

Notas de aula

MAP 5722 - Teoria das Distribuições e Análise de Fourier

Danilo Gregorin Afonso

gregorinafonso@mat.uniroma1.it

Sapienza Università di Roma

Agradecimentos:

a Paulo D. Cordaro, pelas aulas fantásticas e pela enorme paciência;

a João Coelho, pela revisão dos primeiros 8 capítulos, sempre atenta e rigorosa

Atualizado em 30 de abril de 2021

Resumo

Notas de aula da disciplina MAP 5722 - Teoria das Distribuições e Análise de Fourier, oferecida pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo, ministrada pelo Prof. Dr. Paulo D. Cordaro.

Sumário

Introdução	4
1 Aula 1 - 27/02/2019	5
1.1 Preliminares	5
2 Aula 2 - 01/03/2019	9
2.1 Preliminares (continuação)	9
2.2 Convolução	10
2.3 Partições da unidade	15

3 Aula 3 - 08/03/2019	17
3.1 Partições da unidade (continuação)	17
3.2 Regularização	19
3.3 Distribuições	20
4 Aula 4 - 13/03/2019	22
4.1 Distribuições (continuação)	22
4.2 Extensões de distribuições	26
5 Aula 5 - 15/03/2019	28
5.1 Extensões de distribuições (continuação)	28
5.2 Convergência de distribuições	29
5.3 Localização	30
6 Aula 6 - 20/03/2019	35
6.1 Distribuições de suporte compacto	35
6.2 Diferenciação e multiplicação por funções	38
7 Aula 7 - 22/03/2019	41
7.1 Diferenciação e multiplicação por funções (continuação)	41
8 Aula 8 - 27/03/2019	48
8.1 Diferenciação e multiplicação por funções (continuação)	48
8.2 Alguns exemplos	51
9 Aula 9 - 29/03/2019	55
9.1 Valores na fronteira para funções analíticas	55
9.2 Convolução de distribuições	58
10 Aula 10 - 03/04/2019	60
10.1 Convolução de distribuições (continuação)	60
11 Aula 11 - 05/04/2019	65
11.1 Convolução de distribuições (continuação)	65
11.2 Teorema de Estrutura Local	67
11.3 O papel das soluções fundamentais	68
11.4 Suporte singular	69
12 Aula 12 - 10/04/2019	70
12.1 Operadores hipoelepticos	70
12.2 Alguns exemplos	71
12.3 Teorema de Hörmander	74

13 Aula 13 - 12/04/2019	77
13.1 Teorema de Hörmander (continuação)	77
13.2 Produto tensorial de distribuições	77
14 Aula 14 - 24/04/2019	81
14.1 Composição de distribuições com aplicações	81
15 Aula 15 - 26/04/2019	86
15.1 Transformada de Fourier	86
16 Aula 16 - 08/05/2019	91
16.1 Transformada de Fourier (continuação)	91
17 Aula 17 - 10/05/2019	97
17.1 Transformada de Fourier (continuação)	97
18 Aula 18 - 17/05/2019	104
18.1 O Teorema de Paley-Wiener-Schwartz	104
19 Aula 19 - 22/05/2019	107
19.1 A parametriz	107
20 Aula 20 - 24/05/2019	112
20.1 Espaços de Sobolev	112
21 Aula 21 - 29/05/2019	119
21.1 Espaços de Sobolev (continuação)	119
22 Aula 22 - 31/05/2019	124
22.1 Regularidade	124
23 Aula 23 - 05/06/2019	129
23.1 O conjunto frente de onda	129
24 Aula 24 - 07/06/2019	134
Referências	137
Índice Remissivo	138

Introdução

É sabido, do Cálculo elementar, que nem toda função é diferenciável. Hörmänder (1990), em sua introdução, chama este fato de "*unpleasant*", "*awkward*". Por exemplo, na teoria das equações diferenciais, isto claramente impõe uma restrição severa no conjunto das funções que poderiam ser solução de um problema. Algumas contas podem ser encontradas na introdução da obra acima. Por outro lado, físicos e engenheiros fazem "cálculo diferencial" com objetos que nem sequer são funções, desenvolvendo métodos de cálculo que se mostraram eficazes nas soluções dos seus problemas particulares mas sem rigor algum do ponto de vista matemático. Exemplos disto são as "funções" de grau de Heaviside¹ e Delta de Dirac².

Surge então, de forma natural, a necessidade de estendermos a noção de função para uma classe onde a diferenciabilidade não seja um problema. Aos objetos desta classe daremos o nome de *distribuições*. É desejável que tais objetos satisfaçam algumas propriedades (RUDIN, 1991):

- Funções contínuas devem ser distribuições;
- Devemos poder derivar indefinidamente (ou seja, as derivadas de distribuições devem ser distribuições);
- Valem as regras usuais do cálculo;
- Devem valer teoremas de convergência apropriados para manipularmos limites de forma conveniente.

De fato, o espaço das distribuições é, essencialmente, a menor extensão das funções contínuas onde a diferenciação está sempre bem definida (HÖRMANDER, 1990).

Para mais detalhes sobre as motivações do estudo das distribuições, ver Schwartz (1966), onde a teoria foi sistematicamente estabelecida. Para detalhes históricos, ver Dieudonné (1981).

¹ Oliver Heaviside, 1850-1925.

² Paul Dirac, 1902-1984.

1 Aula 1 - 27/02/2019

1.1 Preliminares

Em primeiro lugar, vamos fixar a notação:

- Ω denota um aberto de $\mathbb{R}^N$;
- Se $k \in \mathbb{Z}_+$, então $C^k(\Omega)$ denota o conjunto das funções $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ que são k vezes continuamente diferenciáveis, ou seja, cujas derivadas parciais de ordem $\leq k$ existem e são contínuas. Em particular, $C^0(\Omega) = C(\Omega)$;
- $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_N) \in \mathbb{Z}^N$ denota um multi-índice
- $|\alpha| := \alpha_1 + \dots + \alpha_N$ é o comprimento do multi-índice α ;
- Se $x = (x_1, \dots, x_N) \in \mathbb{R}^N$ e $\alpha \in \mathbb{Z}_+^N$ é um multi-índice, então $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \dots x_N^{\alpha_N}$
- $\partial^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_N^{\alpha_N}}$;
- $C^\infty(\Omega) := \bigcap_{k \in \mathbb{Z}_+} C^k(\Omega)$.

A notação de multi-índices permite escrever algumas coisas com mais facilidade. Por exemplo,

$$f \in C^k(\Omega) \iff \partial^\alpha f \text{ existe e é contínua } \forall \alpha \in \mathbb{Z}_+^N; |\alpha| \leq k.$$

Outro exemplo é a fórmula de Taylor. Sejam $f \in C^k(\Omega)$, $x_0 \in \Omega$ e $h \in \mathbb{R}^N$ tal que $0 < |h| < \delta := d(x_0, \mathbb{R} \setminus \Omega)$. Então

$$f(x_0 + h) = \sum_{|\alpha| < k} \frac{(\partial^\alpha f)(x_0)}{\alpha!} h^\alpha + k \int_0^1 (1-t)^{k-1} \sum_{|\alpha|=k} \frac{(\partial^\alpha f)(x_0 + th)}{\alpha!} h^\alpha dt \quad (1.1)$$

Definição 1.1. Se $u \in C(\Omega)$ o **suporte de u** é, por definição,

$$\text{supp } u := \overline{\{x \in \Omega; u(x) \neq 0\}},$$

onde o fecho é em relação a Ω .

Note que $x \notin \text{supp } u \iff u$ se anula numa vizinhança de x .

Mais notações:

- $C_c^k(\Omega) := \{u \in C^k(\Omega); \text{supp } u \text{ é compacto}\}$;

- $C_c^\infty(\Omega) := \bigcap_{k \in \mathbb{Z}_+} C_c^k(\Omega).$

Note que $C_c^k(\Omega) \subset C_c^k(\mathbb{R}^N)$, pois basta definir as funções como sendo 0 fora de Ω .

O conjunto $C_c^\infty(\Omega)$ é denominado **Espaço das Funções de Teste**³.

Proposição 1.2. *Existe $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ tal que $\phi \geq 0$ e $\phi(0) > 0$.*

Demonstração. Vamos construir uma função com estas propriedades. Consideremos os fatos a seguir:

1. Sejam $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo, $a \in I$ e $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ contínua e diferenciável em $I \setminus \{a\}$. Vamos mostrar que se $f'(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} 0$ então f é diferenciável em a e $f'(a) = 0$. De fato, para cada $x < a$ temos que

$$|f(x) - f(a)| \leq f'(y)|x - a|$$

para algum $y \in]x, a[$. Quando $x \rightarrow a$, temos que $y \rightarrow a$ e portanto

$$\exists \lim_{x \rightarrow a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = 0.$$

Aplicando raciocínio análogo para $x > a$, segue que

$$\exists \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a) = 0.$$

Em particular, se $f \in C^1(I \setminus \{a\})$ então $f \in C^1(I)$.

2. Seja $P(t) \in \mathbb{R}[t]$ um polinômio em $\mathbb{R}$. Defina

$$u(x) = \begin{cases} P(1/x)e^{-1/x} & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{se } x \leq 0 \end{cases}.$$

Notemos que $u \in C^1(\mathbb{R} \setminus \{0\}) \cap C(\mathbb{R})$. Além disso,

$$u'(x) = \begin{cases} \frac{P(1/x) - P'(1/x)}{x^2} e^{-1/x} & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{se } x \leq 0 \end{cases}.$$

Temos que $u'(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$ e portanto $u \in C^1(\mathbb{R})$. Repetindo o argumento, segue que $u \in C^\infty(\mathbb{R})$. Em particular, temos que

$$\varphi(x) := \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{se } x \leq 0 \end{cases} \in C^\infty(\mathbb{R}).$$

³A topologia deste espaço é bastante complicada, e não será estudada no curso. Kesavan (1989) trata brevemente do assunto num apêndice. Para tratamentos mais completos, ver Rudin (1991), Trèves (1967) ou Schwartz (1966)

Consideremos agora a função $\phi(x) := \phi(1 - |x|^2)$. Esta função é tal que

- $\phi \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$, pois é uma composição de aplicações C^∞ ;
- $\phi \geq 0$, por construção;
- $\phi(0) = 1/e > 0$;
- $\text{supp } \phi$ é compacto, pois $\phi(x) = 0$ se $|x| \geq 1$.

□

Notação. Sejam $x_0 \in \mathbb{R}^N$ e $\delta > 0$. Então definimos

$$\psi_\delta(x) = \phi\left(\frac{x - x_0}{\delta}\right).$$

Notemos que $\psi_\delta \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ e que $\text{supp } \psi_\delta = B_\delta(x_0)$.

Teorema 1.3. *Sejam $u, v \in C(\Omega)$ tais que*

$$\int_{\Omega} u\varphi = \int_{\Omega} v\varphi \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega).$$

Então $u = v$.

Demonstração. Seja $h = u - v$. É claro que $h \in C(\Omega)$ e $\int_{\Omega} h\varphi = 0 \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega)$.

Notemos que para toda $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ a valores reais temos

$$\int_{\Omega} h\varphi = \int_{\Omega} (\text{Re}h)\varphi + i \int_{\Omega} (\text{Im}h)\varphi = 0,$$

o que implica

$$\int_{\Omega} (\text{Re}h)\varphi = \int_{\Omega} (\text{Im}h)\varphi = 0$$

Logo, basta considerar o caso em que h é real.

Vamos mostrar que

$$\int_{\Omega} h\varphi = 0 \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega) \text{ real} \implies h = 0.$$

Vamos argumentar por contradição. Suponhamos que existam $h \in C(\Omega)$ e $x_0 \in \Omega$ tais que $h(x_0) \neq 0$. Assumamos $h(x_0) > 0$. Então, pela continuidade de h existe $\delta > 0$ tal que $h(x) > 0$ em $B_\delta(x_0)$. Então, sendo ψ_δ como definida acima, temos que

$$0 = \int_{\Omega} h\psi_\delta = \int_{|x-x_0| \leq \delta} h\psi_\delta > 0,$$

o que é uma contradição.

□

Definição 1.4. Dados $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ aberto e $p \in [1, \infty]$ definimos $L_{loc}^p(\Omega)$ como sendo o espaço das funções $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ Lebesgue-mensuráveis tais que

$$\int_K |f|^p < \infty \quad \forall K \subset \Omega \text{ compacto}.$$

Como usual, identificamos os elementos que só diferem em um conjunto de medida nula (ou seja, $L_{loc}^p(\Omega)$ não é um conjunto de funções, mas sim de classes de equivalência).

