Uma Função Limiar Severa para Grafos Aleatórios com a propriedade de Ramsey

Rudini Sampaio

MAC 5701 – Tópicos em Ciência da Computação

Relatório de estudos

Área de Concentração: Combinatória Extremal

Orientador: Yoshiharu Kohayakawa

IME / USP – São Paulo, 23 de Junho de 2003

1. Resumo

Seja *G(n,p)* um grafo aleatório com n vértices e probabilidade p nas arestas. Dizemos que uma propriedade de grafos Q é crescente se a adição de arestas a um grafo com a propriedade Q mantém a propriedade.

Em 1987, Bollobás e Thomason provaram a existência de funções limiares para todas as propriedades crescentes de grafos, ou seja, existe $q=q(n)$ para toda propriedade crescente Q tal que *G(n,p)* pertence a Q com probabilidade 0 se $p=o(q)$ e com probabilidade 1 se $q=o(p)$. No entanto, algumas propriedades crescentes de grafos não possuem limites mais precisos, ou seja, para $p=\Theta(q)$, *G(n,p)* pertence a Q com probabilidade maior que 0 e menor que 1.

Dizemos então que uma propriedade crescente Q de grafos admite uma função limiar severa se existe $q=q(n)$ tal que, para todo $c>0$, *G(n,p)* pertence a Q com probabilidade 0 se $p<(1-c)q$ e com probabilidade 1 se $p>(1+c)q$.

Funções limiares severas foram obtidas para várias propriedades crescentes de grafos aleatórios, tais como conectividade e hamiltonicidade. Desta forma, esse documento vem apresentar o resultado obtido em um artigo de 2003, por Friedgut, Rodl, Rucinski e Tetali, a saber, a existência de uma função limiar severa para a propriedade de Ramsey, ou seja, para a propriedade de que, para toda 2-coloração das arestas do grafo, ocorre um triângulo monocromático.

A importância das propriedades de Ramsey vem do fato delas garantirem que, para uma partição arbitrária de uma estrutura, uma subestrutura altamente organizada pode ser encontrada em pelo menos uma das partições. Nesse documento, pretende-se apresentar a essência da prova, mostrando como se atacam as principais dificuldades técnicas.

Palavras chaves: teoria de Ramsey, grafos aleatórios, funções limiares, severidade, coloração, lema da regularidade.

Sumário

2. Terminologia

Para facilitar a comparação desse documento com o artigo, preferiu-se manter a numeração dos teoremas conforme o artigo, mesmo que alguns deles não sejam enunciados nesse documento.

Um grafo $G=(V,E)$ é uma dupla ordenada de conjuntos V e E, onde V é o conjunto de *vértices* e E é um conjunto de pares não ordenados de V, chamados de *arestas*. Denominaremos por $V(G)$ e $E(G)$, respectivamente, o conjunto de vértices e o conjunto de arestas de G.

Um grafo $G=(V,E)$ é bipartido se V pode ser particionado em dois conjuntos não vazios e sem intersecção V_1 e V_2, tais que não existem arestas entre vértices do mesmo subconjunto V_1 ou V_2.

Um grafo $G=(V,E)$ é completo se $\forall x,y \in V$, $(x,y) \in E$. Designamos um grafo completo com n vértices por $\mathbf{K}_n$.

Dizemos que uma propriedade de grafos é crescente se a adição de arestas mantém a propriedade. Por exemplo, a propriedade do grafo ser conexo é crescente, mas a propriedade de ser colorível por k cores, não.

Dizemos que um grafo tem a propriedade $\mathcal{R}$ de *Ramsey* se toda 2-coloração das arestas do grafo obtém um triângulo monocromático. Por exemplo, o grafo completo $\mathbf{K_6}$. Chamaremos as cores das 2-colorações nas arestas por azul e vermelha.

Dizemos que $G(n,p)$ é um *grafo aleatório* com n vértices e probabilidade p nas arestas. Consideraremos quase sempre n muito grande ($n \to \infty$).

Dizemos que $q=q(n)$ é uma *função limiar* de uma propriedade crescente Q se e somente se:

- $\Pr[G(n,p) \in \mathrm{Q}] = 0$ se $p=o(q)$;
- $\Pr[G(n,p) \in \mathrm{Q}] = 1$ se $q=o(p)$.

Pela definição de função limiar, existe uma lacuna para valores de $p=\Theta(q)$. Dizemos então que uma propriedade crescente Q admite uma função limiar severa se existe uma função $q=q(n)$ tal que, $\forall c>0$:

- $\Pr[G(n,p) \in \mathrm{Q}] = 0$ se $p<(1-c)q$;
- $\Pr[G(n,p) \in \mathrm{Q}] = 1$ se $p>(1+c)q$.

Se Q não possui um limiar severo, dizemos que Q possui um limiar *grosseiro*.

3. Introdução

A importância das propriedades de Ramsey vem do fato delas garantirem que, para uma partição arbitrária de uma estrutura, uma subestrutura altamente organizada pode ser encontrada em pelo menos uma das partições.

Em 1987, Bollobás e Thomason provaram que todas as propriedades crescentes de grafos possuem funções limiares. Desde então foram obtidas funções limiares para várias propriedades crescentes de grafos, inclusive para as propriedades de Ramsey.

