que $f(n) \geq 1$. Isso implica que $af(n) + b \geq a + b \geq 0$ para todo $n \geq n_1$. Tomando-se $c = a + |b|$, temos que, para todo $n \geq n_1$,

   $$af(n) + b \leq af(n) + |b| \leq af(n) + |b|f(n) = cf(n),$$

   pois nesse caso $f(n) \geq 1$. Portanto, tomando-se $c = a + |b|$ e $n_0 = n_1$, temos que $0 \leq af(n) + b \leq cf(n)$ para todo $n \geq n_0$, o que implica que $af(n) + b = O(f(n))$.

   (b) $O(f(n)) + O(f(n)) = O(f(n))$.

   Solução: Para provar este item, devemos mostrar que, para quaisquer funções $g(n), h(n) = O(f(n))$, temos que $g(n) + h(n) = O(f(n))$.

   Sejam $g(n), h(n) = O(f(n))$. Como $g(n), h(n) = O(f(n))$, existem constantes $c_1, c_2 > 0$ e $n_1, n_2 > 0$ tais que $0 \leq g(n) \leq c_1 f(n)$, para todo $n \geq n_1$, e $0 \leq h(n) \leq c_2 f(n)$, para todo $n \geq n_2$. Tomando-se $c = c_1 + c_2$ e $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$, temos que $0 \leq g(n) + h(n) \leq cf(n)$, para todo $n \geq n_0$. Ou seja, $g(n) + h(n) = O(f(n))$.

7. Sejam $f(n)$ e $g(n)$ funções assintoticamente positivas. Prove ou desprove cada uma das seguintes conjecturas.

   (a) $f(n) = O(g(n))$ implica que $\log(f(n)) = O(\log(g(n)))$, onde $\log(g(n)) > 0$ e $f(n) \geq 1$ para todo n suficientemente grande.

   Solução: Vamos provar que, **se as funções forem inteiras**, a conjectura é verdadeira.

   Suponha que $f(n) = O(g(n))$. Isto significa que existem constantes $c > 0$ e $n_0 > 0$ tais que $f(n) \leq c\,g(n)$ para todo $n \geq n_0$. Podemos assumir que $c \geq 2$ (caso $c < 2$, tome $c = 2$ e, evidentemente, a afirmação acima continua válida).

   Como $\log x$ é uma função crescente, temos que, para $n \geq n_0$,

   $$\log(f(n)) \;\leq\; \log(c\,g(n)) \;=\; \log c + \log(g(n)).$$

   Além disso, como $\log(g(n)) > 0$ para todo n suficientemente grande e $g(n)$ é uma função inteira, então $g(n) \geq 2$ para, digamos, $n \geq n_1$. Ou seja, existe $n_1 > 0$ tal que $\log(g(n)) \geq 1$ para todo $n \geq n_1$.

   Tomemos então $c_2 := 2 \log c$ e $n_2 := \max\{n_0, n_1\}$. Observe que $c_2 \geq 2$ pois $c \geq 2$. Para todo $n \geq n_2$, temos que

   $$\log(f(n)) \;\leq\; \log c + \log(g(n)) \;\leq\; \frac{c_2}{2} + \frac{c_2}{2}\log(g(n)) \;\leq\; c_2 \log(g(n)).$$

   A conjectura é falsa se omitirmos a hipótese de que as funções são inteiras. Veja por exemplo o caso das funções $f(n) = 2 + 2/n$ e $g(n) = 1 + 1/n$. Claramente $f(n) = O(g(n))$, porém $\lim_{n\to\infty} \log(f(n)) = 1$ e $\lim_{n\to\infty} \log(g(n)) = 0$.

   (d) $f(n) = O(g(n))$ implica que $2^{f(n)} = O(2^{g(n)})$.