No curso, falaremos principalmente de $L_{loc}^1(\Omega)$.

Note que

$$\begin{cases} C(\Omega) \subset L_{loc}^1(\Omega); \\ L^p(\Omega) \subset L_{loc}^1(\Omega) \quad \forall p \in [1, \infty]. \end{cases}$$

Um fato importante é que uma distribuição determina univocamente uma classe de funções em $L_{loc}^1(\Omega)$. Este é o conteúdo do seguinte teorema.

Teorema 1.5. *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um aberto e $f, g \in L_{loc}^1(\Omega)$. Se*

$$\int_{\Omega} f \varphi = \int_{\Omega} g \varphi \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega)$$

então $f = g$ q.s..

2 Aula 2 - 01/03/2019

2.1 Preliminares (continuação)

Começamos enunciando um teorema que será de grande utilidade no curso, porém cuja demonstração será omitida.

Teorema 2.1 (de Lebesgue). *Seja $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$. Então*

$$\frac{1}{m(B_r(x))} \int_{B_r(x)} f(y) dy \xrightarrow{r \rightarrow 0} f(x) \text{ q.s..}$$

Para uma discussão detalhada e a demonstração do Teorema 2.1, consultar Stein (1970).

Podemos agora demonstrar o Teorema 1.5

Demonstração do Teorema 1.5. Seja $h := f - g$. Então é claro que

$$\int_{\Omega} h(x) \varphi(x) dx = 0 \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega).$$

Fixemos $x \in \Omega$ e $\delta < d(x, \mathbb{R}^N \setminus \Omega)$. Para cada $t \in]0, \delta[$ tomemos a aplicação

$$y \mapsto \varphi\left(\frac{x-y}{t}\right)$$

onde $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ é tal que $\text{supp } \varphi \subset B_1(0)$ e $\int_{B_1(0)} \varphi(z) dz = 1$. Notemos que esta aplicação é $C_c^\infty(\Omega)$ e portanto

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\Omega} h(y) \varphi\left(\frac{x-y}{t}\right) \frac{1}{t^N} dy \\ &= \int_{\Omega} (h(y) - h(x)) \varphi\left(\frac{x-y}{t}\right) \frac{1}{t^N} dy + h(x) \int_{\Omega} \varphi\left(\frac{x-y}{t}\right) \frac{1}{t^N} dy \end{aligned}$$

Note que, de fato, fazendo a mudança de variáveis $z = \frac{x-y}{t}$, $dz = \frac{1}{t^N} dy$,

$$\int_{B_t(x)} \varphi\left(\frac{x-y}{t}\right) \frac{1}{t^N} dy = \int_{B_1(0)} \varphi(z) dz = 1.$$

Temos então que

$$h(x) = \int_{\Omega} (h(x) - h(y)) \varphi\left(\frac{x-y}{t}\right) \frac{1}{t^N} dy.$$

Agora, pondo $w := x - y$ temos

$$h(x) = \int_{B_t(0)} (h(x) - h(x-w)) \varphi\left(\frac{w}{t}\right) \frac{1}{t^N} dw =: Q_t.$$

Vamos mostrar que $Q_t \xrightarrow{t \rightarrow 0^+} 0$ q.s.. De fato:

$$\begin{aligned} |Q_t| &\leq \frac{1}{t^N} \int_{B_t(0)} |h(x) - h(x-w)| \varphi\left(\frac{w}{t}\right) dw \\ &\leq C \frac{1}{m(B_t(0))} \int_{B_t(0)} |h(x) - h(x-w)| dw \longrightarrow 0 \quad \text{q.s. pelo Teorema 2.1.} \end{aligned}$$

Logo, $h(x) = 0$ q.s.. □

2.2 Convolução

Vamos agora definir e estudar propriedades da convolução, uma operação em espaços de funções muito útil em diversos ramos da análise.

Definição 2.2. O **produto de convolução** das funções u e v em $L^1(\mathbb{R}^N)$ é a função $(u * v) : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$(u * v)(x) := \int_{\mathbb{R}^N} u(x-y)v(y) dy$$

Observação 2.3. Como a medida de Lebesgue é invariante por translações, podemos tomar $x - y$ como variável de integração:

$$\int_{\mathbb{R}^N} u(x-y)v(y) dx = \int_{\mathbb{R}^N} u(x)v(x-y) dx$$

e portanto a operação de convolução é simétrica, ou seja,

$$(u * v) = (v * u).$$

Proposição 2.4. A operação de convolução tem as seguintes propriedades:

(i) Se $u, v \in L^1(\mathbb{R}^N)$, então

$$\begin{cases} u * v \in L^1(\mathbb{R}^N) \\ \|u * v\|_1 \leq \|u\|_1 \|v\|_1 \end{cases}$$

(ii) Se $u \in L^1(\mathbb{R}^N)$ e $v \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$, então

$$\begin{cases} u * v \in L^\infty(\mathbb{R}^N) \\ \|u * v\|_\infty \leq \|u\|_1 \|v\|_\infty \end{cases}$$

Demonstração. Notemos que

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N} |(u * v)(x)| \, dx &= \int_{\mathbb{R}^N} \left| \int_{\mathbb{R}^N} u(x-y) v(y) \, dy \right| \, dx \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}^N} |u(x-y)| |v(y)| \, dy \, dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} \left(|v(y)| \int_{\mathbb{R}^N} |u(x-y)| \, dx \right) \, dy \\
&= \|u\|_1 \|v\|_1.
\end{aligned}$$

Mas

$$\int_{\mathbb{R}^N} |(u * v)(x)| \, dx = \|u * v\|_1,$$

donde segue o resultado. Analogamente, notemos que

$$\begin{aligned}
|u * v(x)| &= \left| \int_{\mathbb{R}^N} u(x-y) v(y) \, dy \right| \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^N} |u(x-y)| |v(y)| \, dy \\
&\leq \|v\|_\infty \|u\|_1,
\end{aligned}$$

o que conclui a demonstração. □

Para generalizar a proposição acima, utilizaremos o seguinte fato:

Lema 2.5. *Sejam $1 < q < \infty$ e $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$ e $C > 0$ tais que*

$$\left| \int_{\mathbb{R}^N} f(x) g(x) \, dx \right| \leq C \|g\|_q \quad \forall g \in L^q(\mathbb{R}^N).$$

Então $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$ e $\|f\|_p \leq C$.

Demonstração. Consideremos o seguinte funcional em $L^q(\mathbb{R}^N)$:

$$\begin{aligned}
T_f &: L^q(\mathbb{R}^N) \longrightarrow \mathbb{R} \\
g &\longmapsto \int_{\mathbb{R}^N} f g \, dx
\end{aligned}$$

Então, pelo Teorema de Riesz⁴ temos que $\exists h \in L^p(\mathbb{R}^N)$ tal que

$$T_f(g) = \int_{\mathbb{R}^N} h(x) g(x) \, dx \quad \forall g \in L^q(\mathbb{R}^N)$$

⁴Ver Teorema 4.11 em Brezis (2010).

com $\|T_f\|_{(L^q(\mathbb{R}^N))^*} = \|g\|_q$. Como $C_c^\infty(\mathbb{R}^N) \subset L^q(\mathbb{R}^N)$, segue que

$$\int_{\mathbb{R}^N} f g \varphi \, dx = 0 \quad \forall \varphi \in C_c^\infty$$

e portanto $f = h$ q.s. pelo Teorema 1.5. Logo, $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$. Como⁵ $\|f\|_p = \inf\{K \in \mathbb{R}; |T_f(g)| = |\int_{\mathbb{R}^N} f g| \leq K \|g\|_q\}$, segue que $\|f\|_p \leq C$. $\square$

Teorema 2.6 (Minkowski). *Sejam $u \in L^1(\mathbb{R}^N)$ e $v \in L^p(\mathbb{R}^N)$. Então*

$$\begin{cases} u * v \in L^p(\mathbb{R}^N) \\ \|u * v\|_p \leq \|u\|_1 \|v\|_p \end{cases} \quad (\text{Desigualdade de Young})$$

Demonstração. O caso $p \in \{1, \infty\}$ já foi tratado acima. Suporemos então $1 < p < \infty$.

Seja $g \in L^q(\mathbb{R}^N)$. Então

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mathbb{R}^N} (u * v)(x) g(x) \, dx \right| &\leq \int_{\mathbb{R}^N} |(u * v)(x)| |g(x)| \, dx \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^N} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |v(x-y)| |u(y)| \, dy \right) |g(x)| \, dx \\ (\text{pelo teorema de Tonelli}) \quad &= \int_{\mathbb{R}^N} |u(y)| \left| \int_{\mathbb{R}^N} |v(x-y)| |g(x)| \, dx \right| \, dy \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^N} |u(y)| \| \tau_y v \|_p \|g\|_q \, dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} |u(y)| \|v\|_p \|g\|_q \, dy \\ &= \left(\|u\|_1 \|v\|_p \right) \|g\|_q. \end{aligned}$$

Então, pelo Lema 2.5, segue que $u * v \in L^p(\mathbb{R}^N)$. $\square$

Observação 2.7. O Teorema de Minkowski pode ser demonstrado de maneira mais direta com o auxílio da desigualdade de Minkowski. Ver Teoremas 8.7 e 6.19 em Folland (1999). Para uma versão mais geral, ver Teorema 4.3 (Desigualdade de Young) em Lieb e Loss (2001).

O a noção do produto de convolução de duas funções pode ser estendida para outros contextos. Por exemplo, se $u, v \in C(\mathbb{R}^N)$ e pelo menos uma delas tem suporte compacto, o produto de convolução fica bem definido, pois existe a integral

$$\int_{\mathbb{R}^N} u(x-y) v(y) \, dy =: (u * v)(x).$$

⁵Ver Bachman e Narici (2000).

Neste caso, temos $u * v \in C(\mathbb{R}^N)$. De fato, suponhamos sem perda de generalidade que v tem suporte compacto. Sendo x_0 um ponto arbitário de $\mathbb{R}^N$, vamos mostrar que $u * v$ é contínua em x_0 :

Seja $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência em $\mathbb{R}^N$ tal que $x_n \rightarrow x_0$. Então, por continuidade de u e v ,

$$u(x_n - y)v(y) \rightarrow u(x_0 - y)v(y) \quad \forall y \in \mathbb{R}^N$$

Então, sendo $K := \text{supp } v$, temos que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} u(x_n - y)v(y) \, dy &= \int_K u(x_n - y)v(y) \, dy \\ &\longrightarrow \int_K u(x_0 - y)v(y) \, dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} u(x_0 - y)v(y) \, dy \end{aligned}$$

Notemos que

$$\{x_n - y; n \in \mathbb{N}, y \in K\} \subset (\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \cup \{x_0\}) \setminus K$$

também é compacto.

Em geral, se $u \in C^j(\mathbb{R}^N)$ e $v \in C(\mathbb{R}^N)$, pelo menos uma delas com suporte compacto, então

$$\begin{aligned} u * v &\in C^j(\mathbb{R}^N); \\ \partial^\alpha(u * v) &= (\partial^\alpha u) * v \quad \forall \alpha \in \mathbb{Z}_+^N; |\alpha| \leq j. \end{aligned}$$

Notação.

$$L_c^1(\mathbb{R}^N) := \left\{ f \in L^1(\mathbb{R}^N); f = 0 \text{ q.s. no complementar de um compacto} \right\}.$$

Da mesma forma, se $u \in C^j(\mathbb{R}^N)$ e $v \in L_c^1(\mathbb{R}^N)$, então

$$(u * v)(x) = \int_{\mathbb{R}^N} u(x - y)v(y) \, dy$$

e vale que

$$\begin{aligned} (u * v) &\in C^j(\mathbb{R}^N); \\ \partial^\alpha(u * v) &= (\partial^\alpha u) * v \quad \forall \alpha \in \mathbb{Z}_+^N; |\alpha| \leq j. \end{aligned}$$

Observação 2.8. Os exemplos acima evidenciam uma das propriedades mais úteis da convolução: o produto $u * v$ **herda a regularidade** do fator mais regular. Isto será útil no estudo da regularização que faremos adiante.

