MAC 5711 - Análise de Algoritmos

Departamento de Ciência da Computação

Primeiro semestre de 2004

Lista 7

Devolução dos exercícios 2, 3 e 8: 15 de junho.

1. **(Exercícios 18.1-2 do CLR)** Mostre que se uma operação **Decrementa** for incluída nas operações de manipulação de um contador binário com k bits,n operações poderiam custar tempo $\Theta(nk)$.

2. **(Exercício 18.1-3 do CLR)** Uma seqüência de n operações é executada em uma estrutura de dados. A i-ésima operação custa i se i é uma potência de 2, e 1 caso contrário. Determine o tempo amortizado por operação.

3. **(Exercício 18.2-1 do CLR)** Uma seqüência de operações sobre uma pilha é executada numa pilha cujo tamanho nunca excede k. Depois de cada k operações, uma cópia da pilha toda é feita para propósito de *back-up*. Mostre que o custo de n operações sobre a pilha, incluindo a operação de cópia para *back-up*, é $O(n)$, atribuindo valores adequados de créditos a cada operação.

4. **(Exercício 18.2-3 do CLR)** Suponha que desejamos não apenas incrementar um contador mas também algumas vezes reinicializá-lo com zero. Mostre como implementar um contador com um vetor binário de maneira que qualquer seqüência de n operações `incrementa1` e `zera_contador` consuma tempo $O(n)$, desde que o contador esteja inicialmente com zero. (**Dica:** Mantenha um apontador para o 1 mais significativo do contador.)

5. **(Exercício 22.4-3 do CLR)** Usando o Lema 22.2 e o Corolário 22.5, dê um argumento simples para mostrar que m operações em conjuntos disjuntos (onde o número total de elementos é n) usando florestas com a heurística da união por *rank* mas sem a heurística da compressão de caminhos consome tempo $O(m \log n)$.

6. Seja $log^* n = \min\{i : \log^{(i)} n \leq 1\}$, onde $\log^{(0)} n = n$ e, para $k > 0$, $\log^{(k)} n = \log \log^{(k-1)} n$. Mostre que $\log(\log^* n) = O(\log^*(\log n))$.

7. **(Exercício 24.1-8 do CLR)** Seja T uma árvore geradora mínima de um grafo G, e seja L uma lista ordenada dos pesos das arestas de T. Mostre que, para qualquer outra árvore geradora mínima T' de G, a lista L é também uma lista ordenada dos pesos das arestas de T'.

8. **(Exercício 24.2-4 do CLR)** Suponha que o peso de cada aresta do grafo é um inteiro no intervalo de 1 a $|V|$. Qual o tempo de execução da implementação mais rápida que você consegue descrever para o algoritmo de Kruskal? E se os pesos estiverem entre 1 e W, para uma constante W?

9. Desenhe um grafo com custos nas arestas que tenha mais de uma árvore geradora mínima. Mostre que, se todos os custos no grafo são distintos, então o grafo contém uma única árvore geradora mínima.