Além disso, vários resultados sobre limiares severos foram obtidos. Alguns obtinham limiares severos para propriedades crescentes de grafos, e outros provavam que determinadas propriedades não possuíam limiares severos. Em 1994, Rödl e Rucínski provaram o teorema abaixo:

Teorema 1.2: Existem constantes c_2 e C_2 tal que:

- $\Pr[G(n,p) \in \mathcal{R}] = 0$ se $p < c_2/\sqrt{n}$;
- $\Pr[G(n,p) \in \mathcal{R}] = 1$ se $p > C_2/\sqrt{n}$.

A questão sobre se a propriedade de Ramsey possui ou não um limiar severo permaneceu em aberto e sem grandes avanços até 1999, quando uma técnica geral para lidar com esses problemas foi proposta por Friedgut. Grosso modo, foi provado que a questão da severidade em grafos aleatórios depende se a propriedade é um fenômeno local ou global.

Por exemplo, a conectividade é um fenômeno global e, por isso, contém limiar severo. Por outro lado, a continência de subgrafos pequenos é um fenômeno local, e assim, não contém limiar severo.

A propriedade $\mathcal{R}$ de Ramsey é certamente influenciada pela aparência de um $\mathbf{K_6}$, que é, entretanto, improvável de aparecer em $G(n,p)$ com $p = \Theta(1/\sqrt{n})$.

Para estabelecer a severidade do limiar de $\mathcal{R}$, a idéia é mostrar que $\mathcal{R}$ não é influenciado pela aparência de um subgrafo fixo M qualquer provável de estar contido em $G(n,p)$ com $p=\Theta(1/\sqrt{n})$.

A seguir, enunciamos o teorema de Friedgut. Para isso, definimos M^* como sendo uma cópia ordenada de um grafo M colocada uniformemente e de forma aleatória sobre um conjunto disjunto de n vértices.

Teorema 1.3: Seja Q uma propriedade crescente de limiar grosseiro. Então existem constantes reais $0<c<C$, $\beta>0$, um racional ρ, e uma seqüência $p=p(n)$ satisfazendo $cn^{-1/\rho} < p(n) < Cn^{-1/\rho}$, tal que $\beta<\Pr[G(n,p) \in Q] < 1-\beta$, $\forall n$. Além disso, existem α, $\xi>0$ e um grafo balanceado M com densidade ρ, onde para toda propriedade $\mathcal{G}$ tal que $G(n,p) \in \mathcal{G}$, existem infinitamente muitos valores de n para os quais existe um grafo G com n vértices, onde:

(i) $G \in \mathcal{G}$

(ii) $G \notin Q$

(iii) $\Pr[(G \cup M^*) \in Q] > 2\alpha$

(iv) $\Pr[(G \cup G(n, \xi p)) \in Q] < \alpha$

Em outras palavras, M^* induz a propriedade localmente, enquanto que a adição de arestas aleatoriamente por uma proporção constante ξ (fenômeno global) não induz a propriedade. No caso da propriedade $\mathcal{R}$ de Ramsey, pelo Teorema 1.2, $\rho = 2$.

Assim, a técnica geral para provar a severidade de funções limiares de determinadas propriedades crescentes, é provar por contradição usando o Teorema 1.3. Ou seja, se a propriedade tem um limite grosseiro, o teorema garante a existência de M.

No entanto, para o resultado do Teorema 1.3 fazer sentido é necessário inicialmente garantir que M não possui a propriedade Q. Depois, escolhendo uma propriedade $\mathcal{G}$ apropriada típica de $G(n,p)$, mostrar que um grafo $G \in \mathcal{G}$ com $\Pr[(G \cup M^*) \in Q] > 2\alpha$ é muito "*saturado*", ou seja, vale (iii), mas não vale (iv).

A propriedade $\mathcal{G}$ relevante para o nosso caso já é dada de antemão no artigo, e está definida na seção 8 deste documento.

4. Limiar severo para a propriedade Ramsey

O Teorema 2.1 enunciado abaixo é uma adaptação mais forte do Teorema 1.3 para a propriedade de Ramsey. O objetivo do artigo então á a prova do seguinte teorema.

Teorema 2.1: $\forall\alpha, \xi>0$, $\forall p=p(n)$ tal que $c_2/\sqrt{n} < p < C_2/\sqrt{n}$ e $\forall$M balanceado com ρ(M)=2, existe uma propriedade $\mathcal{G}$ de grafos com $lim_{n\to\infty}$ Pr[$G(n,p) \in \mathcal{G}$] = 1, e um inteiro n_1, tais que $\forall$ $G \in \mathcal{G} \setminus \mathcal{R}$ com $|V(G)|=n>n_1$, se

(3) $\Pr[(G \cup M^*) \in \mathcal{R}] > 2\alpha$, então

(4) $\Pr[(G \cup G(n, \xi p)) \in \mathcal{R}] = 1\text{-}o(1)$

A família $\mathcal{G}$ é definida cuidadosamente na última seção desse documento, onde também é mostrado que $lim_{n\to\infty}$ Pr[$G(n,p) \in \mathcal{G}$] = 1, com p da ordem citada no teorema acima. Como citado anteriormente, o primeiro passo é garantir que M não tem a propriedade de Ramsey.

