MAC 338 - Análise de Algoritmos

Departamento de Ciência da Computação

Primeiro semestre de 2005

Lista 9

1. Defina *algoritmo eficiente*. Defina *problema de decisão*. Defina *verificador polinomial para* SIM. Defina *verificador polinomial para* NÃO. Defina as classes P, NP e coNP. Dê um exemplo de um problema em cada uma dessas classes, justificando a sua pertinência à classe.

2. Mostre que SAT está em NP. (Essa é a parte fácil do teorema de Cook.)

3. Uma coleção $\mathcal{C}$ de cláusulas sobre um conjunto X de variáveis booleanas é uma *tautologia* se toda atribuição a X satisfaz $\mathcal{C}$. O problema TAUTOLOGIA consiste em, dado X e $\mathcal{C}$, decidir se $\mathcal{C}$ é ou não uma tautologia. O problema TAUTOLOGIA está em NP? Está em coNP? Justifique suas respostas.

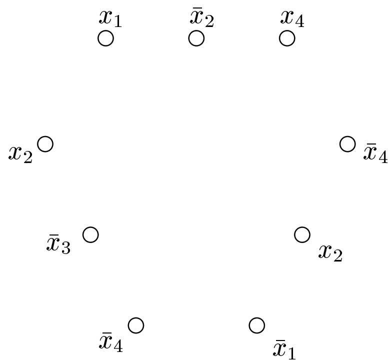
4. O problema 2-SAT consiste na restrição de SAT a instâncias X e $\mathcal{C}$ em que toda cláusula de $\mathcal{C}$ tem exatamente dois literais. Mostre que o 2-SAT está em P, ou seja, descreva um algoritmo polinomial que resolva o 2-SAT.

5. Mostre que 2-COLORAÇÃO está em P.

6. Seja $G = (V, E)$ um grafo. Um conjunto $S \subseteq V$ é um *clique* se existe uma aresta entre quaisquer dois vértices em S. O problema CLIQUE consiste no seguinte: dado um grafo G e um inteiro $k \geq 0$, existe um clique em G com k vértices? Mostre que CLIQUE está em NP.

7. Agora vou ajudar você a construir uma redução do 3-SAT para o CLIQUE. Isso e mais o exercício anterior permitem concluir que CLIQUE é NP-completo. Essa redução aparece em vários livros, mas eu gostaria que você não olhasse a resolução dos livros. Que tentasse fazê-la usando o que segue.

   Para reduzir o 3-SAT para o CLIQUE, lembre-se, você deve considerar uma instância arbitrária do 3-SAT, digamos, X e $\mathcal{C}$, e construir, a partir dela, uma instância do CLIQUE, ou seja, um grafo G e um k. Esses dois últimos devem ser tais que $\mathcal{C}$ é satisfatível se e somente se G tem um clique com k vértices. Com fazer isso? Para cada cláusula em $\mathcal{C}$, o grafo G terá três vértices, cada um rotulado por um dos literais da cláusula. Não há arestas entre estes vértices. Assim, por enquanto, o grafo correspondente a instância $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ e $\mathcal{C} = (x_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_4)(x_2 \vee \bar{x}_3 \vee \bar{x_4})(\bar{x}_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_4)$ seria acrescido de mais algumas arestas



   entre as triplas de vértices correspondentes às cláusulas. Denotemos por m o número de cláusulas em $\mathcal{C}$. A sua missão nesse exercício é decidir como ligar os vértices de maneira a obter um grafo que tem um clique com m vértices se e somente se $\mathcal{C}$ é satisfatível. Lembre-se: só vale colocar arestas ligando vértices de "triplas" diferente! (Ou seja, associados a cláusulas diferentes.) Como será um clique de tamanho m se o grafo for obtido assim? Tal clique deve indicar uma atribuição que satisfaça a cláusula... Como devo por as arestas para que só exista um tal clique caso haja uma atribuição que satisfaça todas as cláusulas?

8. Seja $G = (V, E)$ um grafo. Um conjunto $S \subseteq V$ é *independente* se quaisquer dois vértices de S não são adjacentes. Ou seja, não há nenhuma aresta do grafo com as duas pontas em S. O problema IS consiste no seguinte: dado um grafo G e um inteiro $k \geq 0$, existe um conjunto independente em G com k vértices? Mostre que IS é NP-completo.