MAC 338 - Análise de Algoritmos

Departamento de Ciência da Computação

Primeiro semestre de 2003

Complexidade computacional

Por que alguns problemas parecem ser (computacionalmente) mais difíceis do que outros? Como podemos medir ou comprovar este diferente e aparentemente intrínseco grau de dificuldade? Quais problemas podem ser resolvidos por um algoritmo? Quais não podem? Por quê? Quais problemas podem ser resolvidos por um algoritmo eficiente? Quais não podem? Por quê?

Em complexidade computacional estamos interessados em questões deste tipo.

1. Problemas e algoritmos

Um *problema abstrato de decisão* consiste de um conjunto I de instâncias e uma função $f : I \to \{0, 1\}$ (ou $\{\text{SIM}, \text{NÃO}\}$).

Exemplo: Problema CIRCUITO HAMILTONIANO.
I - conjunto de todos os grafos.
para todo G em I, $f(G) = 1$ se G tem um circuito hamiltoniano (ou seja, um circuito que passa por todos os vértices) e $f(G) = 0$ caso contrário. O valor de $f(X)$ é a *resposta* do problema para a instância X em I.

Para um problema abstrato ser resolvido, é necessário que as instâncias do mesmo sejam convenientemente codificadas. Um *problema concreto de decisão* é um problema abstrato de decisão em que as instâncias estão codificadas convenientemente em um alfabeto finito Σ. Vamos supor que $\Sigma = \{0, 1\}$, embora para os nossos propósitos qualquer Σ com pelo menos dois elementos sirva. Daqui para frente, assumimos que todos os problemas são concretos.

Nessas notas, um *algoritmo* é um programa escrito em uma linguagem como `C` ou `Pascal`, onde estabelecemos que o custo de uma operação é proporcional ao número de bits dos operandos e o custo de um acesso à memória é proporcional ao número de bits dos operandos. (Isto é polinomialmente equivalente a *máquina de Turing*.)

Um algoritmo *resolve* ou *decide* um problema de decisão (I, f) se, para cada X em I, o algoritmo encontra a resposta para X, isto é, o algoritmo calcula $f(X)$.

Existem problemas para os quais não existe um algoritmo — são os ditos problemas *indecidíveis*. Um exemplo de problema indecidível é o *problema da parada*: dado um programa e um arquivo de entrada para este programa, decidir se tal programa pára ou não quando executado com este arquivo de entrada. Não existe um algoritmo que resolva o problema da parada.

2. A classe P

Um algoritmo resolve (ou decide) um problema de decisão (I, f) *em tempo* $O(T(n))$ se, para cada n em $\mathbf{N}$ e cada X em I com $|X| = n$, o algoritmo encontra a resposta $f(X)$ para X em tempo $O(T(n))$.

Um problema de decisão é *solúvel em tempo polinomial* se existe algum k para o qual existe um algoritmo que resolve o problema em tempo $O(n^k)$. Tais problemas são ditos *tratáveis*.

A *classe de complexidade* P é o conjunto dos problemas de decisão tratáveis, isto é, que são solúveis em tempo polinomial.

3. As classes NP e coNP

Considere o problema CIRCUITO HAMILTONIANO. Se a resposta para uma instância G for SIM, então existe um circuito hamiltoniano C no grafo. Neste caso, dados G e C, é possível verificar em tempo polinomial em $|G|$ se C é de fato um circuito hamiltoniano em G ou não. Ou seja, temos como *certificar* que a resposta SIM está correta. Será que conseguimos também certificar a resposta NÃO? Surpreendentemente, não se conhece nenhum método de certificação para a resposta NÃO no caso do problema CIRCUITO HAMILTONIANO.

A *classe de complexidade* NP consiste dos problemas para os quais a resposta SIM pode ser certificada e verificada em tempo polinomial. Mais precisamente, um problema de decisão está em NP se existe um algoritmo A tal que

(1) para qualquer instâncias X do problema com resposta SIM, existe um Y em Σ^* tal que $A(X, Y)$ devolve SIM;
(2) para qualquer instância X do problema com resposta NÃO, para todo Y em Σ^*, $A(X, Y)$ devolve NÃO;
(3) A consome tempo polinomial em $|X|$.

Y é chamado de *certificado* da instância X.

O *complemento de um problema de decisão* Q é o problema de decisão Q' obtido invertendo-se o SIM e o NÃO do problema Q.

Exemplo: O complemento do problema CIRCUITO HAMILTONIANO é o problema cuja resposta é SIM sempre que o grafo não tem um circuito hamiltoniano. É o problema NÃO-HAMILTONIANO.

A *classe de complexidade* coNP consiste dos problemas de decisão que são complementos de problemas de decisão em NP. Ou seja, problemas para os quais existe um certificado para a resposta NÃO.

O problema CIRCUITO HAMILTONIANO é um exemplo de problema em NP enquanto que o problema NÃO-HAMILTONIANO é um exemplo de problema em coNP. Note ainda que P $\subseteq$ NP $\cap$ coNP.

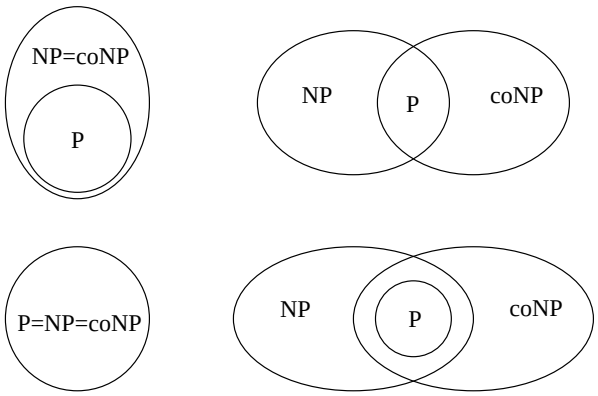


FIGURA 1. Possibilidades de como é a relação de inclusão entre as classes P, NP e coNP.