Lema 2.2: Se M é balanceado e ρ(M)=2 então M $\notin \mathcal{R}$

Prova: É um fato bem conhecido que $\forall$H balanceado com ρ(H)=ρ e $p=\Theta(n^{-1/\rho})$, $\exists\beta$ tal que Pr[H $\in G(n,p)$]> β. Logo, $\forall b>0$, Pr[M $\in G(n,b/\sqrt{n})$]>0. Se M $\in \mathcal{R}$, então Pr[$G(n,b/\sqrt{n})$ $\in \mathcal{R}$]>0. Tomando $b<c_2$, obtemos uma contradição do teorema 1.2.

Definição: Uma *coloração própria* é uma coloração de arestas que não produz um triângulo monocromático. Por exemplo, grafos com a propriedade de Ramsey não têm colorações próprias.

Definição: Seja $Base$(F) = $\{uv$: uw, $wv \in$ F para $w \in$ V(G)$\}$, onde F $\subseteq$ E(G), para um dado grafo G. Sejam $Blue(G)$ e $Red(G)$ os conjuntos das arestas de um grafo G 2-colorido com as cores azul e vermelha, respectivamente.

Uma das questões principais é como saber se $G_1 \cup G_2 \in \mathcal{R}$, onde $G_1 = G(n,b_1/\sqrt{n}\ )$ e $G_2 = G(n,b_2/\sqrt{n}\ )$. Considere então, sem perda de generalidade, que $|Blue(G_1)| \geq |Red(G_1)|$, em G_1 2-colorido. Se $Base(Blue(G_1))$ contém um triângulo Δ, nenhuma coloração própria de $G_1 \cup \Delta$ pode ser estendida da original. Logo, bastaria mostrar que $Base(Blue(G_1)) \cap G_2$ contém um triângulo. A definição a seguir e o próximo lema auxiliam nessa questão.

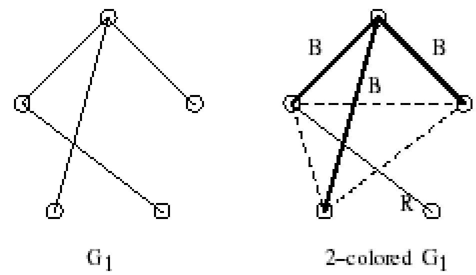

Figura 1: Exemplo dos conjuntos Base, Blue e Red

Definição: G têm a propriedade $T(\lambda,a)$ se $\forall F\subseteq E(G)$, onde $|F| \geq \lambda\ |E(G)|$, $Base(F)$ contém pelo menos $a|V(G)|^3$ triângulos, onde $0<\lambda<1$ e $0<a<1/6$.
Lema 2.3: $\forall\ \lambda$, $c>0$, existe $a>0$ tal que se $p \geq c/\sqrt{n}$ então $G(n,p)$ tem a propriedade $T(\lambda,a)$ com probabilidade $1-o(1)$.

A prova do Lema 2.3 é dada no final artigo, a qual é dado tratamento de menor importância, pela sua pouca afinidade com os assuntos abordados.

Aplicando o Lema 2.3 para o exemplo acima, ou seja, $F=Blue(G_1)$, $\lambda=1/2$ e $c=b_1$, obtemos $\Theta(n^3)$ triângulos em $Base(Blue(G_1))$. Pelo menos um desses triângulos estará em G_2 com alta probabilidade. No entanto, nesse caso $b_2= \xi\ b_1$, depende de b_1. Para resolver essa questão, procura-se construir uma família de subgrafos chamada CORE.

Os dois lemas a seguir (2.4 e 2.5) provam o Teorema 2.1, que é o principal resultado do artigo. No entanto, o maior esforço do artigo é a prova do Lema 2.4 abaixo.
Lema 2.4: Seja $G \in \mathcal{G} \setminus \mathcal{R}$ um grafo com $|V(G)| = n\geq n_1$, onde $\Pr[(G\cup M^*)\in \mathcal{R}]>2\alpha$. Logo, $\forall\tau>0$, existe uma família CORE de subgrafos de G tal que:

(a) Para toda coloração própria de $E(G)$, existe $K \in$ CORE monocromático.
(b) $|\text{CORE}| \leq exp(\tau\ n^{3/2})$,
(c) $\forall K \in$CORE, $|K| > \lambda\ |E(G)|$

Lema 2.5: $\forall K \in$CORE, a probabilidade de $K\cup G(n, \xi p)$ possuir uma coloração própria na qual K é monocromático é no máximo $exp\{-2\ \tau_0\ n^{3/2}\}$, onde $\tau_0=a^2 x^6 c_2^6/(2ax^3 c_2^3+4x^5 C_2^5)$.

Prova: Pelo Lema 2.4(c) e o fato de $G\in T(\lambda,a)$, existem pelo menos an^3 triângulos em $Base(K)$. Enumeremos alguns desses an^3 triângulos por 1, 2, ..., an^3 e seja I_i uma variável aleatória indicadora para o evento do i-ésimo triângulo estar contido em $G(n, \xi p)$. Temos então que $\sum_i I_i=0$. Pela desigualdade de Janson:

$$\Pr[\textstyle\sum_i I_i = 0] \leq exp\{\ (\sum_i EI_i)^2 / (\sum_i\sum_j E(I_i I_j) + \sum_i EI_i)\ \}$$

Temos que $\sum_i EI_i = an^3(\xi p)^3 \geq a\xi^3 c_2^3 n^{3/2}$ e que o somatório duplo contém no máximo n^4 fatores cada um limitado por $(\xi p)^5 \leq (\xi C_2)^5 n^{-5/2}$. Com esses valores na equação acima, temos o resultado do lema.

