MAC 338 - Análise de Algoritmos

Departamento de Ciência da Computação

Primeiro semestre de 2001

Lista 1 (Valor: 40 pontos)[1]

Devolução: 21 de março de 2001

1. Sejam $n \in \mathbf{Z}$ e $x \in \mathbf{R}$. Prove que
   (a) $\lfloor x \rfloor < n \iff x < n$; $n < \lceil x \rceil \iff n < x$.
   (b) $n \leq \lfloor x \rfloor \iff n \leq x$; $\lceil x \rceil \leq n \iff x \leq n$.
   (c) $\lfloor x \rfloor = n \iff x - 1 < n \leq x \iff n \leq x < n + 1$.
   (d) $\lceil x \rceil = n \iff x \leq n < x + 1 \iff n - 1 < x \leq n$.
   (e) $\lfloor -x \rfloor = -\lceil x \rceil$.
2. Mostre que $\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \leq \lfloor x + y \rfloor$, com igualdade se e somente se (sse) $x + y - 1 < \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor$. Encontre uma fórmula análoga para $\lceil\ \rceil$.
3. Mostre que se $x \in \mathbf{R}$, $m, n \in \mathbf{Z}$ e $n > 0$, $\left\lfloor \frac{x+m}{n} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{\lfloor x \rfloor + m}{n} \right\rfloor$.
4. (Valor: 5+5 pontos) Para inteiros n, m, simplifique
   (a) $\left\lfloor \frac{n+m}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n-m+1}{2} \right\rfloor$ (b) $\left\lceil \frac{n+m}{2} \right\rceil + \left\lceil \frac{n-m+1}{2} \right\rceil$.
5. Dê exemplos de funções $f, g : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$, estritamente crescentes, tais que nem $f(n) = O(g(n))$ nem $g(n) = O(f(n))$.
6. Prove que, para todas funções $f, g : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$,
   (a) (Valor: 5 pontos) $af(n) + b = O(f(n))$ (a, b constantes).
   (b) (Valor: 5 pontos) $O(f(n)) + O(f(n)) = O(f(n))$.
   (c) $O(O(f(n))) = O(f(n))$.
   (d) $O(f(n))O(g(n)) = O(f(n)g(n))$.
   (e) $O(f(n)g(n)) = f(n)O(g(n))$.
7. (Valor: 5 pontos) Prove que se $p(n)$ é um polinômio de grau k, cujo coeficiente do termo dominante é positivo, então $p(n) = \Theta(n^k)$.
8. (Valor: 5+5 pontos) Prove que
   (a) $\sum_{i=1}^{n} i^k$ é $\Theta(n^{k+1})$ (b) $\sum_{i=1}^{n} \frac{i}{2^i} \leq 2$.
9. (Valor: 5 pontos) Suponha que $f : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ e $k \in \mathbf{N}$ são tais que $e^{f(n)} = O(n^k)$. Mostre que $f(n) = O(\log n)$.

---

[1] Você só precisa entregar as questões que têm valor marcado, mas claro que deve fazer todas ☺