Singularidades de funções de variável complexa

Cristian Ortiz

O objetivo destas notas é complementar o estudo sobre singularidades, feito nas últimas aulas.

1 Singularidades isoladas

Dado um disco aberto $B(z_0, \epsilon)$ com $z_0 \in \mathbb{C}$ definimos

$$B^*(z_0, \epsilon) := \{z \in B(z_0, \epsilon) \mid z \neq z_0\}.$$

Dizemos que um ponto $a \in \mathbb{C}$ é uma **singularidade isolada** de uma função f se existe um disco aberto $B(a, r)$ tal que f é holomorfa em $B(a, r)$, mas não é holomorfa em $B(a, r)^*$.

Exemplo 1.1 A função $f(z) = \frac{1}{z}$ tem uma singularidade isolada em $a = 0$.

Exemplo 1.2 A função $f(z) = \frac{\mathrm{sen}(z)}{z}$ tem uma singularidade isolada em $a = 0$. De fato em qualquer aberto que não contém a origem, f é produto de funções holomorfas.

Existem singularidades que podem ser *corrigidas*, no seguinte sentido.

Definição 1.3 *Uma singularidade isolada a de uma função f é dita* ***singularidade removível*** *se existe uma função holomorfa $g : B(a, r) \longrightarrow \mathbb{C}$ tal que $g(z) = f(z)$ para cada $z \in B^*(a, r)$.*

A função g da definição anterior é uma extensão holomorfa de f ao disco $B(a, r)$. Neste sentido g pode ser considerada como uma correção da singularidade a de f. Note que a correção é única, pois dois funções holomorfas que coincidem num aberto necessariamente concidem em todos os pontos do seu domínio.

Observamos em aula que singularidades removíveis estão caracterizadas por

$$\lim_{z \to a} f(z)(z - a) = 0.$$

Como consequência, a singularidade do exemplo 1.1 (resp. 1.2) é não removível (resp. removível).

É bom pensar singularidade removíveis como pontos que não são realmente um problema, pois podem ser corrigidos localmente usando uma extensão holomorfa.

Definição 1.4 *Seja a uma singularidade isolada de uma função f. Dizemos que a é um* ***pólo*** *se*

$$\lim_{z \to a} |f(z)| = +\infty \tag{1.1}$$

Lembre que (1.1) significa que para cada $C > 0$ existe $\delta > 0$ de forma que

$$z \neq a, |z - a| < \delta \text{ entao } |f(z)| \geq C.$$

Exemplo 1.5 A singularidade do exemplo 1.1 é um pólo.

Note que singularidades removíveis não são pólos. De fato, se $a \in \mathbb{C}$ é singularidade removível de f, existe uma função holomorfa $g : B(a,r) \longrightarrow \mathbb{C}$ que coincide com f em $B^*(a,r)$. Logo

$$\lim_{z \to a} |f(z)| = \lim_{z \to a} |g(z)| = |g(a)| \in \mathbb{R}.$$

Isto diz que a não é um pólo de f.

Exercício: Verifique que se a é um pólo de f, então a é singularidade removível de $\frac{1}{f}$.

Lembre que zeros de funções holomorfas se comportam como zeros de polinômios, no sentido que o conjunto de zeros de uma função holomorfa é um conjunto discreto e cada zero tem associado um número natural, chamado multiplicidade. Vamos provar que pólos também têm associado um número natural, que mede *quão problemático* é este pólo. Para ilustrar, vamos considerar o seguinte exemplo.

Exemplo 1.6 (Zeros vs Pólos)
Seja p um polinômio com coeficientes complexos. Suponha que o número complexo a é um zero de p, isto é $p(a) = 0$. Podemos escrever o polinômio p na seguinte forma

$$p(z) = (z-a)^n q(z),$$

onde $n \in \mathbb{N}$ e q um polinômio tal que $q(a) \neq 0$. Note que n é o maior número natural com esta propriedade. Defina agora a função $f(z) = \frac{1}{p(z)}$.

Exercício: Verifique que a é um pólo da função f.

Note que, como $q(a) \neq 0$, pela continuidade de q existe um disco aberto $B(a,r)$ onde q nunca se anula. Portanto vale a seguinte identidade

$$f(z) = \frac{1}{(z-a)^n q(z)}, \tag{1.2}$$

para cada $z \in B^*(a,r)$. Defina a função $q_1 : B(a,r) \longrightarrow \mathbb{C}$ por $q_1(z) = \frac{1}{q(z)}$. Note que q_1 é uma função holomorfa, e

$$f(z) = \frac{q_1(z)}{(z-a)^n}, \tag{1.3}$$

para cada $z \in B^*(a,r)$. Vamos mostrar que, substituindo q_1 por uma função inteira, a identidade (1.3) pode ser estendida ao plano $\mathbb{C}$ exceto no ponto a. Primeiro note que a função $z \mapsto f(z)(z-a)^n$ é holomorfa em $\mathbb{C} - \{a\}$ e coincide com q_1 em $B^*(a,r)$.