Teorema 2.9. *Sejam $u \in C(\mathbb{R}^N)$ e $v \in L_c^1(\mathbb{R}^N)$ tal que $v = 0$ q.s. em $\mathbb{R}^N \setminus K$, onde K é um compacto. Então*

$$\text{supp}(u * v) \subset \text{supp } u + K.$$

Em particular, se $v \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ então

$$\text{supp}(u * v) \subset \text{supp } u + \text{supp } v.$$

Demonstração. É claro que $\text{supp } u + K$ é fechado em $\mathbb{R}^N$. Se $x_0 \notin \text{supp } u + K$ então $\exists \delta > 0$ tal que

$$|x - x_0| < \delta \implies x \notin \text{supp } u + K$$

Agora, se $|x - x_0| < \delta$ e $y \in K$ então $x - y \notin \text{supp } u$. Assim,

$$\begin{aligned} |x - x_0| < \delta \implies (u * v)(x) &= \int_K u(x - y) v(y) \, dy = 0 \\ \implies x &\notin \text{supp } u. \end{aligned}$$

□

A seguir, definimos uma classe de objetos que tem papel fundamental nas técnicas de regularização. A ideia da regularização é aproximar funções que podem ser bastante irregulares (em L^p , por exemplo) por funções muito regulares. Como estudaremos adiante, isto é feito mediante o produto de convolução da função que queremos aproximar com os elementos de uma família conveniente de *mollifiers*, que definimos a seguir.

Definição 2.10 (Família de *mollifiers*). Seja $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ tal que

- $\text{supp } \psi \subset \overline{B_1(0)}$;
- $\psi \geq 0$;
- $\int_{B_1(0)} \psi(x) \, dx = 1$;

Se $\varepsilon > 0$, seja

$$\psi_\varepsilon := \frac{1}{\varepsilon^N} \psi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right).$$

Famílias de funções $(\psi_\varepsilon)_{\varepsilon > 0}$ com essas propriedades são ditas **famílias de mollifiers**.

Proposição 2.11. *As famílias de mollifiers tem as seguintes propriedades, $\forall \varepsilon > 0$:*

- $\psi_\varepsilon \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$;

- $\text{supp } \psi_\varepsilon \subset \overline{B_\varepsilon(0)}$;
- $\psi_\varepsilon > 0$;
- $\int_{B_\varepsilon(0)} \psi_\varepsilon(x) \, dx = 1$.

Observação 2.12. Se $f \in L^1_c(\mathbb{R}^N)$, $f = 0$ q.s. em $\mathbb{R}^N \setminus K$, então $\text{supp}(\psi_\varepsilon * f) \subset \{|x| \leq \varepsilon\} + K$ e $\psi_\varepsilon * f \in C^\infty_c(\mathbb{R}^N)$.

2.3 Partições da unidade

A esta altura, já está bastante evidente a importância das funções de suporte compacto. O próximo teorema nos dá uma ferramenta para substituir uma função arbitrária por uma de suporte compacto.

Teorema 2.13. *Seja $K \subset \Omega$, sendo K compacto e Ω aberto. Então $\exists \varphi \in C^\infty_c(\mathbb{R}^N)$ tal que $0 \leq \varphi \leq 1$ e $\varphi = 1$ em uma vizinhança de K .*

Demonstração. Demonstraremos o teorema construindo uma função que satisfaça as hipóteses. Para isso, usaremos o produto de convolução e a existência de funções de teste.

A ideia é mostrar que a convolução de uma função de teste conveniente com a função característica de um compacto "um pouco maior" que K satisfaz as propriedades.

Seja $\varepsilon > 0$ tal que

$$\varepsilon < \frac{1}{4} d(K, \mathbb{C}\Omega).$$

Para cada $\delta > 0$, seja

$$K_\delta := \{x \in \mathbb{R}^N; d(x, K) \leq \delta\},$$

e seja ν a função característica de $K_{2\varepsilon}$.

Pela Proposição 1.2, existe $\psi \in C^\infty_c(B_1(0))$ tal que $\int \psi(x) \, dx = 1$. Então, como já vimos, $\psi_\varepsilon := \frac{1}{\varepsilon^N} \psi(x/\varepsilon)$ é tal que $\text{supp } \psi_\varepsilon \subset B_\varepsilon(0)$ e $\int \psi_\varepsilon(x) \, dx = 1$. Então temos que⁶

$$\varphi(x) := (\psi_\varepsilon * \nu)(x) = \int_{K_{2\varepsilon}} \psi_\varepsilon(x - y) \, dy \in C^\infty(\mathbb{R}^N),$$

com

$$\text{supp } \varphi \subset B_\varepsilon(0) + K_{2\varepsilon} = K_{3\varepsilon} \subset \Omega.$$

⁶Notemos que fato de que o argumento da função de teste aparece transladado na integral que define a convolução é fundamental.

Como $K_{3\varepsilon}$ é compacto, temos que $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$. É claro que $\varphi \geq 0$. Além disso, como a medida de Lebesgue é invariante por translações, temos que

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}^N \quad \varphi(x) &\leq \int_{\mathbb{R}^N} \psi_\varepsilon(x-y) \, dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} \psi_\varepsilon(y) \, dy = 1. \end{aligned}$$

Por fim, vamos mostrar que $\varphi = 1$ em K_ε . De fato, notemos que

$$\begin{aligned} 1 - \varphi(x) &= \int_{|y| \leq \varepsilon} \psi_\varepsilon(y) \, dy - \int_{|y| \leq \varepsilon} v(x-y) \psi_\varepsilon(y) \, dy \\ &= \int_{|y| \leq \varepsilon} (1 - v(x-y)) \psi_\varepsilon(y) \, dy. \end{aligned}$$

Mas se $x \in K_\varepsilon$ e $|y| \leq \varepsilon$ então $x-y \in K_{2\varepsilon}$ e portanto $v(x-y) = 1$. Logo, $\varphi(x) = 1$. $\square$

Definição 2.14. Uma função com as propriedades da função φ construída no Teorema 2.13 é dita uma **função de corte**.

3 Aula 3 - 08/03/2019

3.1 Partições da unidade (continuação)

Vamos estimar as derivadas da função de corte construída no Teorema 2.13:

$$\varphi(x) = (\chi_{2\varepsilon} * \psi_\varepsilon)(x).$$

Temos:

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= \int_{K_{2\varepsilon}} \psi_\varepsilon(x-y) dy \\ &= \int_{K_{2\varepsilon}} \frac{1}{\varepsilon^N} \psi\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right) dy.\end{aligned}$$

Como o integrando é bastante regular e tem suporte compacto, podemos derivar sob o sinal da integral. Logo,

$$(\partial^\alpha \varphi)(x) = \frac{1}{\varepsilon^{|\alpha|}} \int_{K_{2\varepsilon}} \frac{1}{\varepsilon^N} (\partial^\alpha \psi)\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right) dy$$

e portanto

$$\begin{aligned}|(\partial^\alpha \varphi)(x)| &\leq \frac{1}{\varepsilon^{|\alpha|}} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{\varepsilon^N} \left| (\partial^\alpha \psi)\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right) \right| dy \\ &= \frac{1}{\varepsilon^{|\alpha|}} \int_{\mathbb{R}^N} |(\partial^\alpha \psi)(z)| dz.\end{aligned}$$

Seja

$$C_\alpha := \int_{\mathbb{R}^N} |(\partial^\alpha \psi)(z)| dz.$$

Então concluímos que

$$|(\partial^\alpha \varphi)(x)| \leq \frac{1}{\varepsilon^{|\alpha|}} C_\alpha \quad \forall \alpha \in \mathbb{Z}_+^N, \forall x \in \mathbb{R}^N. \quad (3.1)$$

Teorema 3.1. *Sejam $\Omega_1, \dots, \Omega_n \subset \mathbb{R}^N$ abertos e $\varphi \in C_c^\infty(\Omega_1 \cup \dots \cup \Omega_n)$. Então para cada $j \in \{1, \dots, n\}$ $\exists \varphi_j \in C_c^\infty(\Omega_j)$ tais que $\varphi = \varphi_1 + \dots + \varphi_n$. Se $\varphi \geq 0$, podemos tomar $\varphi_j \geq 0$ para todo j .*

Demonstração. Por hipótese, temos que $\text{supp } \varphi \subset \bigcup_1^n \Omega_j$. Então para cada $x \in \text{supp } \varphi$ existem $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ e $r_x > 0$ tais que $\overline{B_{r_x}(x)} \subset \Omega_j$. Dessa forma,

$$\text{supp } \varphi \subset \bigcup_{x \in \text{supp } \varphi} B_{r_x}(x).$$

Então por compacidade existem $x_1, \dots, x_k \in \text{supp } \varphi$ tais que

$$\text{supp } \varphi \subset \bigcup_1^k B_{r_{x_j}}(x_j).$$

Para cada $l \in \{1, \dots, n\}$ definimos

$$K_l := \text{reunião das bolas } \overline{B_{r_{x_j}}(x_j)} \text{ tais que } \overline{B_{r_{x_j}}(x_j)} \subset \Omega_l.$$

Desta forma, temos,

$$\text{supp } \varphi \subset \bigcup_1^n K_j, \quad K_j \subset \Omega_j \quad \forall j.$$

Pelo Teorema 2.13, para cada j existe $\psi_j \in C_c^\infty(\Omega_j)$ tal que $0 \leq \psi_j \leq 1$ com $\psi_j = 1$ em uma vizinhança de K_j . Então, definindo

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \varphi \psi_1 \in C_c^\infty(\Omega_1), \\ \varphi_2 &= \varphi \psi_2 (1 - \psi_1) \in C_c^\infty(\Omega_2), \\ &\vdots \\ \varphi_n &= \varphi \psi_n (1 - \psi_{n-1}) \dots (1 - \psi_1) \in C_c^\infty(\Omega_n), \end{aligned}$$

temos:

$$\begin{aligned} \varphi - \sum_1^n \varphi_j &= \varphi - \varphi \left(\psi_1 + \psi_2 (1 - \psi_1) + \dots + \psi_n \dots (1 - \psi_1) \right) \\ &= \varphi (1 - \psi_1) \left((1 - \psi_2) + \dots + \psi_n \dots (1 - \psi_2) \right) \\ &\vdots \\ &= \varphi (1 - \psi_1) (1 - \psi_2) \dots (1 - \psi_n) \\ &= 0, \end{aligned}$$

o que conclui a demonstração. $\square$

Corolário 3.2. *Sejam $\Omega_1, \dots, \Omega_n \subset \mathbb{R}^N$ abertos e $K \subset \Omega_1 \cup \dots \cup \Omega_n$ compacto. Então existem $\varphi_j \in C_c^\infty(\Omega_j)$ tais que $\varphi_j \geq 0$, $\sum_1^n \varphi_j \leq 1$ e $\sum_1^n \varphi_j = 1$ em uma vizinhança de K .*

Demonstração. Seja $\varphi \in C_c^\infty\left(\bigcup_1^n \Omega_j\right)$ tal que $0 \leq \varphi \leq 1$ e $\varphi = 1$ em uma vizinhança de K . Tal φ existe pelo Teorema 2.13. Basta então aplicarmos o Teorema 3.1. $\square$

Definição 3.3. As funções φ_j do Corolário 3.2 são ditas uma **Partição da Unidade** no compacto K subordinada ao recobrimento $\Omega_1, \dots, \Omega_n$.

Observação 3.4. É possível falar em Partições da Unidade considerando recobrimentos infinitos. Para mais detalhes, veja Hörmander (1990).

3.2 Regularização

Seja $(\psi_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ uma família de *mollifiers*. Se $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$ definimos

$$f_\varepsilon(x) = (\psi_\varepsilon * f)(x) = \int_{\mathbb{R}^N} \psi_\varepsilon(x-y) f(y) \, dy.$$

Notemos que $f_\varepsilon \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$.

Teorema 3.5.

(i) Se $u \in C^k_c(\mathbb{R}^N)$ e $u_\varepsilon := \psi_\varepsilon * u$ temos que $\partial^\alpha u_\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \partial^\alpha u$ uniformemente em $\mathbb{R}^N \, \forall \, |\alpha| \leq k$.

(ii) Se $1 \leq p \leq \infty$ e $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$ temos que $f_\varepsilon \rightarrow f$ em $L^p(\mathbb{R}^N)$ (notemos que $f_\varepsilon \in L^p \cap C^\infty$).

Demonstração.

(i) Como $\partial^\alpha u_\varepsilon = \psi_\varepsilon * (\partial^\alpha u)$, basta analisar o caso $\alpha = 0$. Vamos mostrar que $u_\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} u$ uniformemente em $\mathbb{R}^N$, ou seja, que $\sup |u_\varepsilon - u| \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0$.

