MAC5811 Projeto e Análise de Algoritmos

DCC–IME–USP, 4 de março de 2005

Instruções

(i) Esta prova contém oito questões sendo seis de dois pontos e duas de três pontos.

(ii) A banca considerará questões cujos valores somem até 10 pontos de modo que a soma total das notas obtidas seja máxima. Um aluno, para ser aprovado, precisa obter nessas questões pelo menos 7 pontos.

(iii) Mencione os teoremas e propriedades usados para justificar suas afirmações.

(iv) Você pode utilizar como subrotina qualquer algoritmo do CLRS sem reescrevê-lo, como, por exemplo, algoritmos para ordenação. No entanto, você deve descrever clara e sucintamente o que o algoritmo recebe, devolve ou faz e o seu consumo de tempo. Exemplo

> "*O algoritmo* BLÁ-BLÁ-BLÁ *usa como subrotina o algoritmo* ORDENAÇÃO-LERDA (A, n) *que recebe e rearranja um vetor* $A[1 \,..\, n]$ *de modo que ele fique em ordem crescente. O consumo de tempo do algoritmo* ORDENAÇÃO-LERDA *é* $\mathrm{O}(n^n)$."

(v) Não é permitida a consulta a livros, anotações, colegas, calculadoras, Internet, computadores ...

Duração da prova: 5 horas

Questão 1 [2 pontos]
Sejam $T(n)$ e $f(n)$ funções dos inteiros no reais.

a) O que significa "$T(n)$ é $\mathrm{O}(f(n))$"?

b) É verdade que $20n^3 + 10n \lg n + 5$ é $\mathrm{O}(n^3)$? Justifique.

c) É verdade que $\frac{1}{2}n^2$ é $\mathrm{O}(n)$? Justifique.

d) O que significa "$T(n)$ é $\Omega(f(n))$"?

e) O que significa "$T(n) = n + \Omega(n \lg n)$"?

Questão 2 [2 pontos]
Considere o seguinte algoritmo que recebe um vetor de números inteiros $A[1\,..\,n]$ e um número inteiro positivo k e devolve um vetor $B[1\,..\,k]$ com os k maiores elementos de A.

```
MAIORES (A, n, k)
BUILD-MAX-HEAP(A, n)    ▷ transforma A em um max-heap
para i ← 1 até k faça
    B[i] ← HEAP-MAXIMUM(A)    ▷ devolve um maior elemento de A
    HEAP-EXTRACT-MAX(A, n)    ▷ remove um maior elemento de A
devolva B
```

a) Qual o consumo de tempo do algoritmo MAIORES? Justifique a sua resposta.

b) Para quais valores de k o consumo de tempo do algoritmo MAIORES é $\mathrm{O}(n)$? Expresse a sua resposta em função de n e justifique-a.

Questão 3 [2 pontos]
Considere o seguinte algoritmo que tem como argumentos dois números inteiros n e r, $n \geq 0$ e $r \geq 0$, e usa como subrotina um algoritmo CAIXA-PRETA.

```
ALGO (n, r)
se n = 0
    então CAIXA-PRETA(n, r)
            devolva 1
k ← r × ALGO(n − 1, r)
para i ← 1 até k faça
    CAIXA-PRETA(n, i)
devolva k
```

Qual o número de vezes que o algoritmo CAIXA-PRETA é chamado pelo algoritmo ALGO? Expresse esse número como função de n e r e justifique a sua resposta.

Questão 4 [2 pontos]
Suponha dado um conjunto de livros numerados de 1 a n. Suponha que o livro i tem peso $p[i]$ e que $0 < p[i] < 1$ para cada i. Considere o problema de acondicionar os livros no menor número possível de envelopes de modo que cada envelope tenha no máximo 2 livros e o peso do conteúdo de cada envelope seja no máximo 1. Escreva um algoritmo guloso MIN-ENV(p, n) que recebe um vetor $p[1\,..\,n]$ e devolve o número mínimo de envelopes. O consumo de tempo do seu algoritmo

deve ser $O(n^2)$. Argumente porque seu algoritmo produz a resposta correta e tem o consumo de tempo pedido.

Questão 5 [2 pontos]
Dizemos que um vetor $Z[1\,..\,m+n]$ é um **embaralhamento** dos vetores $X[1\,..\,m]$ e $Y[1\,..\,n]$ se Z pode ser formado pela intercalação dos elementos de X e de Y de forma que a ordem em que os elementos aparecem em X e em Y é mantida. Cada elemento de $X[1\,..\,m]$ e de $Y[1\,..\,n]$ deve aparecer em $Z[1\,..\,m+n]$.