Exercício: Verifique que a função $g : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ definida por

$$g(z) = \begin{cases} f(z)(z-a)^n, & z \in \mathbb{C} - \{a\} \\ q_1(z), & z \in B(a,r) \end{cases} \tag{1.4}$$

é uma função inteira.

Como consequência temos

$$\frac{1}{p(z)} = f(z) = \frac{g(z)}{(z-a)^n},$$

para cada $z \in \mathbb{C} - \{a\}$.

O exemplo anterior diz que a multiplicidade da raíz a do polinômio p mede o *grau do problema* determinado pelo pólo a da função $f = \frac{1}{p}$. Vamos provar que, para uma função arbitrária, sempre podemos determinar quão problemático é um pólo.

Proposição 1.7 *Sejam $U \subseteq \mathbb{C}$ um domínio, $f : U - \{a\} \longrightarrow \mathbb{C}$ uma função holomorfa com um pólo em $a \in U$. Existem um número natural $n \in \mathbb{N}$ e uma função holomorfa $g : U \longrightarrow \mathbb{C}$ tais que*

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z-a)^n},$$

para cada $z \in U - \{a\}$.

Demonstração: Cosidere a função $h : U \longrightarrow \mathbb{C}$ definida por

$$h(z) = \begin{cases} \frac{1}{f(z)}, & z \in U - \{a\} \\ 0, & z = a \end{cases} \tag{1.5}$$

Como a é um pólo de f, temos que h é contínua em a. Por outro lado, o fato de a ser um pólo de f implica que $\frac{1}{f}$ tem uma singularidade removível em a, portanto existe um disco aberto $B(a,r)$ onde a função h é holomorfa. Segue da definição de h que $h(a) = 0$, isto implica que existem um número natural $n \in \mathbb{N}$ (a multiplicidade do zero a de h) e uma função holomorfa $g_1 : B(a,r) \longrightarrow \mathbb{C}$ com $g_1(a) \neq 0$, tais que

$$h(z) = (z-a)^n g_1(z), \tag{1.6}$$

para cada $z \in B(a,r)$. Em particular, para $z \in B^*(a,r)$ temos

$$h(z) = \frac{1}{f(z)} = (z-a)^n g_1(z). \tag{1.7}$$

Como g_1 é holomorfa em $B(a,r)$ e $g_1(a) \neq 0$, segue da continuidade de g_1 que existe $r' > 0$ tal que $g_1(z) \neq 0$ para cada $z \in B(a,r')$. Esta observação junto com (1.7) implicam que

$$f(z) = \frac{g_1(z)}{(z-a)^n}, \tag{1.8}$$

para cada $z \in B^*(a,R)$, onde $R = \min\{r, r'\}$. Vamos mostrar que, substituindo g_1 por uma função holomorfa em U, a identidade (1.8) pode ser estendida a todos os pontos de U exceto em a. Para isso note que a função $z \mapsto f(z)(z-a)^n$ é holomorfa em $U - \{a\}$ e coincide com g_1 em $B^*(a,R)$. Logo a função $g : U \longrightarrow \mathbb{C}$ definida por

$$g(z) = \begin{cases} f(z)(z-a)^n, & z \in U - \{a\} \\ g_1(z), & z \in B(a,R) \end{cases} \tag{1.9}$$

é holomorfa. Claramente vale

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z-a)^n},$$

para cada $z \in U - \{a\}$.

$\square$

Exercício: Compare o exemplo 1.6 com a demonstração da Proposição acima

Note que o número natural da prova da proposição anterior é o maior número natural n tal que $f(z)(z-a)^n$ tem uma singularidade removível em a. Isto justifica a seguinte definição.

Definição 1.8 *Seja a um pólo da função f. O* ***grau*** *de a é o maior número natural $n \in \mathbb{N}$ tal que $f(z)(z-a)^n$ tem uma singularidade removível em a.*

Exercício:

a) Qual o grau do pólo no exemplo 1.1?

b) Qual o grau do pólo no exemplo 1.6?

Usando a Proposição 1.7 podemos entender o comportamento local de uma função numa vizinhança de um pólo, por exemplo escrevendo um desenvolvimento em série de potências. Como você faria isto?

Referências

[1] Conway, J., *Functions of one complex variable.* Springer Verlag.