Notemos que

$$\begin{aligned} u_\varepsilon(x) - u(x) &= \int_{\mathbb{R}^N} u(x-y) \psi_\varepsilon(y) \, dy - u(x) \int_{\mathbb{R}^N} \psi_\varepsilon(y) \, dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} (u(x-y) - u(x)) \psi_\varepsilon(y) \, dy \end{aligned}$$

e portanto

$$\begin{aligned} |u_\varepsilon(x) - u(x)| &\leq \int_{\mathbb{R}^N} |u(x-y) - u(x)| \psi_\varepsilon(y) \, dy \\ &\leq \sup_{|y| \leq \varepsilon} |u(x-y) - u(x)| \end{aligned}$$

Agora, como u é contínua então é uniformemente contínua sobre compactos. Logo, dado $\eta > 0 \, \exists \, \varepsilon_0 > 0$ tal que

$$|y| \leq \varepsilon_0 \implies |u(x-y) - u(x)| \leq \eta \quad \forall x \in \mathbb{R}^N.$$

(ii) Como $C_c(\mathbb{R}^N)$ é denso em $L^p(\mathbb{R}^N)$ para $1 \leq p < \infty$ ⁷, dados $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$ e $\eta > 0$ podemos tomar $g \in C_c(\mathbb{R}^N)$ tal que $\|f - g\|_p \leq \frac{\eta}{3}$. Assim, temos:

$$\begin{aligned} \|f_\varepsilon - f\|_p &\leq \|f_\varepsilon - g_\varepsilon\|_p + \|g_\varepsilon - g\|_p + \|g - f\|_p \\ &= \|\psi_\varepsilon * (f - g)\|_p + \|g_\varepsilon - g\|_p + \|f - g\|_p \\ &\leq \|\psi_\varepsilon\|_1 \|f - g\|_p + \|g_\varepsilon - g\|_p + \|f - g\|_p \\ &\leq \frac{2\eta}{3} + \|g_\varepsilon - g\|_p \end{aligned}$$

⁷Ver Folland (1999).

Agora, seja $K \subset \mathbb{R}^N$ um compacto tal que $\text{supp}(g_\varepsilon - g) \subset K \ \forall \varepsilon \in [0, 1[$. Pela parte (i) temos que

$$\sup_K |g_\varepsilon - g| \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0$$

e portanto

$$\|g_\varepsilon - g\|_p^p = \int_K (g_\varepsilon(x) - g(x))^p dx \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0.$$

Logo, existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que $\forall \varepsilon \in [0, \varepsilon_0[$ temos $\|g_\varepsilon - g\|_p \leq \frac{\eta}{3}$, o que conclui a demonstração. □

3.3 Distribuições

Estudaremos agora as definições e propriedades básicas das distribuições.

Notação. Se $K \in \mathbb{R}^N$ é um compacto, denotamos

$$C_c^\infty(K) := \{\varphi \in C_c^\infty; \text{supp } \varphi \subset K\}.$$

Definição 3.6. Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um aberto. Uma **distribuição** u em Ω é um funcional linear $u: C_c^\infty(\Omega) \rightarrow \mathbb{C}$ tal que $\forall K \subset \Omega$ compacto existem constantes $C > 0$ e $m \in \mathbb{Z}_+$ tais que

$$|u(\varphi)| \leq C \sum_{|\alpha| \leq m} \sup_K |\partial^\alpha \varphi| \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(K). \quad (3.2)$$

O espaço das distribuições sobre Ω é denotado por $\mathcal{D}'(\Omega)$. Se (3.2) vale para todos os compactos K com o mesmo m , a distribuição é dita de **ordem** $\leq m$. O espaço das distribuições de ordem $\leq m$ sobre Ω é denotado por $\mathcal{D}'_{(m)}(\Omega)$. Denotamos por $\mathcal{D}'_F(\Omega) := \bigcup_{m \in \mathbb{Z}_+} \mathcal{D}'_{(m)}(\Omega)$ o conjunto das distribuições de ordem finita.

Exemplo 3.7. Se $f \in L^1_{loc}(\Omega)$, então f induz de forma natural uma distribuição $T_f \in \mathcal{D}'(\Omega)$:

$$T_f(\varphi) = \int_\Omega f(x) \varphi(x) dx.$$

Se $K \subset \Omega$ é compacto e $\varphi \in C_c^\infty(K)$, então

$$|T_f(\varphi)| \leq \left| \int_\Omega |f(x)| dx \right| \sup_K |\varphi|$$

e portanto $T_f \in \mathcal{D}'_{(0)}$. □

Observação 3.8. Como $f \mapsto T_f$ é injetora (pelo Teorema 1.5), podemos identificar $L^1_{loc}(\Omega)$ com um subespaço de $\mathcal{D}'(\Omega)$.

Observação 3.9. A fórmula de Leibniz para a derivada de um produto de funções em $\mathbb{R}^N$ é

$$\partial^\alpha (fg)(x) = \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} (\partial^\beta f)(x) (\partial^{\alpha-\beta} g)(x), \quad (3.3)$$

onde $f, g \in C^\infty$ e $\alpha \in \mathbb{Z}_+^N$.

4 Aula 4 - 13/03/2019

4.1 Distribuições (continuação)

Exemplo 4.1. Sejam $x_0 \in \Omega$ e $\alpha \in \mathbb{Z}_+^N$, $|\alpha| = k$. Então a distribuição

$$\begin{aligned} T &: C_c^\infty(\Omega) \longrightarrow \mathbb{C} \\ \varphi &\longmapsto (\partial^\alpha \varphi)(x_0) \end{aligned}$$

pertence a $\mathcal{D}'_{(k)}(\Omega) \setminus \mathcal{D}'_{(k-1)}(\Omega)$. De fato, dado qualquer $K \subset \Omega$ compacto temos

$$\begin{aligned} |u(\varphi)| &= |\partial^\alpha \varphi(x_0)| \leq C_K \sup_K |\partial^\alpha \varphi| \\ &\leq C_K \sum_{|\gamma| \leq k} \sup_K |\partial^\gamma \varphi|, \end{aligned}$$

onde C_K depende apenas do compacto K em questão⁸.

Por outro lado, suponhamos que $T \in \mathcal{D}'_{(k-1)}(\Omega)$. Seja $r > 0$ tal que $\overline{B_r(x_0)} \subset \Omega$. Então existe $C > 0$ tal que

$$|T(\varphi)| \leq C \sum_{\beta \leq k-1} \sup |\partial^\beta \varphi| \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\overline{B_r(x_0)}),$$

ou seja,

$$|\partial^\alpha \varphi(x_0)| \leq C \sum_{\beta \leq k-1} \sup |\partial^\beta \varphi| \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\overline{B_r(x_0)}).$$

Fixemos $\psi \in C_c^\infty(\overline{B_r(x_0)})$ tal que $\psi(0) = 1$. Se $\delta \leq r$, seja

$$\psi_\delta(x) = (x - x_0)^\alpha \psi\left(\frac{x - x_0}{\delta}\right).$$

É claro que $\psi_\delta \in C_c^\infty(\overline{B_r(x_0)})$. Além disso,

$$\begin{aligned} \partial^\alpha \psi_\delta(x_0) &= \left(\alpha_1 \dots \alpha_N \psi\left(\frac{x - x_0}{\delta}\right) + (x - x_0)^\alpha (\partial^\alpha \psi)\left(\frac{x - x_0}{\delta}\right) \right) \Big|_{x=x_0} \\ &= \alpha! \end{aligned}$$

Agora, notemos que

$$|\beta| \leq k - 1 \implies \sup |\partial^\beta \psi_\delta| \leq C_\beta \delta,$$

⁸Como os supremos são atingidos em K , basta tomarmos C_K pequeno o suficiente para que valha a última desigualdade.

onde C_β é uma constante que depende apenas de β . De fato,

$$\begin{aligned}\partial^\beta \psi_\delta(x) &= \sum_{\gamma \leq \beta} \binom{\beta}{\gamma} \partial^\gamma (x - x_0)^\alpha \left(\partial^{\beta-\gamma} \psi \right) \left(\frac{x - x_0}{\delta} \right) \\ &= \sum_{\gamma \leq \beta} \binom{\beta}{\gamma} \frac{\alpha!}{\gamma!} (x - x_0)^{\alpha-\gamma} \frac{1}{\delta^{|\beta-\gamma|}} \left(\partial^{\beta-\gamma} \psi \right) \left(\frac{x - x_0}{\delta} \right)\end{aligned}$$

e portanto

$$\begin{aligned}|\partial^\beta \psi(x)| &\leq \sum_{\gamma \leq \beta} \binom{\beta}{\gamma} \frac{\alpha!}{\gamma!} |x - x_0|^{\alpha-\gamma} \frac{1}{\delta^{|\beta-\gamma|}} \left| \left(\partial^{\beta-\gamma} \psi \right) \left(\frac{x - x_0}{\delta} \right) \right| \\ &\leq \sum_{\gamma \leq \beta} \binom{\beta}{\gamma} \frac{\alpha!}{\gamma!} \frac{\delta^{|\alpha-\gamma|}}{\delta^{|\beta-\gamma|}} C'_\beta \\ &\leq \delta^{|\alpha-\beta|} C''_\beta \\ &= \delta C_\beta\end{aligned}$$

Assim, temos que

$$|\partial^\alpha \psi_\delta(x_0)| = \alpha! \leq \left(C \sum_{|\beta| \leq k-1} C_\beta \right) \delta \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} 0,$$

o que é absurdo. □

O próximo teorema mostra que as distribuições se comportam bem quando agindo sobre funções que dependem de parâmetros: mudar pouco o parâmetro muda pouco o valor da distribuição na função (continuidade) e essa mudança é controlada (diferenciabilidade).

Teorema 4.2. *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ e $U \subset \mathbb{R}^M$ abertos, $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ e $\Phi \in C^\infty(\Omega \times U)$ tal que*

$$\exists K \subset \Omega \text{ compacto tal que } \text{supp } \Phi(\cdot, y) \subset K \quad \forall y \in U.$$

Então $y \mapsto u(\Phi(\cdot, y))$ pertence a $C^\infty(U)$ e

$$\partial_y^\alpha u(\Phi(\cdot, y)) = u\left(\partial_y^\alpha \Phi(\cdot, y)\right).$$

Demonstração. Sejam $y_0 \in U$ e $r > 0$ tal que $\overline{B_r(y)} \subset U$. Se $h \in \mathbb{R}^N$ com $|h| \leq r$ e $x \in \Omega$ então temos, pela fórmula de Taylor (1.1) temos que

$$\begin{aligned}\Phi(x, y_0 + h) &= \Phi(x, y_0) + \sum_1^M \frac{\partial \Phi}{\partial y_j}(x, y_0) h_j \\ &\quad + 2 \int_0^1 (1-t) \sum_{|\beta|=2} \frac{1}{\beta!} \left(\partial_y^\beta \Phi \right)(x, y_0 + th) h^\beta dt\end{aligned}$$

Denotando por $I(x, y_0, h)$ o último termo no lado direito, temos que

$$\begin{aligned} \text{supp } I(\cdot, y_0, h) &\subset K \quad \forall h \in \mathbb{R}^N; |h| < r \\ |\partial_x^\alpha I(x, y_0, h)| &\leq C_\alpha |h|^2 \end{aligned}$$

Pela linearidade de u , temos

$$u(\Phi(\cdot, y_0 + h)) = u(\Phi(\cdot, y_0)) + \sum_1^M u\left(\frac{\partial \Phi}{\partial y_j}(\cdot, y_0)\right) h_j + u(I(\cdot, y_0, h)).$$

Mas

$$\begin{aligned} |u(I(\cdot, y_0, h))| &\leq C \sum_{|\alpha| \leq m} \sup_K |\partial_x^\alpha I(\cdot, y_0, h)| \\ &\leq C |h|^2, \end{aligned}$$

e portando $u(\Phi(\cdot, y))$ é diferenciável, com

$$\frac{\partial u(\Phi(\cdot, y))}{\partial y_j} = u\left(\frac{\partial \Phi(\cdot, y)}{\partial y_j}\right).$$

□

Exemplo 4.3. Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ aberto, $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \Omega$ uma sequência sem pontos de acumulação em Ω , $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{Z}_+^N$ e

$$u(\varphi) = \sum_1^\infty (\partial^{\alpha_n} \varphi)(x_n), \quad \varphi \in C_c^\infty(\Omega).$$

Como cada compacto de Ω contém apenas um número finito de pontos da sequência (x_n) , então u é uma distribuição. Mais ainda, se $K \subset \Omega$ é um compacto, denotando $A := \{n; x_n \in K\}$ temos

$$\begin{aligned} |u(\varphi)| &\leq \sum_{n \in A} |(\partial^{\alpha_n} \varphi)(x_n)| \\ &\leq \sum_{n \in A} \sup_K |\partial^{\alpha_n} \varphi| \\ &\leq \sum_{|\alpha| \leq m_K} \sup_K |\partial^\alpha \varphi| \end{aligned}$$

onde $m_K = \max\{|\alpha_n|; n \in A\}$. Logo, $u \in \mathcal{D}'_F(\Omega)$ se $\{|\alpha_n|; n \in A\}$ for limitado. □

Na definição de distribuições, (3.2) expressa uma condição de continuidade. A seguir, estudamos uma forma de tratar esta continuidade por meio de sequências.