Exemplos:

a) $Z =$ `aALnáGlOiRITsMeOS` é um embaralhamento de $X =$ `análise` e $Y =$ `ALGORITMOS`.

b) $Z =$ `aALniGlOáRITsMeOS` **não** é um embaralhamento de $X =$ `análise` e $Y =$ `ALGORITMOS`.

Escreva um algoritmo EMBARALHAMENTO(Z, X, m, Y, n) que recebe os vetores $Z[1\,..\,m+n]$, $X[1\,..\,m]$ e $Y[1\,..\,n]$ e devolve 1 se Z é um embaralhamento de X e Y e devolve 0 em caso contrário. O consumo de tempo do seu algoritmo deve ser $O(mn)$. Argumente porque seu algoritmo produz a resposta correta e tem o consumo de tempo pedido.

Questão 6 [2 pontos]
Responda cada um dos itens abaixo e dê uma justificativa curta para a sua resposta.

a) O que significa dizer que um problema Π pode ser polinomialmente reduzido a um problema Π'?

b) Defina as classes P e NP e problema NP-completo.

c) Se um problema Π pode ser polinomialmente reduzido a um problema Π' e Π' está em P então Π está em P?

d) Se um problema Π pode ser polinomialmente reduzido a um problema Π' e Π' é NP-completo então Π é NP-completo?

e) Há problemas em NP que não são NP-completos?

f) $\mathrm{P} \cap \mathrm{NP} \neq \emptyset$?

g) Existem problemas NP-completos em P?

Questão 7 [3 pontos]
Considere a estrutura de dados *disjoint-set forest* **com** os melhoramentos *union by rank* e *path-compression*.

a) Escreva os algoritmos MAKESET, UNION e FINDSET.

b) Considere uma seqüência de operações MAKESET, UNION e FINDSET em que n são MAKESET e em que as **últimas** m operações são FINDSET. Na ilustração de seqüência a seguir M, U e F representam as operações MAKESET, UNION e FINDSET, respectivamente.

$$\underbrace{\mathrm{M\ \ M\ \ U\ \ F\ \ M\ \ \ldots\ \ M\ \ U\ \ M\ \ F\ \ U}}_{n \text{ destes são M's}}\ \ \underbrace{\mathrm{F\ \ F\ \ F\ \ \ldots\ \ F\ \ F\ \ F}}_{m}$$

Qual o consumo de tempo da subseqüência formada pelas **últimas** m **operações** FINDSET? Justifique a sua resposta.

Questão 8 [3 pontos]
Uma **mediana** de um conjunto S de m números inteiros é um número x em S que é maior ou igual a $\lfloor m/2 \rfloor$ dos elementos em S e é menor ou igual a $\lfloor m/2 \rfloor$ dos elementos em S.

Sejam $A[1\,..\,n]$ um vetor de números inteiros e k um número inteiro positivo, $k \leq n$.
Um vetor $B[1\,..\,n-k+1]$ é um vetor das **medianas dos k-segmentos** de A se $B[i]$ é uma mediana de $A[i\,..\,i+k-1]$.

a) Escreva um algoritmo MEDIANAS-1(A, n, k) que recebe um vetor de números inteiros $A[1\,..\,n]$ e um número inteiro positivo k e devolve um vetor $B[1\,..\,n-k+1]$ das medianas dos k-segmentos de A. Seu algoritmo deve consumir tempo $\mathrm{O}(nk)$. Explique sucintamente porque seu algoritmo está correto e tem o consumo de tempo pedido.

b) Escreva um algoritmo MEDIANAS-2(A, n, k) que recebe um vetor de números inteiros $A[1\,..\,n]$ e um número inteiro positivo k e devolve um vetor $B[1\,..\,n-k+1]$ das medianas dos k-segmentos de A. Seu algoritmo deve consumir tempo $\mathrm{O}(n \lg k)$. Explique sucintamente porque seu algoritmo está correto e tem o consumo de tempo pedido. O seu algoritmo pode utilizar como subrotinas algoritmos para a manipulação de árvores balanceadas de busca:

TREE-BUILD (T, A, p, r): contrói uma árvore balanceada de busca T com os elementos de um vetor $A[p\,..\,r]$ de números inteiros;

TREE-SEARCH (T, x): devolve VERDADEIRO se x é um elemento da árvore T e em caso contrário devolve FALSO;

TREE-INSERT (T, x): insere o número inteiro x na árvore T;

TREE-DELETE (T, x): remove o número inteiro x da árvore T;

TREE-MINIMUM (T): devolve o menor número inteiro da árvore T;

TREE-MAXIMUM (T): devolve o maior número inteiro da árvore T.