MAC 5727 - Algoritmos de Aproximação

Departamento de Ciência da Computação

Primeiro semestre de 2000

Lista 5

Devolução: 23 de junho de 2000

1. Considere a função objetivo de uma das formulações do MAX2SAT vistas em aula:

$$\max \sum_k v(C_k) w_k,$$

onde $v(\tilde{x_i}) = \frac{1 \pm y_0 y_i}{2}$ (o sinal depende de $\tilde{x_i}$ ser x_i ou $\bar{x_i}$) e $v(C_k) = 1 - v(\bar{\tilde{x_i}})v(\bar{\tilde{x_j}})$, para $C_k = (\tilde{x_i} \vee \tilde{x_j})$.

A relaxação considerada em aula substituia cada y_t por $\vec{v_t} \in R^n$ com $||\vec{v_t}|| = 1$. Denote a solução ótima da relaxação por $\vec{v_0}^*, \vec{v_1}^*, \ldots, \vec{v_n}^*$. A saída do algoritmo é a atribuição para as variáveis obtidas de $\vec{v_0}^*, \vec{v_1}^*, \ldots, \vec{v_n}^*$ conforme o método probabilístico descrito em aula.

Para demonstrar que o algoritmo probabilístico obtido é uma 0.87856-aproximação, basta mostrar que, para toda cláusula C_k,

$$Pr[C_k \text{ é satisfeita na solução do algoritmo}] \geq 0.87856 \cdot v(C_k). \quad (1)$$

   (a) Mostre que (1) implica que o algoritmo é uma 0.87856-aproximação (considernado que a relaxação pode ser resolvida exatamente). Ou seja, mostre que (1) implica que $E[W] \geq 0.87856 \; opt$.

   (b) Mostre (1). [Dica: note que, para $0 \leq x, y, w, z, L \leq 1$, se $\frac{1-x}{1-z} \geq L$ e $\frac{1-y}{1-w} \geq L$ então $\frac{1-xy}{1-zw} \geq L$.]

2. Considere a seguinte relaxação de uma formulação do MAXSAT.

$$\begin{array}{llr}
\max & \sum_k w_k z_k & \\
\sum_{i \in I_k^+} v(x_i) + \sum_{i \in I_k^-} v(\bar{x_i}) \geq z_k & \forall C_k \in \mathcal{C} & \\
v(C_k) \geq z_k & \forall C_k \in \mathcal{C}, |C_k| = 2 & (2)\\
||\vec{v_i}|| = 1 & \forall i,\ 0 \leq i \leq n,\ \vec{v_i} \in R^+ & \\
0 \leq z_k \leq 1 & \forall C_k, &
\end{array}$$

onde $v(x_i) = \left(\frac{1+y_0 y_i}{2}\right)$ e $v(\bar{x_i}) = \left(\frac{1-y_0 y_i}{2}\right)$ e, para $C_k = (\tilde{x_i} \vee \tilde{x_j})$, $v(C_k) = 1 - v(\bar{\tilde{x_i}})v(\bar{\tilde{x_j}})$.

Seja $\vec{v_0}^*, \vec{v_1}^*, \ldots, \vec{v_n}^*, z_1^*, \ldots, z_m^*$ uma solução ótima de (2). Considere o algoritmo obtido usando-se essa solução ótima da seguinte forma.

para cada i de 1 a n

$$\text{faça } x_i = \begin{cases} T & \text{com probabilidade } v(x_i) \\ F & \text{com probabilidade } v(\bar{x_i}) \end{cases}$$

Mostre que a razão de aproximação deste algoritmo é $1 - \frac{1}{e}$.