Definição 4.4. Seja $\{\varphi_n\} \subset C_c^\infty(\Omega)$. Dizemos que $\varphi_n \rightarrow 0$ em $C_c^\infty(\Omega)$ se

- (i) $\exists K \subset \Omega$ compacto tal que $\text{supp } \varphi_n \subset K \forall n \in \mathbb{N}$.
- (ii) $\forall \alpha \in \mathbb{Z}_+^N \sup_K |\partial^\alpha \varphi_n| \rightarrow 0$ (convergência uniforme em K).

Notação: $\varphi_n \rightharpoonup 0$.

O espaço $C_c^\infty(\Omega)$ com a topologia da convergência acima era denotado por $\mathcal{D}(\Omega)$ por Laurent Schwartz. Daí a notação $\mathcal{D}'(\Omega)$ para o espaço das distribuições sobre Ω , pois as distribuições são exatamente os funcionais lineares contínuos sobre este espaço.

Teorema 4.5. *Seja $u : C_c^\infty(\Omega) \rightarrow \mathbb{C}$ um funcional linear. Então $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ se, e somente se para toda sequência $\{\varphi_n\} \subset C_c^\infty(\Omega)$ vale que*

$$\varphi_n \rightharpoonup 0 \implies u(\varphi_n) \rightarrow 0.$$

Demonstração.

($\implies$) Sejam $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$, $\{\varphi_n\} \subset C_c^\infty(\Omega)$ tal que $\varphi_n \rightharpoonup 0$ e K como em (i). Por (3.2) existem $C > 0$ e $m \in \mathbb{Z}_+$ tais que

$$|u(\varphi_n)| \leq C \sum_{|\alpha| \leq m} \sup |\partial^\alpha \varphi_n| \rightarrow 0.$$

($\impliedby$) Suponhamos que u não seja uma distribuição. Então existem um compacto $K \subset \Omega$ e uma sequência $\{\psi_n\} \subset C_c^\infty(\Omega)$ tais que

$$|u(\psi_n)| > n \sum_{|\alpha| \leq n} \sup |\partial^\alpha \psi_n| \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$, seja $a_n := |u(\psi_n)| > 0$. Podemos então definir uma nova sequência em $C_c^\infty(\Omega)$: para cada n , seja

$$\varphi_n := \frac{\psi_n}{a_n}.$$

Então $\sum_{|\alpha| \leq n} \sup |\partial^\alpha \varphi_n| \leq 1/n$, donde segue que $\sup |\partial^\alpha \varphi_n| < 1/n \rightarrow 0$. Logo, $\varphi_n \rightharpoonup 0$, mas $u(\varphi_n) = 1 \forall n \in \mathbb{N}$.

□

4.2 Extensões de distribuições

Até agora, consideramos distribuições agindo apenas em $C_c^\infty(\Omega)$. O próximo teorema mostra que é possível estender as distribuições para um espaço maior de funções que são continuamente diferenciáveis apenas um número finito de vezes. O preço a se pagar é que nem todas as distribuições podem ser estendidas, apenas as de ordem finita.

Teorema 4.6. *Seja $u \in \mathcal{D}'_{(k)}(\Omega)$. Então u se estende a um funcional linear $u : C_c^k(\Omega) \rightarrow \mathbb{C}$ tal que*

$$\forall K \subset \Omega \text{ compacto } \exists C > 0; |u(\varphi)| \leq C \sum_{|\alpha| \leq k} \sup |\partial^\alpha \varphi| \quad \forall \varphi \in C_c^k(K).$$

Demonstração. A ideia da demonstração é a seguinte: aproximaremos funções em $C_c^k(\Omega)$ por funções $C_c^\infty(\Omega)$, e definiremos o valor do funcional u como sendo o limite dos valores que u assume nos elementos da sequência. Aqui a convolução e a técnica de regularização são de fundamental importância.

Seja $\psi \in C_c^k(\Omega)$. Então pelo Teorema 3.5 existe uma sequência $\{\varphi_j\} \subset C_c^\infty(\Omega)$ tal que $\text{supp } \varphi_j \subset K \forall j \in \mathbb{N}$ para algum compacto $K \subset \Omega$ e $\partial^\alpha \varphi_j \rightarrow \partial^\alpha \psi$ uniformemente $\forall |\alpha| \leq k$. Como u é uma distribuição de ordem k , existe $C > 0$ tal que

$$|u(\varphi)| \leq C \sum_{|\alpha| \leq k} \sup |\partial^\alpha \varphi| \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\text{int}(K)).$$

Em particular,

$$|u(\varphi_j - \varphi_l)| = |u(\varphi_j) - u(\varphi_l)| \leq C \sum_{|\alpha| \leq k} \sup |\partial^\alpha \varphi_j - \partial^\alpha \varphi_l| \rightarrow 0.$$

Logo, $\{u(\varphi_j)\} \subset \mathbb{C}$ é uma sequência de Cauchy e portanto $\exists \lim u(\varphi_j) =: u(\psi)$. Logo, existe a extensão, e está bem definida, i.e., não depende da sequência tomada. De fato, seja $\{\phi_j\}$ outra sequência em $C_c^\infty(\Omega)$ com suporte em K (basta tomar a união dos suportes) e cujas derivadas convergem uniformemente para ψ . Então temos

$$|u(\varphi_j) - u(\phi_j)| \leq C \sum_{|\alpha| \leq k} \sup |\partial^\alpha \varphi_j - \partial^\alpha \phi_j| \rightarrow 0,$$

donde segue que $\lim u(\varphi_j) = \lim u(\phi_j) = u(\psi)$.

Sejam $\psi, \xi \in C_c^k(\Omega)$, $\lambda \in \mathbb{C}$ e $\{\varphi_j\}, \{\phi_j\}$ sequências C_c^∞ que aproximam ψ e ξ respectivamente. Então

$$\begin{aligned} u(\lambda\psi + \xi) &= u\left(\lim(\lambda\varphi_j + \phi_j)\right) \\ &= \lim u(\lambda\varphi_j + \phi_j) \\ &= \lambda u(\psi) + u(\xi). \end{aligned}$$

Por fim, notemos que dados $K \subset \Omega$ compacto, $\psi \in C_c^k(\Omega)$ e $\{\phi_j\} \subset C_c^\infty(\Omega)$ uma sequência que aproxima ψ , temos que

$$\begin{aligned} |u(\psi)| &= \lim |u(\phi_j)| \\ &\leq \lim \left(C \sum_{|\alpha| \leq k} \sup |\partial^\alpha \phi_j| \right) \\ &= C \sum_{|\alpha| \leq k} \sup |\partial^\alpha \psi|, \end{aligned}$$

donde segue a continuidade de u . □

Observação 4.7. Considerando o Teorema 4.6, temos em particular que $\mathcal{D}'_{(0)}(\Omega)$ é precisamente o espaço das medidas complexas em Ω .

5 Aula 5 - 15/03/2019

5.1 Extensões de distribuições (continuação)

Teorema 5.1. *Seja $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ tal que $u(\varphi) \geq 0 \ \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega); \varphi \geq 0$. Então $u \in \mathcal{D}'_{(0)}(\Omega)$, ou seja, u é uma medida de Radon.*

Demonstração. Temos que mostrar que para qualquer compacto $K \subset \Omega$ dado existe $C > 0$ tal que

$$|u(\varphi)| \leq \sup |\varphi| \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega).$$

Fixemos K e $\chi \in C_c^\infty(\Omega)$ tal que

$$0 \leq \chi \leq 1, \quad \chi = 1 \text{ em } K.$$

Se $\varphi \in C_c^\infty(K)$, é claro que $\varphi = \chi\varphi$ em K . Logo, $\forall x \in \Omega$ vale

$$\varphi(x) \leq \chi(x) \sup_K |\varphi|.$$

Suponhamos φ a valores reais. Então

$$\sup_K |\varphi| \chi \pm \varphi \geq 0.$$

Como $u \geq 0$ segue que

$$\sup_K |\varphi| u(\chi) \pm u(\varphi) \geq 0.$$

Logo,

$$|u(\varphi)| \leq \sup_K |\varphi| u(\chi),$$

ou seja, u é "de ordem 0 para funções reais".

Notemos que $u(\varphi) \in \mathbb{R}$ se $\varphi : C_c^\infty(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$. Então se φ for uma função teste arbitrária temos que

$$u(\operatorname{Re} \varphi) = \operatorname{Re} u(\varphi).$$

Logo, se $\theta \in \mathbb{R}$ temos que

$$\begin{aligned} u(\operatorname{Re}(e^{-i\theta} \varphi)) &= \operatorname{Re}(e^{-i\theta} u(\varphi)) \\ \therefore |\operatorname{Re}(e^{-i\theta} u(\varphi))| &\leq u(\chi) \sup_K |\operatorname{Re}(e^{-i\theta} \varphi)| \\ &\leq u(\chi) \sup_K |\varphi| \end{aligned}$$

A desigualdade acima vale para todo $\theta \in \mathbb{R}$. Escolhendo este número de forma que $e^{i\theta} u(\varphi) = |u(\varphi)|$ concluímos a demonstração. $\square$

5.2 Convergência de distribuições

Vamos introduzir uma noção de convergência no espaço $\mathcal{D}'(\Omega)$.

Definição 5.2. Seja $\{u_j\}_{j \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{D}'(\Omega)$. Dizemos que $u_j \rightarrow u$ em $\mathcal{D}'(\Omega)$ se

$$u_j(\varphi) \rightarrow u(\varphi) \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega).$$

Observação 5.3. A convergência de distribuições é justamente a convergência fraca* em $\mathcal{D}'(\Omega)$. Logo, $\mathcal{D}'(\Omega)$ é o espaço dos funcionais lineares contínuos sobre $C_c^\infty(\Omega)$ com a topologia fraca*.

Vale a seguinte propriedade de completude no espaço $\mathcal{D}'(\Omega)$:

Teorema 5.4. Seja $\{u_j\}_{j \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{D}'(\Omega)$ uma sequência de distribuições tal que

$$\forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega) \quad \exists u(\varphi) := \lim u_j(\varphi).$$

Então $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ e $u_j \rightarrow u$. Além disso, vale 3.2 para toda u_j com constantes C, k que independem de j . Se $\varphi_j \rightarrow \varphi$ então $u_j(\varphi_j) \rightarrow u(\varphi)$.

Demonstração. Ver Hörmander (1990), Teorema 2.1.8. □

Observação 5.5. Pelo critério de convergência de Cauchy para $\mathbb{C}$, temos que $u_j(\varphi) - u_k(\varphi) \xrightarrow{j,k \rightarrow \infty} 0$ é equivalente à existência do limite no enunciado do Teorema 5.4. Logo, vale um análogo do critério de Cauchy para $\mathcal{D}'(\Omega)$, i.e., se

$$u_j(\varphi) - u_k(\varphi) \rightarrow 0 \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega)$$

então existe o limite $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$.