A seguir fornecemos uma prova do Teorema 2.1 a partir dos Lemas 2.4 e 2.5.

Prova do Teorema 2.1:
O Lema 2.4(a) implica que se $G \cup G(n, \xi p)$ tem uma coloração própria, então existe um $K \in$ CORE monocromático. Mas, pelo Lema 2.4(b) com $\tau = \tau_0$ e o Lema 2.5, temos:

$$\Pr[\text{algum } K \in \text{CORE ser monocromático}] \leq exp(\tau_0 n^{3/2}) * exp(-2\tau_0 n^{3/2}) \leq o(1).$$

Logo, $\Pr[G \cup G(n, \xi p)$ ter uma coloração própria$] = o(1)$
Logo, $\Pr[G \cup G(n, \xi p) \in \mathcal{R}] = 1 - o(1)$.

Como citado, o grande esforço será a prova do Lema 2.4. Para isso, a hipótese de que $\Pr[(G \cup \mathrm{M}^*) \in \mathcal{R}] > 2\alpha$ é bastante trabalhada até se obter uma classe de subgrafos especiais, que será chamada de *constelações especiais*. Depois será enunciada uma versão para hipergrafos e subgrafos pequenos do famoso lema da regularidade de Szemerédi, em sua versão esparsa. Com esse resultado, será possível construir a família CORE, e provar o Lema 2.4.

5. Constelações Especiais

Como citado na seção anterior, a restrição de que $\Pr[(G \cup M^*) \in \mathcal{R}] > 2\alpha$ é bastante explorada, até obter a construção de uma família de subgrafos de G chamada de *constelações especiais*.

Seja M um grafo balanceado qualquer com $\rho(M)=2$, $|V(M)|=v$ e $|E(M)|=2v$, e vértices rotulados por $x_1,\ldots,x_v$. Para toda sequência $X=(v_1,\ldots,v_v)$ de vértices distintos de G, seja M_X uma cópia de M com os vértices x_a mapeados sobre v_a, $a=1,\ldots,v$. Seja χ a família dos X tal que $G \cup M_X \in \mathcal{R}$.

Logo, $|\chi| \geq 2\alpha n(n-1)\ldots(n-v+1) = (2-o(1))\, \alpha n^v$. A família χ será refinada para famílias χ_1, χ_2, até χ_3.

Seja $\chi_1 \subseteq \chi$ a família dos $X \in \chi$ tais que:

- X é um conjunto independente de G
- Todo vértice de G tem no máximo dois vizinhos em X

Como $G \in \mathcal{G}$, segue das propriedades (P1) e (P2) de $\mathcal{G}$ que $|\chi_1| \geq (2-o(1))an^v$.

Dizemos que um caminho de tamanho 2 entre vértices x e y é uma *tenda* sobre x e y. Seja T(X) o grafo formado pelas tendas em G sobre os pares de vértices de X que são arestas em M_X.

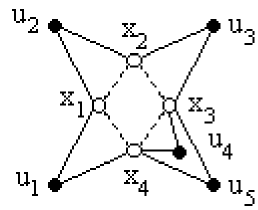

Figura 2: Exemplos de Tendas e do grafo T(X)

O Lema 3.1 do artigo prova a existência da família $\chi_2 \subseteq \chi_1 \subseteq \chi$ tal que, $\forall X \in \chi_2$:

- $G \cup M_X \in \mathcal{R}$ (prop. de χ)X é um conjunto independente de G (prop. de χ_1)
- Não há 3 vértices em X compartilhando um vizinho comum em G (prop. de χ_1)
- T(X) é isomorfo a um grafo fixo $\mathcal{M}$ com $v+\phi$ vértices e 2ϕ arestas, para algum $\phi \leq q$
- $|\chi_2| \geq a_2 n^v$, onde $\alpha_2=\alpha/(2v+q)^q$ e $q=\lceil 10C_2^{\,2}\, v / \alpha \rceil$

A idéia é obter uma coloração parcial de E(G) a partir de uma coloração própria de M. Considere então uma coloração própria σ' de M. $\forall X \in \chi_2$, colorimos M_X com σ'. Essa coloração particiona T(X) em RT(X) e BT(X), os conjuntos das *tendas* em G sobre as arestas vermelhas e azuis de M_X, respectivamente. O lema 3.2 abaixo obtém um resultado importante nesse sentido.

Lema 3.2: Para toda coloração própria de E(G) e para todo X $\in \chi_2$, existe ou uma *tenda* vermelha em RT(X) ou uma *tenda* azul em BT(X).

Prova: Para toda coloração própria de E(G), existe um triângulo monocromático em $G \cup M_X \in \mathcal{R}$, com M_X colorido por σ'. Pela definição de χ_2, os vértices de X não possuem arestas entre si em G. Logo, o triângulo monocromático contém exatamente uma aresta de M_X. As outras duas arestas formam a *tenda* com a mesma cor.

