MAC 5727 – Algoritmos de Aproximação

Primeiro Semestre de 2000

Primeira Prova – 28 de abril de 2000

Instruções

- Você deve entregar a sua resolução desta prova na Secretaria do Departamento de Ciência da Computação (sala 256-A) até às 18 horas de hoje ou enviar um arquivo por mail para `cris@ime.usp.br`.
- Não serão tolerados atrasos.
- Você pode usar as suas notas de aula e os diversos textos que constam da bibliografia. **Você não deve discutir as questões da prova com ninguém**, exceto comigo.
- Em caso de dúvida, você pode me consultar preferencialmente por e-mail (`cris@ime.usp.br` ou `cris-mac5727@ime.usp.br`, como você preferir).

1. **(Valor: 1.5 pontos)** Considere o seguinte algoritmo: dado um grafo conexo G, encontre uma árvore DFS (*depth first search*) em G e devolva o conjunto dos vértices internos da árvore. Argumente que este algoritmo produz uma cobertura de vértices de G. Prove que ele é uma 2-aproximação para o Problema da Cobertura de Vértices.

2. **(Valor: 1.5 pontos)** Considere o algoritmo apresentado em classe para o Problema da Cobertura por Conjuntos que usa a técnica de arredondamento. Mostre, usando folgas complementares primais, que escolhendo-se **todos** os conjuntos com valor $x_S > 0$ obtemos também uma k-aproximação (onde k é o número máximo de vezes que um elemento do conjunto universo é coberto pela dada coleção de conjuntos).

3. **(Valor: 2.0 pontos)** Considere o **Problema da Multicobertura de Multiconjuntos** descrito a seguir. Seja $U = \{1, 2, \ldots, n\}$ o conjunto universo. São dados uma coleção $S_1, S_2, \ldots, S_k$ de multiconjuntos de U (um multiconjunto contém um número especificado de cópias de cada elemento) e um custo c_j para cada multiconjunto S_j. Além disso, para cada elemento i, é dado um número natural r_i especificando a cobertura mínima exigida deste elemento. Encontrar uma coleção de custo mínimo dos multiconjuntos dados que cubra cada elemento i pelo menos r_i vezes. Note que um multiconjunto pode ser escolhido várias vezes.

   Dê uma H_n-aproximação para o Problema da Multicobertura de Multiconjuntos. Descreva o algoritmo e argumente que ele produz de fato uma coleção dos multiconjuntos dados que cubre cada elemento i pelo menos r_i vezes. Prove que o seu algoritmo é de fato uma H_n-aproximação para o problema.

4. **(Valor: 2.0 pontos)** Considere o **Problema da Conexão Ponto a Ponto**: dado um grafo $G = (V, E)$, custos c_e para cada aresta e em E e dois conjuntos disjuntos de vértices, S e T, de mesma cardinalidade, encontrar um subgrafo de G de custo mínimo que tem um caminho conectando cada vértice de S a um único vértice de T.

   Defina $f(W)$ para todo $W \subseteq V$ de forma que o IP abaixo seja uma formulação do Problema da Conexão Ponto a Ponto.

$$\begin{array}{llcll} & min \displaystyle\sum_{e=1}^{m} c_e x_e & & & \\ \text{sujeito a} & \displaystyle\sum_{e \in \delta(W)} x_e & \geq & f(W) & \text{para todo } W \subseteq V \\ & x_e & \in & \{0,1\} & \end{array}$$

   Escreve a relaxação LP do IP acima, o dual desta e um algoritmo baseado no método primal-dual que seja uma 2-aproximação para o problema. Demonstre que de fato o seu algoritmo é uma 2-aproximação para o Problema da Conexão Ponto a Ponto.

5. **(Valor: 1.5 pontos)** Escreva a prova de que o algoritmo de Even, Naor, Rao e Schieber para o Problema do Corte 1/3-Balanceado, apresentado em aula, devolve um conjunto cujo custo é no máximo $(24 \log 2n) opt\ (1/2)$, onde n é o número de vértices do grafo G dado e $opt\ (1/2)$ é o custo do corte 1/2-balanceado de custo mínimo em G.

6. **(Valor: 1.5 pontos)** Simule o algoritmo apresentado em aula para o Problema da Árvore de Steiner (método primal-dual) para o seguinte grafo e a coleção composta de dois conjuntos de vértices: $S_1 = \{u, w, z\}$ e $S_2 = \{r, y\}$. O número ao lado de cada aresta é o custo da aresta. Mostre o valor das variáveis duais e do conjunto solução ao fim de cada iteração do algoritmo, bem como no final da execução do algoritmo.