Exemplo 5.6. Sejam $a \in \mathbb{R}^N$ e $\delta_a \in \mathcal{D}'(\Omega)$ dada por

$$\delta_a(\varphi) := \varphi(a), \quad \varphi \in C_c^\infty(\Omega).$$

Notemos que $\delta_0 = \delta$ (delta de Dirac). Seja $\psi_\varepsilon = (1/\varepsilon^N)\psi(x/\varepsilon)$ uma família de *mollifiers*. Então temos que

$$\psi_\varepsilon \in C_c^\infty(\Omega) \subset L_{loc}^1(\mathbb{R}^N) \subset \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$$

para todo $\varepsilon > 0$. Vamos mostrar que

$$\psi_\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \delta \text{ em } \mathcal{D}'(\Omega).$$

De fato,

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N} \psi_\varepsilon(x) \varphi(x) \, dx &= \int_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{\varepsilon^N} \psi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \varphi(x) \, dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} \psi(y) \varphi(\varepsilon y) \, dy \\ &\rightarrow \varphi(0) \int_{\mathbb{R}^N} \psi(y) \, dy,\end{aligned}$$

pelo Teorema da Convergência Dominada. $\square$

Exemplo 5.7. Dado $n \in \mathbb{N}$, seja

$$u_t(x) = t^n e^{itx} \quad x \in \mathbb{R}.$$

Então $u_t \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0$ em $\mathcal{D}'(\Omega)$. De fato, para toda função de teste na reta temos, integrando por partes $n+1$ vezes,

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} u_t(x) \varphi(x) \, dx &= t^n \int_{\mathbb{R}} e^{itx} \varphi(x) \, dx \\ &= -\frac{t^n}{it} \int_{\mathbb{R}} e^{itx} \varphi'(x) \, dx = it^{n-1} \int_{\mathbb{R}} e^{itx} \varphi'(x) \, dx \\ &\vdots \\ &= \frac{i^{n+1}}{t} \int_{\mathbb{R}} e^{itx} \varphi^{(n+1)}(x) \, dx\end{aligned}$$

Logo,

$$\left| \int_{\mathbb{R}} u_t(x) \varphi(x) \, dx \right| \leq \frac{1}{t} \int_{\mathbb{R}} |\varphi^{(n+1)}(x)| \, dx \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0.$$

$\square$

5.3 Localização

Sejam $\omega \subset \Omega \subset \mathbb{R}^N$ abertos. Temos que $C_c^\infty(\omega) \subset C_c^\infty(\Omega)$ (basta estender as funções de maneira trivial como 0 fora de ω).

Definição 5.8. Sejam $\omega \subset \Omega \subset \mathbb{R}^N$ abertos e $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$. A **restrição de u a ω** é

$$u|_\omega(\varphi) = u(\varphi), \quad \varphi \in C_c^\infty(\omega).$$

Com a noção de restrição, é natural que nos indaguemos se uma distribuição fica definida por suas restrições. Os próximos resultados dão uma resposta afirmativa a esta pergunta.

Proposição 5.9. Sejam $\Omega = \bigcup_{i \in I} \omega_i$ uma reunião de abertos e $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ tal que

$$u|_{\omega_i} = 0 \quad \forall i \in I.$$

Então $u = 0$.

Demonstração. Seja $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$. Então $\exists I_0 \subset I$ finito tal que $\text{supp } \varphi \subset \bigcup_{i \in I_0} \omega_i$. Pelo Teorema 3.1 temos que

$$\varphi = \sum_{i \in I_0} \varphi_i$$

com $\varphi_i \in C_c^\infty(\omega_i)$ para todo $i \in I_0$. Então, pela linearidade de u ,

$$u(\varphi) = \sum_{i \in I_0} u(\varphi_i) = 0.$$

□

As considerações acima permitem estender a noção de suporte de uma função para distribuições.

Definição 5.10. Seja $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$. O suporte de u é o conjunto dos pontos que não possuem vizinhança aberta onde a restrição de u se anula. Em outros termos,

$$x \notin \text{supp } u \iff \exists \omega \subset \Omega \text{ vizinhança aberta de } x \text{ tal que } u|_{\omega} = 0.$$

Observação 5.11. Se $\text{supp } u \cap \text{supp } \varphi = \emptyset$ então $u(\varphi) = 0$.

Exemplo 5.12.

$$\text{supp } \delta = \{0\}.$$

□

Teorema 5.13. Sejam $\Omega = \bigcup_{i \in I} \omega_i$ uma reunião de abertos e $u_i \in \mathcal{D}'(\omega_i)$ tais que

$$u_i|_{\omega_i \cap \omega_j} = u_j|_{\omega_i \cap \omega_j} \quad \forall i, j \in I.$$

Então $\exists! u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ tal que

$$u|_{\omega_i} = u_i.$$

Demonstração. Seja $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$. Então $\exists I_0 \subset I$ finito tal que $\text{supp } \varphi \subset \bigcup_{i \in I_0} \omega_i$ e temos $\varphi = \sum_{i \in I_0} \varphi_i$, com $\varphi_i \in C_c^\infty(\omega_i)$ para todo $i \in I_0$.

Consideremos a distribuição dada por⁹

$$u(\varphi) := \sum_{i \in I_0} u_i(\varphi_i).$$

⁹O conjunto I_0 deveria estar indexado pela função φ . Omitiremos a indexação para não sobrecarregar a notação.

Vamos mostrar que u está bem definida, ou seja, se $J_0 \subset I$ é outro subconjunto finito tal que $\text{supp } \varphi \subset \bigcup_{J_0} \omega_j$ e $\varphi = \sum_{J_0} \varphi'_j$, com $\varphi'_j \in C_c^\infty(\omega_j)$, então $\sum_{I_0} u_i(\varphi_i) = \sum_{J_0} u_j(\varphi_j)$. Tomando $I_0 \cup J_0$ nas duas somas podemos assumir que $I_0 = J_0$. Seja

$$K := \bigcup_{I_0} \text{supp}(\varphi_i - \varphi'_i) \subset \bigcup_{I_0} \omega_i.$$

É claro que K é compacto, pois é uma união finita de compactos. Pelo Corolário 3.2 existe uma partição da unidade em K , ou seja, uma família $\{\psi_i\}_{i \in I_0}$ tal que para cada $i \in I_0$ $\psi_i \in C_c^\infty(\omega_i)$ e

$$\sum_{I_0} \psi_i = 1 \text{ em } K.$$

Por hipótese, se $i, k \in I$ temos que

$$u_i(\psi_k(\varphi_i - \varphi'_i)) = u_k(\psi_k(\varphi_i - \varphi'_i)),$$

pois $\psi_k(\varphi_i - \varphi'_i) \in C_c^\infty(\omega_i \cap \omega_k)$. Logo,

$$\begin{aligned} \sum_{I_0} u_i(\varphi_i - \varphi'_i) &= \sum_{i \in I_0} u_i \left(\sum_{k \in I_0} \psi_k(\varphi_i - \varphi'_i) \right) \\ &= \sum_{i \in I_0} \sum_{k \in I_0} u_i(\psi_k(\varphi_i - \varphi'_i)) \\ &= \sum_{i \in I_0} \sum_{k \in I_0} u_k(\psi_k(\varphi_i - \varphi'_i)) \\ &= \sum_{k \in I_0} u_k \left(\psi_k \sum_{i \in I_0} (\varphi_i - \varphi'_i) \right) \\ &= \sum_{k \in I_0} u_k(\psi_k(\varphi - \varphi)) \\ &= 0 \end{aligned}$$

donde

$$u(\varphi) = \sum_{I_0} u_i(\varphi_i) = \sum_{I_0} u_i(\varphi'_i)$$

e portanto u está bem definida. Além disso, pela forma como definimos u , é imediato que $u|_{\omega_i} = u_i$ e que u é linear.

Vamos mostrar que a aplicação u é de fato uma distribuição, ou seja, que satisfaz a propriedade (3.2). Seja $K \subset \Omega$ um compacto. Então existem um recobrimento finito $K \subset \bigcup_{I_0} \omega_i$ e uma partição da unidade $\{\psi_i\}_{i \in I_0}$, com $\psi_i \in C_c^\infty(\omega_i) \forall i \in I_0$ e $\sum_{I_0} \psi_i = 1$ em K . Assim, se $\varphi \in C_c^\infty(K)$ temos

$$\varphi = \sum_{I_0} \psi_i \varphi.$$

Então, pela definição de u ,

$$u(\varphi) = \sum_{I_0} u_i(\psi_i \varphi).$$

Agora, para cada $i \in I_0$ seja $K_i = \text{supp } \psi_i \subset \omega_i$. Como $u_i \in \mathcal{D}'(\omega_i)$ então existem constantes $C_i > 0, m_i \in \mathbb{Z}_+$ tais que

$$|u_i(\Phi)| \leq C_i \sum_{|\alpha| \leq m_i} \sup |\partial^\alpha \Phi| \quad \forall \Phi \in C_c^\infty(\omega_i).$$

Então, sendo $C := \max C_i, m := \max m_i$, temos que

$$\begin{aligned} |u(\varphi)| &\leq C \sum_{i \in I_0} \sum_{|\alpha| \leq m} \sup |\partial^\alpha (\psi_i \varphi)| \\ &\leq C' \sum_{|\alpha| \leq m} \sup |\partial^\alpha \varphi|. \end{aligned}$$

□

Notemos que as distribuições definidas por funções localmente integráveis podem ser estendidas para agir em "funções de teste" que não tem suporte compacto, ou seja, para C^∞ . De fato, se $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ a expressão

$$u(\phi) = \int u \phi \, dx$$

faz sentido se $\text{supp } u \cap \text{supp } \phi \subset\subset \Omega \quad \forall \phi \in C^\infty(\Omega)$. Isto nos dá uma condição natural para tentarmos estender o domínio das distribuições.

Teorema 5.14. *Sejam $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$, $F \subset \Omega$ um fechado tal que $\text{supp } u \subset F$ e $\mathcal{E}_F := \{f \in C^\infty(\Omega); \text{supp } f \cap F \subset\subset \Omega\}$. Então $\exists! \tilde{u} : \mathcal{E}_F \longrightarrow \mathbb{C}$ linear tal que*

$$\begin{cases} \tilde{u}(\varphi) = u(\varphi) & \text{se } \varphi \in C_c^\infty(\Omega) \\ \tilde{u}(\varphi) = 0 & \text{se } \varphi \in C^\infty(\Omega) \text{ e } \text{supp } \varphi \cap F = \emptyset \end{cases}$$

Demonstração.

- Unicidade: Seja $g \in \mathcal{E}_F$. Como $\text{supp } g \cap F$ é compacto, temos que $\exists \psi \in C_c^\infty(\Omega)$ tal que $\psi = 1$ em uma vizinhança U de $\text{supp } g \cap F$. Assim,

$$g = \psi g + (1 - \psi)g.$$

Agora, seja $\tilde{v} : \mathcal{E}_F \longrightarrow \mathbb{C}$ tal que $\tilde{v}(\varphi) = 0$ se $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ ou se $\text{supp } \varphi \cap F = \emptyset$. Então

$$\tilde{v}(g) = \tilde{v}(\psi g) + \tilde{v}((1 - \psi)g) = 0,$$

pois $\psi g \in C_c^\infty(\Omega)$ e $\text{supp } (1 - \psi)g \cap F = \emptyset$. Assim, se $\tilde{u}_1$ e $\tilde{u}_2$ são duas extensões satisfazendo **i)** e **ii)**, então $\tilde{v} = \tilde{u}_1 - \tilde{u}_2 = 0$, e portanto $\tilde{u}_1 = \tilde{u}_2$.

- Existência: Toda $g \in \mathcal{E}_F$ pode ser escrita como $g = \phi_1 + \phi_2$ com $\phi_1 \in C_c^\infty(\Omega)$ e $\text{supp } \phi_2 \cap F = \emptyset$ (fizemos a construção na demonstração da unicidade usando a função de corte ψ). Então, para $g \in \mathcal{E}_F$ definimos

$$\tilde{u}(g) = \tilde{u}(\phi_1 + \phi_2) := u(\phi_1).$$

Vamos mostrar que esta aplicação está bem definida. Se $g = \psi_1 + \psi_2$ é outra decomposição de g , temos que

$$\phi_1 - \psi_1 = \psi_2 - \phi_2.$$

Então $\phi_1 - \psi_1 \in C_c^\infty(\Omega)$ e $\text{supp}(\phi_1 - \psi_1) \cap F = \text{supp}(\psi_2 - \phi_2) \cap F = \emptyset$. Logo,

$$u(\phi_1 - \psi_1) = u(\phi_1) - u(\psi_1) = 0,$$

logo $u(\phi_1) = u(\psi_1)$ e portanto a extensão está bem definida.

□

6 Aula 6 - 20/03/2019

6.1 Distribuições de suporte compacto

Estudaremos as consequências do Teorema 5.14 para o caso particular das distribuições de suporte compacto.

