MAC 338 - Análise de Algoritmos

Departamento de Ciência da Computação

Primeiro semestre de 2005

Lista 3

---

1. Seja $T(n)$ definida pela recorrência

$$\begin{aligned} T(0) &= 1 \\ T(1) &= 1 \\ T(n) &= \max_{0 \le k \le n-1} \{T(k) + T(n-k-1)\} + n \quad \text{para } n = 2, 3, 4, \ldots \end{aligned}$$

   Mostre que $T(n) \ge n^2/2$ para todo $n \ge 0$.

2. Seja n um número positivo arbitrário e $f(x)$ a função

$$f(x) = (x+1)\ln(x+1) + (n-x)\ln(n-x),$$

   definida para $0 \le x \le n-1$. Determine o valor mínimo de $f(x)$ para $0 \le x \le n-1$. (*Sugestão:* Deixe a preguiça de lado, calcule a derivada primeira e a derivada segunda da função e, analisando-as, determine o que o exercício pede.)

3. Seja $M(n)$ definida pela recorrência

$$\begin{aligned} M(0) &= 1 \\ M(1) &= 1 \\ M(n) &= \min_{0 \le k \le n-1} \{M(k) + M(n-k-1)\} + n \quad \text{para } n = 2, 3, 4, \ldots \end{aligned}$$

   Mostre que $M(n) \ge ((n+1)\lg(n+1))/2$ para todo $n \ge 0$. (*Sugestão:* Use o que foi provado no exercício anterior.)

4. Suponha que os elementos do vetor $A[1\,..\,n]$ são distintos dois a dois. Uma *inversão* é um par (i, j) de índices tal que $i < j$ mas $A[i] > A[j]$. Escreva um algoritmo que calcule o número de inversões em $A[1\,..\,n]$ em tempo $O(n \lg n)$. (*Sugestão:* Inspire-se no algoritmo Mergesort.)

5. Qual é o consumo de espaço do QUICKSORT no pior caso?

6. Quando um algoritmo recursivo tem como último comando executado, em algum de seus casos, uma chamada recursiva, tal chamada é denominada *recursão de calda* (*tail recursion*). Um exemplo de recursão de calda acontece no QUICKSORT.

   Toda recursão de calda pode ser substituída por uma repetição. No caso do QUICKSORT, obtemos o seguinte:

```
QUICKSORT (A, p, r)
   enquanto p < r
        q ← PARTICIONE (A, p, r)
        QUICKSORT (A, p, q − 1)
        p ← q + 1
```

   Mostre como essa idéia pode ser usada (de uma maneira mais esperta) para melhorar significativamente o consumo de espaço no pior caso do QUICKSORT.