Mas, para colorir E(G) parcialmente nas arestas de RT(X) e BT(X), uma mesma aresta pode pertencer a RT(X_1) e BT(X_2), para $X_1 \neq X_2$. Para solucionar esse problema, é feito um refinamento da família χ_2 em uma família χ_3 mais restrita, através do Lema 3.3 abaixo.

Relembramos que V(M) = $\{x_1,...,x_v\}$. Rotulamos então os demais vértices de $\mathcal{M}$ (as pontas das tendas) por $\{u_1,...,u_\phi\}$. Seja $\pi_0 = \{V_1,..., V_v, W_1,...,W_\phi\}$ uma partição de V(G) em $v+\phi$ partes de mesmo tamanho $m = n/(v+\phi)$. Um grafo T(X) é consistente com π_0 se $x_a \in V_a$, $1 \leq a \leq v$, e $u_b(X) \in W_b$, $1 \leq b \leq \phi$.

Lema 3.3: Existe uma partição π_0 como citada e uma família $\chi_3 \subseteq \chi_2$ com $|\chi_3| = \alpha_3 n^v$, onde $\alpha_3 = \alpha_2 / (2(v+q)^{v+q})$, tal que $\forall X \in \chi_3$, T(X) é consistente com π_0. Além disso, $\forall v \in V_1 \cup ... \cup V_v$ e para cada b=1,..., ϕ, temos $3m/4 \leq deg_G(v,W_b) \leq 3m/2$.

A prova do Lema 3.3 é simples e não merece maiores atenções. Com o seu resultado, temos que $RT(X_1) \cap BT(X_2) = \emptyset$, para $X_1 \neq X_2$ em χ_3, já que as arestas entre as partições de π_0 tem cor predefinida pela coloração σ'. Para facilitar a construção, utiliza-se apenas uma das *pernas* das *tendas* de cada T(X), ou seja, trabalha-se com *estrelas*, ao invés de tendas.

No entanto, como as *tendas* são disjuntas em arestas, a *perna* perdida é facilmente recuperada. Para isso, são enunciadas no artigo várias propriedades relacionadas às pernas perdidas (The Missing Leg Property).

Definição: Seja $X=(v_1,...,v_v) \in \chi_3$. Dada uma *tenda* $v_r\, w\, v_s$, com $r < s$, a aresta $v_r w$ é a *perna esquerda* e a aresta $v_s w$ é a *perna direita* da *tenda*. Seja S(X) o subgrafo de T(X) formado apenas pelas *pernas esquerdas* das *tendas* de T(X). Os subgrafos S(X) são chamados de *constelações especiais*, já que são conjuntos de estrelas.

Definição: Um conjunto é um conjunto *transversal* (*hitting set*) de uma família de conjuntos se ele intersecta todo membro da família.

A Figura 3 abaixo ilustra como deve ser uma coloração parcial σ de E(*G*), baseada em σ'. Ou seja, as arestas de *G* que formam uma tenda sobre uma aresta de M_X devem receber a mesma cor dessa aresta, para todos os conjuntos X em χ_3.

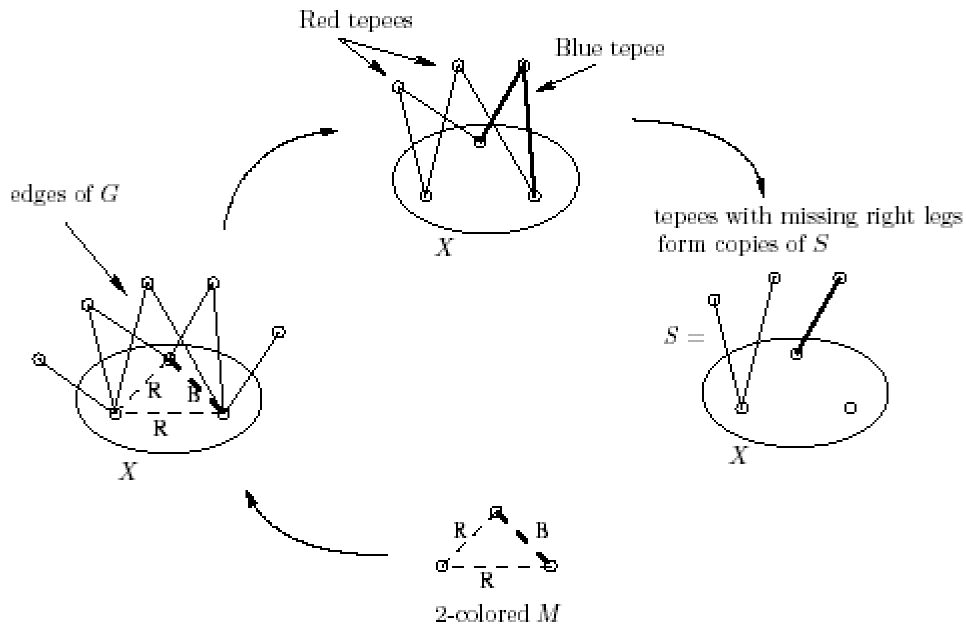

Figura 3: Uma coloração parcial de E(G) baseada em σ'

Seja *Concorda*(φ)={$e \in \cup$ S(X), X$\in\chi_3$: φ (e)= σ (e)}, para uma coloração φ de E(G), ou seja, é o conjunto das arestas cuja cor concorda com a cor dada na coloração parcial σ.