Sejam $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ uma distribuição de suporte compacto e $F = \text{supp } u$. Neste caso $\mathcal{E}_F = C^\infty$ e portanto u se estende a um funcional linear

$$\tilde{u} : C^\infty \longrightarrow \mathbb{C}.$$

Se $\chi \in C_c^\infty(\Omega)$ tal que $\chi = 1$ em uma vizinhança de $\text{supp } u$, então

$$\tilde{u}(\varphi) = u(\chi\varphi) \quad \forall \varphi \in C^\infty(\Omega).$$

Como $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ existem constantes $C > 0$, $k \in \mathbb{Z}_+$ tais que

$$|u(\psi)| \leq C \sum_{|\alpha| \leq k} \sup |\partial^\alpha \psi| \quad \forall \psi \in C_c^\infty(\text{supp } \chi).$$

Logo,

$$\tilde{u}(\varphi) = u(\chi\varphi) \leq C \sum_{|\alpha| \leq k} \sup |\partial^\alpha \chi\varphi| \quad \forall \varphi \in C^\infty(\Omega).$$

Então, pela fórmula de Leibniz,

$$\tilde{u}(\varphi) \leq C' \sum_{|\alpha| \leq k} \sup_{\text{supp } \chi} |\partial^\alpha \varphi| \quad \forall \varphi \in C^\infty(\Omega).$$

Faremos um pequeno abuso de notação e passaremos a denotar a extensão por u .

Conclusão: se $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ tem suporte compacto então u se estende a um funcional linear

$$u : C^\infty(\Omega) \longrightarrow \mathbb{C}$$

tal que existem $K \subset \Omega$ compacto, $C > 0$ e $k \in \mathbb{Z}_+$ tais que

$$u(\varphi) \leq C \sum_{|\alpha| \leq k} \sup_K |\partial^\alpha \varphi| \quad \forall \varphi \in C^\infty(\Omega).$$

Reciprocamente, seja $v : C^\infty \longrightarrow \mathbb{C}$ um funcional linear tal que existem $K \subset \Omega$ compacto, $C > 0$ e $k \in \mathbb{Z}_+$ tais que

$$(*) \left\{ \begin{array}{l} v(\varphi) \leq C \sum_{|\alpha| \leq k} \sup_K |\partial^\alpha \varphi| \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega). \end{array} \right.$$

Então $u := v|_{C_c^\infty(\Omega)}$ é uma distribuição de suporte contido em K e ordem $\leq k$.

Assim, concluímos que

$$\{u \in \mathcal{D}'(\Omega); \text{supp } u \text{ é compacto}\} = \{v \in \mathcal{L}(C^\infty(\Omega), \mathbb{C}); \text{ vale } (*)\} =: \mathcal{E}'(\Omega) \quad (6.1)$$

Laurent Schwartz usava a notação $\mathcal{E}(\Omega)$ para o espaço $C^\infty(\Omega)$ com a topologia gerada pelas seminormas

$$\varphi \rightarrow \sum_{|\alpha| \leq k} \sup_K |\partial^\alpha \varphi|,$$

onde K varia entre os compactos de Ω e k varia entre os inteiros não-negativos. Daí segue a notação $\mathcal{E}'(\Omega)$.

Teorema 6.1. *Seja $u \in \mathcal{E}'(\Omega)$ uma distribuição de ordem $\leq k$. Então*

$$u(\varphi) = 0 \text{ se } \partial^\alpha \varphi(x) = 0$$

$$\forall |\alpha| \leq k, \forall x \in \text{supp } u, \forall \varphi \in C^\infty(\Omega).$$

Demonstração. Sejam $K = \text{supp } u$ e $K_\varepsilon = \{x \in \Omega; d(x, K) \leq \varepsilon\}$ uma vizinhança K . Se $0 < \varepsilon < \varepsilon_0 := d(K, \partial\Omega)$ então $K_\varepsilon \subset \Omega$ e é compacto. Seja $\chi_\varepsilon \in C_c^\infty(K_\varepsilon)$ tal que $\chi_\varepsilon = 1$ em K . Recordemos (ver (3.1)) que

$$|\partial^\alpha \chi_\varepsilon| \leq \frac{C_\alpha}{\varepsilon^{|\alpha|}}.$$

Seja φ como no enunciado. Então

$$\begin{aligned} |u(\varphi)| &= |u(\chi_\varepsilon \varphi)| \\ &\leq C \sum_{|\alpha| \leq k} \sup |\partial^\alpha (\chi_\varepsilon \varphi)| \\ &\leq C' \sum_{|\alpha| \leq k} \frac{1}{\varepsilon^{k-|\alpha|}} \sup_{K_\varepsilon} |\partial^\alpha (\varphi)|. \end{aligned}$$

A conclusão do teorema seguirá se mostrarmos que

$$\frac{1}{\varepsilon^{k-|\alpha|}} \sup_{K_\varepsilon} |\partial^\alpha \varphi| \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0^+} 0 \quad \forall |\alpha| \leq k.$$

Temos dois casos a considerar:

1º caso: $|\alpha| = k$

Seja $x_\varepsilon \in K_\varepsilon$ tal que

$$\sup_{K_\varepsilon} |\partial^\alpha \varphi| = |\partial^\alpha \varphi(x_\varepsilon)|.$$

Então existe $y_\varepsilon \in K$ tal que $x_\varepsilon - y_\varepsilon \leq \varepsilon$. Por continuidade uniforme, para cada $\eta > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $\forall x, y \in K_\varepsilon$

$$|x - y| \leq \delta \implies |\partial^\alpha \varphi(x) - \partial^\alpha \varphi(y)| \leq \eta.$$

Logo, se $\varepsilon < \delta$ temos que

$$|x_\varepsilon - y_\varepsilon| \leq \varepsilon < \delta \implies |\partial^\alpha \varphi(x_\varepsilon) - \partial^\alpha \varphi(y_\varepsilon)| \leq \eta$$

Mas $\partial^\alpha \varphi(y_\varepsilon) = 0$ por hipótese, logo

$$\forall \eta > 0 \exists \varepsilon > 0; |\partial^\alpha \varphi(x)| \leq \eta \quad \forall x \in K_\varepsilon$$

donde segue que

$$\partial^\alpha \varphi(x) = 0 \text{ em } K \text{ se } |\alpha| = k.$$

2º caso: $|\alpha| < k$

Como no 1º caso, sejam x_ε o ponto onde o supremo é atingido,

$$\sup_{K_\varepsilon} |\partial^\alpha \varphi| = |\partial^\alpha \varphi(x_\varepsilon)|,$$

e $y_\varepsilon \in K$ tal que $|x_\varepsilon - y_\varepsilon| \leq \varepsilon$. Pela fórmula de Taylor (1.1),

$$\begin{aligned} \partial^\alpha \varphi(x_\varepsilon) &= \sum_{|\beta| \leq k-|\alpha|} \frac{1}{\beta!} \partial^{\alpha+\beta} \varphi(y_\varepsilon) (x_\varepsilon - y_\varepsilon)^\beta \\ &+ \sum_{|\beta| \leq k-|\alpha|} (k-|\alpha|) \int_0^1 (1-t)^{k-|\alpha|} \frac{\partial^{\alpha+\beta} \varphi(y_\varepsilon + t(x_\varepsilon - y_\varepsilon))}{\beta!} (x_\varepsilon - y_\varepsilon)^\beta dt. \end{aligned}$$

Logo,

$$|\partial^\alpha \varphi(x_\varepsilon)| \leq C \sum_{|\beta| \leq k-|\alpha|} \max_{0 \leq t \leq 1} \left\{ |\partial^{\alpha+\beta} \varphi(y_\varepsilon + t(x_\varepsilon - y_\varepsilon))| \right\} |x_\varepsilon - y_\varepsilon|^\beta,$$

donde

$$\varepsilon^{|\alpha|-k} |\partial^\alpha \varphi(x_\varepsilon)| \leq C \sum_{|\beta| \leq k-|\alpha|} \max_{0 \leq t \leq 1} \left\{ |\partial^{\alpha+\beta} \varphi(y_\varepsilon + t(x_\varepsilon - y_\varepsilon))| \right\}.$$

Mas

$$\begin{aligned} |\partial^{\alpha+\beta} \varphi(y_\varepsilon + t(x_\varepsilon - y_\varepsilon))| &= |\partial^{\alpha+\beta} \varphi(y_\varepsilon + t(x_\varepsilon - y_\varepsilon)) - \partial^{\alpha+\beta} \varphi(y_\varepsilon)| \\ &\xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0^+} 0 \end{aligned}$$

por continuidade uniforme, donde segue a conclusão do teorema.

□

Corolário 6.2. *Seja $u \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^N)$ tal que $\text{supp } u = \{0\}$. Então existem constantes $k \in \mathbb{Z}_+$ e C_α , para $|\alpha| \leq k$ tais que*

$$u(\varphi) = \sum_{|\alpha| \leq k} C_\alpha \partial^\alpha \varphi(0), \quad \varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^N).$$

Demonstração. Se $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$ temos, pela Fórmula de Taylor (1.1):

$$\varphi(x) = \sum_{|\alpha| \leq k} \frac{1}{\alpha!} \partial^\alpha \varphi(0) x^\alpha + R_k(x)$$

onde $k \in \mathbb{Z}_+$ é tal que u tem ordem $\leq k$. Temos que $\partial^\alpha R_k(0) = 0$ para todo $|\alpha| \leq k$. Então, pelo teorema anterior, $u(R_k) = 0$. Logo,

$$\begin{aligned} u(\varphi) &= \sum_{|\alpha| \leq k} \frac{1}{\alpha!} u(x^\alpha) \partial^\alpha \varphi(0) \\ &= \sum_{|\alpha| \leq k} \frac{1}{\alpha!} C_\alpha \partial^\alpha \varphi(0) \end{aligned}$$

□

6.2 Diferenciação e multiplicação por funções

Como já discutimos, uma das maiores motivações da teoria de distribuições são as restrições relacionadas à diferenciabilidade de funções, principalmente na teoria das equações diferenciais parciais. A busca por uma generalização de derivada que permitisse tratar de uma classe maior de objetos e se reduzisse à derivada usual quando aplicada a funções diferenciáveis vem, pelo menos, dos trabalhos de Sobolev¹⁰.

Estudaremos as operações de diferenciação de distribuições e de multiplicação de distribuições por funções infinitamente diferenciáveis. Estas operações aparecem de forma natural nas aplicações da teoria de distribuições.

Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um aberto e $u \in C^1(\Omega)$. Então $\frac{\partial u}{\partial x_j} \in C(\Omega)$ para $j = 1, \dots, N$ e ambas definem distribuições, pois

$$C^1(\Omega) \subset C(\Omega) \subset L^1_{loc}(\Omega) \subset \mathcal{D}'(\Omega).$$

¹⁰ Sergei Sobolev.

Se $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ temos que

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x_j}(\varphi) &= \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_j}(x) \varphi(x) \, dx \\ &= - \int_{\Omega} u(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}(x) \, dx \\ &= -u \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \right).\end{aligned}$$

Isto motiva a seguinte

Definição 6.3. Sejam $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ e $\alpha \in \mathbb{Z}_+$. Definimos a **derivada de ordem α de u** da seguinte forma:

$$(\partial^\alpha u)(\varphi) := (-1)^{|\alpha|} u(\partial^\alpha \varphi). \quad (6.2)$$

Observação 6.4. Notemos que a derivada está bem definida quando $|\alpha| = 1$, e que isto implica que podemos mudar arbitrariamente a ordem de diferenciação, de forma que a notação adotada e a definição dada fazem sentido.

Observação 6.5. Seja $\{\varphi_j\} \subset C_c^\infty(\Omega)$ tal que $\varphi_j \rightarrow 0$. Então é claro que $\partial^\alpha \varphi_j \rightarrow 0$. Logo,

$$\partial^\alpha u(\varphi_j) = (-1)^{|\alpha|} u(\partial^\alpha \varphi_j) \rightarrow 0$$

e portanto $\partial^\alpha u$ é de fato uma distribuição, pelo Teorema 4.5.

