Exame Preliminar para o Doutorado

IME–USP, Agosto, 1999

Prova de Análise de Algoritmos

Instruções:

(i) O candidato pode resolver todas as questões.

(ii) A banca considerará questões cujos valores somem até 10 pontos de modo que a soma total das notas obtidas seja máxima.

(iii) Mencione os teoremas e propriedades usados para justificar suas afirmações.

Questão 1 [1 ponto]
Um algoritmo age sobre dados que dependem de um parâmetro n. Explique o significado das seguintes expressões:

(a) "O consumo de tempo do algoritmo é $O(n^2 \log n)$."
(b) "O consumo de tempo do algoritmo é $\Omega(n^2)$."

Questão 2 [1 ponto]
Qual o cuidado na implementação do *quicksort* que garante que o espaço usado além do vetor a ser ordenado seja logarítmico no tamanho da entrada? Justifique a sua resposta.

Questão 3 [1 ponto]

(a) Defina "*heap*" (ou árvore hierárquica) e explique como representar um heap linearmente;
(b) Organize a seqüência abaixo como um heap, apresentando-a como árvore e como vetor.

10 5 8 4 9 6 3 7 1 2

Questão 4 [1 ponto]
Descreva uma estrutura de dados para armazenar uma coleção de registros permitindo as seguintes operações **em tempo constante**:

(a) Criar uma coleção vazia de registros;
(b) Incluir uma ocorrência de um registro na coleção, retornando um descritor de sua localização (por exemplo, um apontador).
(c) Excluir uma ocorrência de um registro, dado um descritor conforme em (b).

Questão 5 [2 pontos]
Suponha dado um vetor de n elementos onde cada elemento assume um entre dois valores distintos. Prove que $n-1$ comparações são **necessárias e suficientes** para ordenar tal vetor.

Questão 6 [2 pontos]
Considere o seguinte algoritmo recursivo, cujo argumento n é um inteiro positivo.

Asterisco(n)
{
  se $n > 0$ então
    Asterisco($n-1$)
    para $i \leftarrow 1$ *até* n
      imprima "$*$"
    Asterisco($n-1$)
}

Para um dado valor de n, quantos asteriscos serão impressos em uma chamada de Asterisco(n)? Justifique a sua resposta mostrando os cálculos que fez para chegar a ela.

Questão 7 [3 pontos]
Sejam $v_1, \ldots, v_n$, $p_1, \ldots, p_n$ e P números naturais.

Problema (da mochila): Encontrar números reais $x_1, \ldots, x_n$ tais que $0 \leq x_i \leq 1$ para todo i,

$$p_1 x_1 + \ldots + p_n x_n \leq P$$

e $v_1 x_1 + \ldots + v_n x_n$ é máximo.

(a) Escreva um algoritmo o mais eficiente possível que resolva o problema acima.
(b) Prove que o seu algoritmo está correto.
(c) Descreva uma implementação para o seu algoritmo e faça uma análise do tempo de execução de tal implementação (usando notação O).

Questão 8 [3 pontos]
Dado um grafo G, chamamos de *emparelhamento de G* um conjunto M de arestas de G tal que quaisquer duas arestas em M não têm nenhuma ponta em comum. Chamamos de *cobertura de G* um conjunto C de vértices de G tal que toda aresta de G tem pelo menos uma ponta em C.

Considere o seguinte teorema.

Teorema. Seja G um grafo bipartido. Se C é uma cobertura de G de tamanho mínimo e M é um emparelhamento de G de tamanho máximo então $|C| = |M|$.

Prove que os seguintes problemas estão em NP.

(a) Dado um grafo bipartido G e um conjunto C de vértices de G, determinar se C é uma cobertura de G de tamanho mínimo.
(b) Dado um grafo bipartido G e um conjunto C de vértices de G, determinar se C **não** é uma cobertura de G de tamanho mínimo.

BOA SORTE!