O lema 3.5 abaixo justifica toda a construção, obtendo um resultado importante do fato das colorações próprias de *G* serem restritas, ou seja, a hipótese inicial de que Pr[($G\cup$M*)$\in\mathcal{R}$]>2α. Posteriormente, ele será usado para provar que existe um *core* monocromático em toda coloração própria de E(*G*).

Lema 3.5: Seja φ uma coloração própria de E(*G*). Então *Concorda*(φ) é um conjunto *transversal* da família das *constelações especiais*.

Prova: É necessário mostrar que $\forall$X$\in\chi_3$, existe uma aresta *e* de S(X) onde σ (e)= φ (e). Mas, isso é válido pela definição de σ e pelo Lema 3.2.

Resumidamente, com a hipótese restritiva sobre as colorações próprias de *G*, obtemos a família das constelações especiais e um conjunto transversal baseado na coloração parcial de *G*.

As *constelações especiais* podem ser vistas como arestas de um hipergrafo (onde os vértices são as arestas de *G*) e as colorações próprias são associadas a conjuntos *transversais* desse hipergrafo.

Na próxima seção, será enunciada uma versão do lema da regularidade de Szemerédi, para hipergrafos e subgrafos pequenos (no caso, as constelações especiais). Com isso, será possível obter um "bom" particionamento de π_0, e posteriormente, construir a família CORE do Lema 2.4.

6. Regularização

Para a construção da família CORE é necessário um refinamento da partição π_0 da família χ_3. Para isso, é utilizada *Regularização.*

Uma das principais ferramentas da teoria assintótica dos grafos é o famoso Lema da Regularidade de Szemerédi de 1975. A regularização é feita sobre as arestas, $H = \mathbf{K_2}$, obtendo assim conjuntos bipartidos, e é útil apenas para grafos densos. Resumidamente, ele nos diz que qualquer grafo grande pode ser decomposto em um número limitado de subgrafos induzidos bipartidos e quase-aleatórios.

Devido à limitação para grafos densos, Kohayakawa e Rödl provaram uma versão do Lema da Regularidade para grafos esparsos. Ele também realiza uma regularização sobre as arestas, mas faz um ajuste por uma escala e proíbe pedaços densos no grafo.

Em 2002, Frankl e Rödl provaram outra versão do Lema da Regularidade para hipergrafos 3-uniformes. Nesse caso, a regularização é feita sobre triângulos, $H = \mathbf{K_3}$.

Em geral, dada a estrutura H sobre a qual se quer realizar a regularização, o objetivo é obter refinamentos de uma partição de grandes conjuntos em conjuntos uniformes (quase-aleatórios) “bem comportados”, que não contém muitas dessas estruturas H. No nosso caso, desejamos obter um particionamento em subconjuntos com poucas constelações especiais.

A versão apresentada no artigo do Lema da Regularidade e enunciada abaixo é um estudo da estrutura de grafos esparsos com respeito a famílias de pequenos subgrafos, ou seja, a regularização é feita sobre constelações, H = conjunto de estrelas.

Lema 4.13: Para todos os grafos H, constantes $\delta > 0$, $D>0$, $D^*>1$, e para todas funções $\varepsilon(k)>0$, existem inteiros T_0, L_0, n_0 tais que

1. Para todo $n=hm>n_0$, $0<p=p(n)<1$, um grafo $F \in \mathcal{F}(H,m)$ com $|V(F)|=n$, tal que
   (a) F é H-uniforme
   (b) F não possui *pedaços* (D,p)*-densos*, e
2. Para todo $0 < p^*=p^*(n) < 1$ e $S \subseteq C(F)$ tal que F não possui *H-pedaços* (D^*,p^*)*-densos,*

Então existe um refinamento Π_1 da partição inicial Π_0 que é δ-regular, $(\varepsilon(k), p)$-uniforme e (t,k)-partição para algum $k\leq L_0$ e $t\leq T_0$.

A prova do Lema 4.13 é baseada em uma técnica do Lema da Regularidade de Szemerédi original, a saber, refinar a partição Π_0 até que ele se torne δ-regular. Grosso modo, uma (t,k)-partição é uma partição do conjunto de vértices e arestas em, respectivamente, t e k partes.

Desta forma, o objetivo é aplicar o Lema 4.13 para o nosso problema em questão, ou seja, $\Pi_0 = \pi_0 = \{V_1,...,V_v,W_{11},...,W_{1\,\phi_1},...,W_{v1},...,W_{v\,\phi_v}\}$, o grafo $H = \{S(X),\ \forall X \in \chi_3\}$ representando o conjunto das *constelações especiais*, $F = \cup F_{ab}$, onde $F_{ab}=G[V_a,W_{ab}]$, para todo a=1,...,v e b=1,..., ϕ_a..

Na subseção 4.4 do artigo, denominada "No Dense Patches", são provados os Lemas 4.17 e 4.19, os quais verificam que as restrições do Lema 4.13 são respeitadas para aplicação mencionada acima.

Na próxima seção, é feita a aplicação do Lema 4.13 e é montada a família CORE do Lema 2.4.