4. REDUÇÃO DE PROBLEMAS

Um problema de decisão Q é *reduzido em tempo polinomial* a outro problema de decisão Q' se existe um algoritmo A que, dada uma instância X de Q, $A(X)$ é uma instância de Q' tal que

(1) X e $A(X)$ tem a mesma resposta;
(2) A é polinomial em $|X|$.

A definição acima implica que, se soubermos resolver Q' em tempo polinomial, também sabemos resolver Q. O problema Q não é mais difícil do que Q'. Notação: $Q \leq_P Q'$.

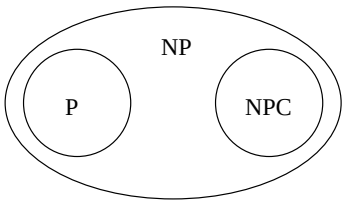
Lema 1. *Se* $Q_1 \leq_p Q_2$ *e* $Q_2 \in P$ *então* $Q_1 \in P$.

Um problema Q é *NP-completo* se

(1) $Q \in$ NP;
(2) $Q' \leq_p Q$ para todo Q' em NP.

Um problema é *NP-difícil* se $Q' \leq_p Q$ para todo Q' em NP.

Conjectura 1. *A figura abaixo está correta, onde NPC denota a classe dos problemas NP-completos.*



Teorema 1. *Se algum problema NP-completo está em P, então P = NP. Se algum problema NP-completo não pode ser resolvido em tempo polinomial, então nenhum problema NP-completo pode ser resolvido em tempo polinomial.*

Existem tantos problemas NP-completos, aparecendo em diferentes áreas e há tanto tempo, que não se acredita que P = NP.

O livro de Garey e Johnson (*Computers and Intractability: a Guide to the Theory of NP-Completeness*, QA810 G229c) é uma referência padrão nesse assunto. Nele você encontra uma lista de problemas NP-completos, com referências sobre as reduções envolvidas, etc.

5. Problema da satisfatibilidade

Seja $X := \{x_1, \ldots, x_n\}$ um conjunto de variáveis booleanas. Uma *atribuição* a X é uma função $t : X \to \{V, F\}$. Para x em X, x e $\bar{x}$ são *literais* sobre X. Um literal $\tilde{x}$ é verdadeiro sob t se $\tilde{x} = x$ para algum x em X e $t(x) = V$ ou $\tilde{x} = \bar{x}$ para algum x em X e $t(x) = F$.

Uma *cláusula* sobre X é um conjunto de literais sobre X. Ela representa a disjunção (ou) dos literais e é *satisfeita* por uma atribuição se e somente se pelo menos um dos literais é verdadeiro sob a atribuição. Uma coleção $\mathcal{C}$ de cláusulas é *satisfatível* se e somente se existe uma atribuição que satisfaça simultaneamente todas as cláusulas de $\mathcal{C}$. Neste caso, dizemos que tal atribuição satisfaz $\mathcal{C}$.

Problema SAT: Dados X e $\mathcal{C}$, decidir se existe uma atribuição a X que satisfaça $\mathcal{C}$.

Cook demonstrou, em 1971, que SAT é NP-completo. A demonstração de que SAT está em NP é trivial. É a segunda parte da demonstração, que consiste da redução de um problema arbitrário em NP a SAT, que é a parte difícil da demonstração. Considere um problema arbitrário em NP. A redução consiste em, para uma instância X do problema Q, construir em tempo polinomial uma coleção de cláusulas $\mathcal{C}$, instância do SAT, que é satisfatível se e somente se a resposta para X é SIM. Grosseiramente falando, considere uma instância X de Q cuja resposta seja SIM. Para tal instância, por definição, existe um certificado Y e um algoritmo A, polinomial, que recebe X e Y como entrada e produz SIM. As cláusulas em $\mathcal{C}$ são derivadas da execução de A para a entrada (X, Y) e verificam se a resposta produzida pela execução é SIM.

Essa foi a primeira demonstração de NP-completude. A partir desta, demonstrou-se que muitos outros problemas são NP-completos. O lema abaixo mostra como isso pode ser feito de uma maneira mais direta.

Lema 2. *Se $Q' \leq_p Q$ para algum Q' em NPC, então Q é NP-difícil. Ademais, se $Q \in$ NP, então $Q \in$ NPC.*

Exercícios

1. Mostre que SAT está em NP. (Essa é a parte fácil do teorema de Cook.)
2. Uma coleção $\mathcal{C}$ de cláusulas sobre um conjunto X de variáveis booleanas é uma *tautologia* se toda atribuição a X satisfaz $\mathcal{C}$. O problema TAUTOLOGIA consiste em, dado X e $\mathcal{C}$, decidir se $\mathcal{C}$ é ou não uma tautologia. O problema TAUTOLOGIA está em NP? Está em coNP? Justifique suas respostas.
3. O problema 3-SAT consiste na restrição de SAT a instâncias X e $\mathcal{C}$ em que toda cláusula de $\mathcal{C}$ tem exatamente três literais. Mostre uma redução polinomial de SAT a 3-SAT.