   Solução: A conjectura acima é falsa. Tome, por exemplo, $f(n) = 2n$ e $g(n) = n$. Evidentemente $f(n) = O(g(n))$. No entanto, não é verdade que $2^{2n} = O(2^n)$. De fato, suponha que $2^{2n} = O(2^n)$. Isso significaria que existem constantes $c > 0$ e $n_0 > 0$ tais que, para todo $n \geq n_0$,

   $$2^{2n} \leq c2^n.$$

   Dividindo os dois lados por 2^n, obtemos que $2^n \leq c$ para todo $n \geq n_0$, o que é um absurdo.

8. Seja k uma constante e $p(n) := \sum_{i=0}^{d} a_i n^i$ um polinômio em n de grau d, onde $a_d > 0$. Use as definições de notação assintótica para provar o seguinte.

   (a) Se $k \geq d$ então $p(n) = O(n^k)$.

   (b) Se $k > d$ então $p(n) = o(n^k)$.

9. Prove que

   (a) $\sum_{i=1}^{n} i^k$ é $\Theta(n^{k+1})$

   Solução: Como, para $k \geq 1$, $f(x) = x^k$ é uma função crescente nos reais positivos, temos que

$$\int_0^n x^k dx \leq \sum_{i=1}^{n} i^k \leq \int_1^{n+1} x^k dx,$$

   que implica que

$$\frac{x^{k+1}}{k+1} \Big|_0^n = \frac{n^{k+1}}{k+1} \leq \sum_{i=1}^{n} i^k \leq \frac{x^{k+1}}{k+1} \Big|_1^{n+1} = \frac{(n+1)^{k+1} - 1}{k+1}.$$

   Portanto, $\sum_{i=1}^{n} i^k \geq \frac{n^{k+1}}{k+1} \geq 0$, para todo $n \geq 1$, ou seja, $\sum_{i=1}^{n} i^k = \Omega(n^{k+1})$. Além disso, $\sum_{i=1}^{n} i^k \leq \frac{(n+1)^{k+1}-1}{k+1} \leq \frac{(n+1)^{k+1}}{k+1}$, que implica que $\sum_{i=1}^{n} i^k = O(n^{k+1})$, já que $\frac{(n+1)^{k+1}}{k+1}$ é um polinômio de grau $k+1$ em n (aqui usamos o exercício 1(a) da lista 1). Juntando as duas partes, concluimos que $\sum_{i=1}^{n} i^k = \Theta(n^{k+1})$.

   (b) $\sum_{i=1}^{n} \frac{i}{2^i} \leq 2$

   Solução: A soma acima é a soma de várias PG, cada uma começando de um termo diferente (o segundo termo da PG anterior). Em fórmulas,

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{i}{2^i} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=i}^{n} \frac{1}{2^j} = \sum_{i=1}^{n} 2\left(\frac{1}{2^i} - \frac{1}{2^{n+1}}\right) = 2\left(1 - \frac{1}{2^n}\right) - 2n\frac{1}{2^{n+1}} \leq 2.$$

10. Suponha que $f : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ e $k \in \mathbf{N}$ são tais que $e^{f(n)} = O(n^k)$. Mostre que $f(n) = O(\log n)$.

    Solução: $e^{f(n)} = O(n^k)$ implica que existem constantes $c, n_0 > 0$ tais que $e^{f(n)} \leq cn^k$, para todo $n \geq n_0$. Podemos supor que $n_0 \geq c$. (Caso não seja, tome n_0' assim e use-o no lugar de n_0!) Tomando-se o logaritmo de ambos os lado, temos que, para todo $n \geq n_0$, $f(n) = \ln(e^{f(n)}) \leq \ln(cn^k) = \ln c + k \ln n \leq \ln n + c \ln n = (c+1)\ln n$. Portanto $f(n) = O(\ln n) = O(\log n)$, pelo item (a) do Exercício 6 e porque $\ln n = (\ln 2) \log n$.

11. Determine quanto valem as expressões

    (a) $1.2 + 2.3 + 3.4 + \cdots + n.(n+1)$.

    (b) $\sum_{i=1}^{n} i^2$.