7. Construção da Família CORE

Aplicação do Lema 4.13: O Lema garante a obtenção de um refinamento δ-regular, $(\varepsilon(k), p)$-uniforme e (t,k)-partição Π_1 de Π_0, $t \le T_1$ e $k \le L_1$. De fato, Π_1 consiste de partições dos vértices:

$V_a = V_a^1 \cup \ldots \cup V_a^t$, $a=1,\ldots,v$

$W_{ab} = W_{ab}^1 \cup \ldots \cup W_{ab}^t$, $a=1,\ldots,v-1$ e $b=1,\ldots,\phi_a$,

e partições nas arestas:

$F_{ab}^{i,j} = G[V_a^i, W_{ab}^j] = \cup_{r=1}^{k(ab,i,j)} F_{ab}^{i,j,r}$, $a=1,\ldots,v-1$ e $b=1,\ldots,\phi_a$.

$k(ab,i,j) \le k$, $i,j = 1,\ldots,t$

A Figura 4 abaixo ilustra as seguintes estruturas, definidas com base nos subconjuntos mencionados acima.

- *Palmas* (*palms*)
- *Unhas* (*fingernails*)
- *Dedos* (*fingers*)
- *Tubos* (*tubes*)
- *Políada* (*polyad*)
- *Olimpíada* (*olimpyad*)

Uma *Políada P* consiste de *v palmas* V_a^P (uma para cada a), ϕ *unhas* W_{ab}^P (ϕ_a para cada a) e ϕ *dedos* F_{ab}^P (um para cada *tubo* $F_{ab}^{i,j}$, onde $V_a^P = V_a^i$ e $W_{ab}^P = W_{ab}^j$)

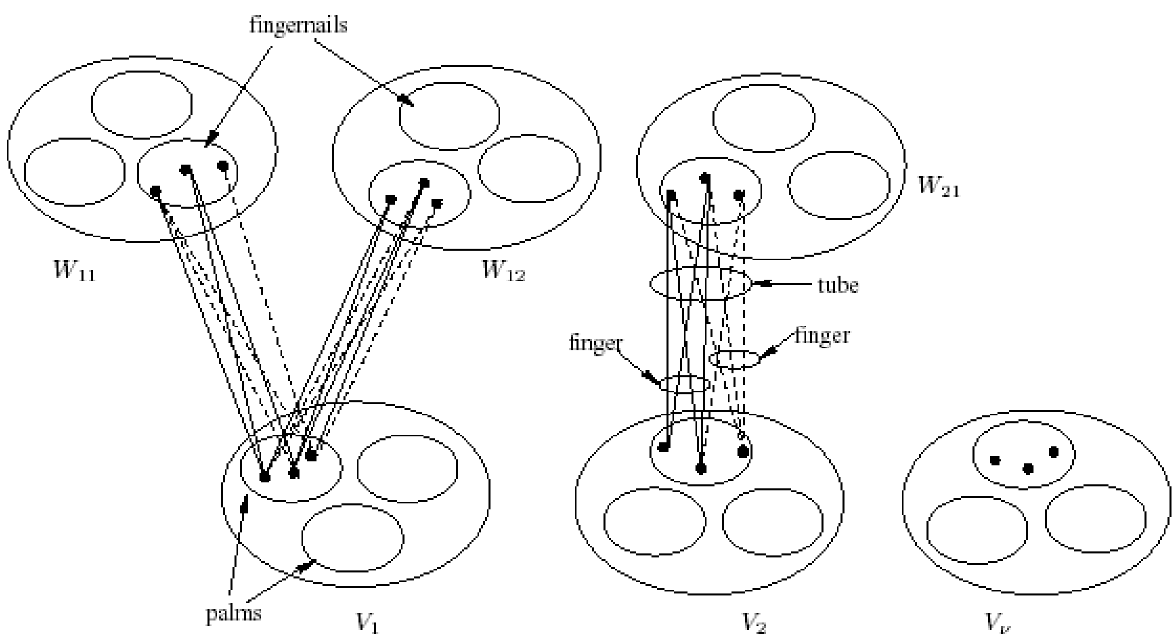

Figura 4: Ilustração de várias estruturas baseadas no particionamento

O artigo define ainda políadas *saudáveis*, que são políadas δ–regulares com densidade maior que δ e cujos dedos são (ε,p)-uniformes com grandes densidades.

Definição: PRECORE(P) de uma *políada P saudável* é o conjunto dos subgrafos de P fixando uma *palma* (índice a) e uma *unha* (índice b), para a=1,...,v e b=1,..., ϕ_a, de forma que o número de vértices e de arestas é maior que um limite dado.

Definição: $PRECORE = \{J\text{: } J = \cup_P J^P$, onde $J^P \in$ PRECORE(P)$\}$. Um *precore J* é a união de subgrafos $J^P \in$ PRECORE(P), um para cada *políada saudável P*.

A coloração parcial σ particiona as arestas de cada *precore J* em *vermelhas* e *azuis*. Seja $Maj(J)$ o maior desses conjuntos de arestas.

Definição: $CORE = \{Maj(J)$, onde $J \in PRECORE$, $J \subseteq \cup \mathrm{S(X)}$, $\mathrm{X} \in \chi_3\}$

Construída a família CORE acima, seguem os seguintes lemas, que constituem a prova do Lema 2.4.

