MAC5701
Tópicos em Ciências da Computação
Plano de Estudos

Março 2003

Rudini Sampaio
Orientador: Yoshiharu Kohayakawa

1 Proposta

Esta proposta se concentra no estudo do artigo "*A Sharp Threshold for Random Graphs with a Monochromatic Triangle in Every Edge Coloring*" (2003), de Ehud Friedgut, Vojtech Rodl, Andrzej Rucinski e Prasad Tetali.

O seu resultado principal é a obtenção de uma função limiar *severa* (*sharp*) para a propriedade de Ramsey, ou seja, grafos aleatórios tais que para toda coloração de arestas existe um triângulo monocromático (todas as arestas com a mesma cor).

Este artigo abrange vários temas importantes da área de Combinatória e Matemática Discreta tais como propriedades de Ramsey, funções limiares para Grafos Aleatórios e o Lema da Regularidade de Szemerédi, tornando-se um sólido material de estudo para o desenvolvimento de pesquisa acadêmica na área de Combinatória e Matemática Discreta.

2 Terminologia

Seja $G(n,p)$ um grafo aleatório de n vértices com probabilidade de aresta p. Seja P uma propriedade de grafos. Por exemplo, P pode ser propriedade do grafo possuir um K_4, ou do grafo ser conexo, ou do grafo possuir vértices isolados.

Dizemos que a propriedade P é crescente se, para todo subgrafo H de um grafo G tal que $V(H) = V(G)$, se H tem P, então G tem P.

Se P é uma propriedade crescente e $p^* = p^*(n)$ satisfaz, para $n \to \infty$, $Prob[G(n,p)$ tem $P]$=1 se $p/p^* \to \infty$, e $Prob[G(n,p)$ tem $P]$=0 se $p/p^* \to 0$, então dizemos que p^* é uma função limiar para a propriedade P. Aqui vale ressaltar que nem todas as propriedades possuem funções limiares.

Dizemos que uma propriedade P admite uma função limiar *severa* se existe uma função $c = c(n)$ tal que a condição de ocorrência ou não de P depende apenas se $p > c$

ou $p < c$. Funções limiares *severas* já foram obtidas para várias propriedades de grafos, tais como conectividade e emparelhamento perfeito. Aqui vale ressaltar que a existência de uma função limiar *severa* implica a existência de funções limiares comuns.

3 Motivação

O estudo dos grafos aleatórios extremais ganhou maior interesse nos últimos anos com a descoberta, por Erdös e Renyi, em meados de 1960, que muitas propriedades admitem funções limiares, tais como a continência de subgrafos pequenos e a conectividade.

Durante a última década, foram promovidos extensos estudos sobre as propriedades do tipo Ramsey em estruturas aleatórias [2],[3],[4],[5],[6],[7],[8],[9]. O interesse nas propriedades do tipo Ramsey é justificado pela garantia que elas dão de que, para uma partição arbitrária de uma dada estrutura, é possível obter uma subestrutura altamente organizada em pelo menos uma das partes da partição.

Tais estudos obtiveram funções limiares para propriedades do tipo Ramsey. No entanto, nenhum resultado envolvendo funções limiares *severas* para as propriedades do tipo Ramsey foi obtido até 1999. Com a introdução recente de uma técnica geral para resolver questões relacionadas às funções limiares *severas* em grafos aleatórios, tornou-se possível atacar o problema das funções limiares *severas* para as propriedades do tipo Ramsey.

Pelo envolvimento de técnicas recentes em matemática discreta e pela abrangência dos assuntos analisados, justifica-se o estudo deste artigo nesta disciplina de Tópicos em Ciências da Computação como um meio para uma forte preparação para a pesquisa acadêmica nessa área de estudo.

4 Plano de Estudos

Como o foco de estudo já foi concentrado no artigo citado, apresentamos um esboço do planejamento de estudo:

Abril 2003 - Estudo preliminar dos assuntos relacionados [10],[11],[12],[13]: Grafos Aleatórios, Funções Limiares *Severas* e o Lema da Regularidade de Szemerédi

Maio 2003 - Leitura em detalhes do Artigo mencionado

Junho 2003 - Elaboração do resumo final, a ser entregue no final do curso

Referências

[1] E. Friedgut, V. Rödl, A. Rucinski and P. Tetali, A Sharp Threshold for Random Graphs with a Monochromatic Triangle in Every Edge Coloring (2003), submitted.

[2] P. Frankl and V. Rödl, Large triangle-free subgraphs in graphs without K_4, Graphs and Combinatorics 2 (1986), 135-144

[3] R. Graham, V. Rödl and A. Rucinski, On Schur properties of random subsets of integers, Journal of Number Theory 61(2) (1996), 388-408.

[4] T. Luczak, A. Rucinski and B. Voight, Ramsey properties of random graphs, J. Comb. Th. Ser. B 56 (1992), 55-68.

[5] V. Rödl and A. Rucinski, Lower bounds on probability thresholds for Ramsey properties, Combinatorics, Paul Erdös is Eighty (Vol.1), Keszthely(Hungary), Bolyai Soc. Math. Studies, 1993, pp.317-346.

[6] V. Rödl and A. Rucinski, Random graphs with monochromatic triangles in every edge coloring, Random Structures and Algorithms 5 (1994), 253-270.

[7] V. Rödl and A. Rucinski, Threshold functions for Ramsey properties, Journal of Amer. Math Soc. Vol 8 (1995), 917-942.

[8] V. Rödl and A. Rucinski, Rado partition theorem for random subsets of integers, Proceedings of the London Mathematical Society 74(3) (1997), 481-502.

[9] V. Rödl and A. Rucinski, Ramsey properties of random hypergraphs, J. Comb. Th. Ser., A 81 (1998), 1-33.

[10] B. Bollobás, Modern graph theory. Graduate Texts in Mathematics, 184. Springer-Verlag, New York, 1998, Cap. IV, VI e VII.

[11] B. Bollobás, Combinatorics. Set systems, hypergraphs, families of vectors and combinatorial probability. Cambridge University Press, Cambridge, 1986.

[12] B. Bollobás, Random Graphs. Academic Press, 1985.

[13] J. Spencer, Ten lectures on the probabilistic method. Second edition. CBMS-NSF Regional Conference Series in Applied Mathematics, 64. Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia, PA, 1994, Cap. 3 e 7.