MAC 5711 - Análise de Algoritmos

Departamento de Ciência da Computação

Primeiro semestre de 2004

Lista 1

1. Sejam $n \in \mathbf{Z}$ e $x \in \mathbf{R}$. Prove que
   (a) $\lfloor x \rfloor < n \iff x < n$; $n < \lceil x \rceil \iff n < x$.
   (b) $n \leq \lfloor x \rfloor \iff n \leq x$; $\lceil x \rceil \leq n \iff x \leq n$.
   (c) $\lfloor x \rfloor = n \iff x - 1 < n \leq x \iff n \leq x < n + 1$.
   (d) $\lceil x \rceil = n \iff x \leq n < x + 1 \iff n - 1 < x \leq n$.
   (e) $\lfloor -x \rfloor = -\lceil x \rceil$.

2. Mostre que $\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \leq \lfloor x + y \rfloor$, com igualdade se e somente se (sse) $x + y - 1 < \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor$. Encontre uma fórmula análoga para $\lceil\ \rceil$.

3. Mostre que se $x \in \mathbf{R}$, $m, n \in \mathbf{Z}$ e $n > 0$, então $\left\lfloor \frac{x+m}{n} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{\lfloor x \rfloor + m}{n} \right\rfloor$.

4. Para inteiros n, m, simplifique
   (a) $\left\lfloor \frac{n+m}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n-m+1}{2} \right\rfloor$. (b) $\left\lceil \frac{n+m}{2} \right\rceil + \left\lceil \frac{n-m+1}{2} \right\rceil$.

5. Dê exemplos de funções $f, g : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ estritamente crescentes, tais que nem $f(n) = O(g(n))$ nem $g(n) = O(f(n))$.

6. Prove que, para todas funções $f, g : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$,
   (a) $af(n) + b = O(f(n))$ $\quad (a, b$ constantes).
   (b) $O(f(n)) + O(f(n)) = O(f(n))$.
   (c) $O(O(f(n))) = O(f(n))$.
   (d) $O(f(n))O(g(n)) = O(f(n)g(n))$.
   (e) $O(f(n)g(n)) = f(n)O(g(n))$.

7. Sejam $f(n)$ e $g(n)$ funções assintoticamente positivas. Prove ou desprove cada uma das seguintes conjecturas.
   (a) $f(n) = O(g(n))$ implica que $\log(f(n)) = O(\log(g(n)))$, onde $\log(g(n)) > 0$ e $f(n) \geq 1$ para todo n suficientemente grande.
   (d) $f(n) = O(g(n))$ implica que $2^{f(n)} = O(2^{g(n)})$.

8. Seja k uma constante e $p(n) := \sum_{i=0}^{d} a_i n^i$ um polinômio em n de grau d, onde $a_d > 0$. Use as definições de notação assintótica para provar o seguinte.
   (a) Se $k \geq d$ então $p(n) = O(n^k)$. (b) Se $k > d$ então $p(n) = o(n^k)$.

9. Prove que, para todo $n > 1$,
   (a) $\sum_{i=1}^{n} i^k$ é $\Theta(n^{k+1})$. (b) $\sum_{i=1}^{n} \frac{i}{2^i} \leq 2$. (c) $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} > \frac{13}{24}$.

10. Suponha que $f : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ e $k \in \mathbf{N}$ são tais que $e^{f(n)} = O(n^k)$. Mostre que $f(n) = O(\log n)$.

11. Determine quanto valem as expressões
    (a) $1.2 + 2.3 + 3.4 + \cdots + n.(n+1)$. (b) $\sum_{i=1}^{n} i^2$.