Lema 3.5 + Lema 5.1: Para toda coloração própria φ de G, o conjunto *Concorda*(φ) contém um *core* monocromático.

Lema 5.2: $|CORE| \leq \exp(\tau\, n^{3/2})$

Lema 5.3: $\forall K \in CORE$, $|K| > \lambda\, |\mathrm{E(G)}|$

As provas dos lemas acima se baseiam em grande parte nas características provenientes do particionamento do Lema 4.13, a saber, subconjuntos δ-regulares, $(\varepsilon(k), p)$-uniformes e (t,k)-partições, das características das políadas saudáveis, e das propriedades da família $\mathcal{G}$ de grafos, que será enunciada na seção seguinte.

8. Família de grafos $\mathcal{G}$

Abaixo, enunciamos a definição da família $\mathcal{G}$ de grafos:

Um grafo $G=(V,E)$ com n vértices tem a propriedade $\mathcal{G}=\mathcal{G}\,(p,v,q,\lambda,a)$ se:
(P1) O número de conjuntos com v vértices não independentes é $o(n^v)$
(P2) O número de conjuntos com v vértices tais que três deles compartilham um vizinho comum é $o(n^v)$
(P3) $\forall v \in$ V, $(1\text{-}n^{-1/5})np \le deg(v) \le (1+n^{-1/5})np \le 2np$
(P4) $\forall v, u \in$ V, $codeg(v,u) \le 3 \log n$
(P5) $\forall U,W \subset$ V, U e W disjuntos com $|U|, |W| \ge n / \log n$, então

$(1\text{-}n^{-1/5})|U||W|\, p \le e_G\,(U,W) \le (1+n^{-1/5})|U||W|\, p \le 2\,|U||W|\, p$ e

$e_G(U) < |U|^2\, p$

(P6) $\forall\ 1 \le k \le 2q$ e para todas as escolhas de subconjuntos $S_1,\ldots,S_k$ de V, tal que $|S_i| \le 2np$ e $|S_i \cap S_j| \le 12 \log n$, o número Z de vértices com pelo menos um vizinho em cada S_i satisfaz $|Z - \mu| \le n^{4/5}$, onde $\mu = n \prod_{i=1}^{k} (1\text{-}(1\text{-}p)^{S_i})$
(P7) G tem a propriedade $T(\lambda,a)$

O Lema 6.1 abaixo é uma das hipóteses necessárias do Lema 2.4. A prova não é muito complicada e se resume a provar que cada propriedade da família $\mathcal{G}$ satisfaz o lema. Algumas delas são imediatas como a (P7) que corresponde ao Lema 2.3, e as outras, na sua maioria, se resolvem por aplicação da desigualdade de Markov e do limite de Chernoff.

Lema 6.1: $\forall p=p(n)$ tal que $c_2/\sqrt{n} < p < C_2/\sqrt{n}$, temos $\lim_{n\to\infty} \Pr[G(n,p) \in \mathcal{G}\,] = 1$

9. Bibliografia

[1] E. Friedgut, V. Rödl, A. Rucinski and P. Tetali, A Sharp Threshold for Random Graphs with a Monochromatic Triangle in Every Edge Coloring (2003), submitted.

[2] P. Frankl and V. Rödl, Large triangle-free subgraphs in graphs without $\mathbf{K_4}$, Graphs and Combinatorics 2 (1986), 135-144

[3] R. Graham, V. Rödl and A. Rucinski, On Schur properties of random subsets of integers, Journal of Number Theory 61(2) (1996), 388-408.

[4] T. Luczak, A. Rucinski and B. Voight, Ramsey properties of random graphs, J. Comb. Th. Ser. B 56 (1992), 55-68.

[5] V. Rödl and A. Rucinski, Lower bounds on probability thresholds for Ramsey properties, Combinatorics, Paul Erdös is Eighty (Vol.1), Keszthely(Hungary), Bolyai Soc. Math. Studies, 1993, pp.317-346.

[6] V. Rödl and A. Rucinski, Random graphs with monochromatic triangles in every edge coloring, Random Structures and Algorithms 5 (1994), 253-270.

[7] V. Rödl and A. Rucinski, Threshold functions for Ramsey properties, Journal of Amer. Math Soc. Vol 8 (1995), 917-942.

[8] V. Rödl and A. Rucinski, Rado partition theorem for random subsets of integers, Proceedings of the London Mathematical Society 74(3) (1997), 481-502.

[9] V. Rödl and A. Rucinski, Ramsey properties of random hypergraphs, J. Comb. Th. Ser., A 81 (1998), 1-33.

[10] B. Bollobás, Modern graph theory. Graduate Texts in Mathematics, 184. Springer-Verlag, New York, 1998, Cap. IV, VI e VII.

[11] B. Bollobás, Combinatorics. Set systems, hypergraphs, families of vectors and combinatorial probability. Cambridge University Press, Cambridge, 1986.

[12] B. Bollobás, Random Graphs. Academic Press, 1985.

[13] J. Spencer, Ten lectures on the probabilistic method. Second edition. CBMS-NSF Regional Conference Series in Applied Mathematics, 64. Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia, PA, 1994, Cap. 3 e 7.