Exemplo 6.6. Função de Heaviside:

$$H(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x > 0 \\ 0, & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

É claro que $H \in L_{loc}^1(\mathbb{R}) \subset \mathcal{D}'(\mathbb{R})$. A derivada da função de Heaviside é o Delta de Dirac. De fato, $\forall \varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ temos que

$$\begin{aligned}H'(\varphi) &= -H(\varphi') = - \int_{\mathbb{R}} H(x) \varphi'(x) \, dx \\ &= - \int_0^\infty \varphi'(x) \, dx \\ &= \varphi(0) \\ &= \delta(\varphi).\end{aligned}$$

□

Exemplo 6.7. Vamos calcular as derivadas do Delta de Dirac. Dada $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$, temos que

$$\begin{aligned}(\partial^\alpha \delta)(\varphi) &= (-1)^{|\alpha|} \delta(\partial^\alpha \varphi) \\ &= (-1)^{|\alpha|} \partial^\alpha \varphi(0).\end{aligned}$$

□

Observação 6.8. Seja $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ tal que $\text{supp } u = \{0\}$. Pelo Corolário 6.2 dada $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ temos que

$$\begin{aligned}u(\varphi) &= \sum_{|\alpha| \leq k} C_\alpha \partial^\alpha \varphi(0) \\ &= \sum_{|\alpha| \leq k} (-1)^{|\alpha|} C_\alpha (\partial^\alpha \delta)(\varphi),\end{aligned}$$

ou seja, u é um combinação linear do Delta de Dirac e suas derivadas:

$$u = \sum_{|\alpha| \leq k} b_\alpha \partial^\alpha \delta.$$

7 Aula 7 - 22/03/2019

7.1 Diferenciação e multiplicação por funções (continuação)

Exemplo 7.1. A distribuição Valor Principal de $1/x$ é

$$\text{VP}[1/x](\varphi) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{|x| > \varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x} dx, \quad \varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}).$$

Temos que $\text{VP}[1/x] \in \mathcal{D}'_{(1)}(\mathbb{R})$.

Vamos mostrar que o limite de fato existe. Sejam $a > 0$ e $\varphi \in C_c^\infty([-a, a])$. Pelo Teorema Fundamental do Cálculo,

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \varphi(0) + \int_0^x \varphi'(t) dt \\ &= \varphi(0) + \left(\int_0^1 \varphi'(sx) ds \right) x. \end{aligned}$$

Logo,

$$\varphi(x) = \varphi(0) + x\psi(x),$$

com $\psi \in C^\infty(\mathbb{R})$. Notemos que, por simetria,

$$\int_{a \geq |x| > \varepsilon} \frac{\varphi(0)}{x} = 0 \quad \forall \varepsilon > 0.$$

Logo,

$$\begin{aligned} \text{VP} \left[\frac{1}{x} \right] (\varphi) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{a \geq |x| > \varepsilon} \left(\frac{\varphi(0)}{x} + \psi(x) \right) dx \\ &= \int_{-a}^a \psi(x) dx \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Notemos que

$$\begin{aligned} |\psi(x)| &\leq \sup_{[-a, a]} |\varphi'| \\ \therefore \left| \text{VP} \left[\frac{1}{x} \right] (\varphi) \right| &\leq 2a \sup_{[-a, a]} |\varphi'|. \end{aligned}$$

Por fim, notemos ainda que

$$\text{VP} \left[\frac{1}{x} \right] \Big|_{\mathbb{R} \setminus \{0\}} = \frac{1}{x} \Big|_{\mathbb{R} \setminus \{0\}}.$$

□

No exemplo acima estendemos a distribuição $1/x$, definida em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ para uma distribuição definida em toda a reta. Estender distribuições para abertos maiores, em geral, não é possível.

Exemplo 7.2. Seja $u \in \mathcal{D}'([0, \infty[)$ dada por

$$u = \sum_1^\infty \delta_{1/n}^{(n)}.$$

Suponhamos que exista $\tilde{u} \in \mathcal{D}'([-\eta, \eta])$ tal que

$$\tilde{u}|_{]0, \eta[} = u|_{]0, \eta[}.$$

Então existem constantes $C > 0$ e $m \in \mathbb{Z}_+$ tais que

$$|\tilde{u}(\varphi)| \leq C \sum_0^m \sup |\psi^{(j)}| \quad \forall \varphi \in C_c^\infty([-\eta/2, \eta/2]).$$

Mas então temos que

$$|u(\psi)| \leq C \sum_0^m \sup |\psi^{(j)}| \quad \forall \psi \in C_c^\infty([0, \eta/2]),$$

o que é absurdo. Por exemplo, seja $\eta > 2$ e consideremos uma função de corte constante em $[1/n, 1]$, com suporte em $]0, \eta/2[$. Sabemos que as derivadas da função são limitadas, então basta tomarmos n suficientemente grande. $\square$

Exemplo 7.3. Seja $u(x) = e^{1/x} \in C^\infty([0, \infty[) \subset L_{loc}^1([0, \infty[)$. Esta distribuição não pode ser estendida a uma distribuição em torno da origem. $\square$

Exemplo 7.4. Seja

$$u(x) = \log|x|, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Se $a > 0$ temos que

$$\int_{-a}^a |\log|x|| \, dx < \infty$$

e portanto $u(x) \in L_{loc}^1(\mathbb{R})$. Isto equivale a mostrar que

$$\int_0^a |\log x| \, dx < \infty.$$

De fato, seja $a \leq 1$. Temos:

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_\varepsilon^a |\log x| \, dx &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_\varepsilon^a -\log x \, dx \\ &= -a \log a + a + \varepsilon \log \varepsilon - \varepsilon \\ &\rightarrow -a \log a + a, \end{aligned}$$

pois o polinômio decresce mais rápido que o logaritmo. Logo, a distribuição $u(x) = \log|x| \in \mathcal{D}'(\mathbb{R} \setminus \{0\})$ se estende a uma distribuição $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$. $\square$

Exemplo 7.5. Vamos mostrar que

$$(\log|x|)' = \text{VP} \left[\frac{1}{x} \right]. \quad (7.1)$$

Seja $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$. Então:

$$\begin{aligned} (\log|x|)'(\varphi) &= (-\log|x|)(\varphi') \\ &= - \int_{\mathbb{R}} \log|x| \varphi'(x) dx \\ &= - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{|x| \geq \varepsilon} (\log|x|) \varphi'(x) dx \\ &= - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\int_{-\infty}^{-\varepsilon} \log(-x) \varphi'(x) dx + \int_{\varepsilon}^{\infty} \log x \varphi'(x) dx \right) \\ &= - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\log(-x) \varphi(x) \Big|_{-\infty}^{-\varepsilon} - \int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x} dx + \log x \varphi(x) \Big|_{\varepsilon}^{\infty} \right. \\ &\quad \left. - \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{\varphi(x)}{x} dx \right) \\ &= - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\log \varepsilon \varphi(-\varepsilon) - \log \varepsilon \varphi(\varepsilon) - \int_{|x| > \varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x} dx \right) \\ &= - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left((\varphi(\varepsilon) - \varphi(-\varepsilon)) \log \varepsilon + \int_{|x| > \varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x} dx \right) \\ &= \text{VP} \left[\frac{1}{x} \right](\varphi) \end{aligned}$$

pois $\varepsilon \log \varepsilon \rightarrow 0$. □

Vamos agora estudar a multiplicação de distribuições por funções C^∞

Definição 7.6. Sejam $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ e $f \in C^\infty(\Omega)$. A **multiplicação de u por f** é a distribuição definida da seguinte forma:

$$(fu)(\varphi) = u(f\varphi), \quad \varphi \in C_c^\infty(\Omega). \quad (7.2)$$

Observação 7.7. A Equação (7.2) de fato define uma distribuição. A $\mathbb{C}$ -linearidade é óbvia. Agora, sejam $K \subset \Omega$ compacto. Então existem constante $C > 0$, $m \in \mathbb{Z}_+$ tais que

$$|u(\varphi)| \leq C \sum_{|\alpha| \leq m} \sup |\partial^\alpha \varphi| \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(K).$$

Logo, como $f\varphi \in C_c^\infty(K) \forall \varphi \in C_c^\infty(K)$

$$\begin{aligned} |(f u)(\varphi) &= |u(f\varphi)| \\ &\leq \sum_{|\alpha| \leq m} \sup |\partial^\alpha (f\varphi)| \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(K) \\ &\leq C' \sum_{|\alpha| \leq m} \sup |\partial^\alpha \varphi| \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(K). \end{aligned}$$

Exemplo 7.8. Dada $f \in C^\infty(\mathbb{R})$, temos que

$$f\delta = f(0)\delta$$

□

Exemplo 7.9. Como distribuições, temos que

$$x \text{VP} \left[\frac{1}{x} \right] = 1.$$

De fato:

$$\begin{aligned} x \text{VP} \left[\frac{1}{x} \right] (\varphi) &= \text{VP} \left[\frac{1}{x} \right] (x\varphi) \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{|x| \geq \varepsilon} \frac{x\varphi(x)}{x} dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) dx \\ &= 1(\varphi). \end{aligned}$$

□

Observação 7.10. Vale a regra de Leibniz para o produto de distribuições por funções C^∞ :

$$\partial^\alpha (f u) = \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} \partial^{\alpha-\beta} f \partial^\beta u \quad (7.3)$$

Teorema 7.11. Sejam $I = (i_-, i_+) \subset \mathbb{R}$ um intervalo aberto, $x_0 \in I$ e $u \in C^1(I \setminus \{x_0\})$ tal que a derivada de u coincide com uma função $v \in L_{loc}^1(I)$ em $I \setminus \{x_0\}$. Então existem os limites

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} u(x) = a_+, \quad \lim_{x \rightarrow x_0^-} u(x) = a_-,$$

donde segue que $u \in L_{loc}^1(I)$, e vale que

$$u' = v + (a_+ - a_-)\delta_{x_0}. \quad (7.4)$$

Demonstração. Vamos mostrar a existência de a_+ . A existência de a_- é análoga. Seja $y \in I$, $y > x_0$ fixado. Então, para $x_0 < x < y$ temos que

$$u(x) = u(y) - \int_x^y v(s) \, ds$$

$$\xrightarrow{x \rightarrow x_0} u(y) - \int_{x_0}^y v(s) \, ds =: a_+.$$

Agora, se $\varphi \in C_c^\infty(I)$ temos que

$$u'(\varphi) = -u(\varphi') = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(- \int_{i_-}^{x_0 - \varepsilon} u(x) \varphi'(x) \, dx - \int_{x_0 + \varepsilon}^{i_+} u(x) \varphi'(x) \, dx \right).$$

Integrando por partes, temos que

$$\begin{aligned} u'(\varphi) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(-u(x)\varphi(x) \Big|_{i_-}^{x_0 - \varepsilon} + \int_{i_-}^{x_0 - \varepsilon} v(x)\varphi(x) \, dx \right. \\ &\quad \left. - u(x)\varphi(x) \Big|_{x_0 + \varepsilon}^{i_+} + \int_{x_0 + \varepsilon}^{i_+} v(x)\varphi(x) \, dx \right) \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(-u(x_0 - \varepsilon)\varphi(x_0 - \varepsilon) + u(x_0 + \varepsilon)\varphi(x_0 + \varepsilon) \right. \\ &\quad \left. + \int_{i_-}^{x_0 - \varepsilon} v(x)\varphi(x) \, dx + \int_{x_0 + \varepsilon}^{i_+} v(x)\varphi(x) \, dx \right) \\ &= \int_I v(x)\varphi(x) \, dx + (a_+ - a_-)\varphi(x_0). \end{aligned}$$

Logo,

$$u'(\varphi) = v(\varphi) + (a_+ - a_-)\delta(\varphi).$$

□

Observação 7.12. A Equação (7.4) mostra que a derivada no sentido de distribuições "detecta" os saltos de uma função descontínua.

Um dos resultados mais importantes do cálculo diferencial é que uma função com derivada nula é constante. As distribuições na reta também gozam desta propriedade:

Teorema 7.13. *Sejam $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo aberto e $u \in \mathcal{D}'(I)$ tal que $u' = 0$. Então u é constante.*

Demonstração. Temos

$$u'(\varphi) = -u(\varphi') = 0 \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(I).$$

Seja $\varphi \in C_c^\infty(I)$. Então φ tem primitiva em $C_c^\infty(I)$ se, e somente se φ tem média nula:

$$\exists \psi \in C_c^\infty(I); \psi' = \varphi \iff \int_I \varphi(x) dx = 0.$$

Fixemos $\chi \in C_c^\infty(I)$ tal que $\int_I \chi(x) dx = 1$ e definamos, para cada $\varphi \in C_c^\infty(I)$,

$$\tilde{\varphi}(x) = \varphi(x) - \left(\int_I \varphi(x) dx \right) \chi$$

É claro que $\tilde{\varphi} \in C_c^\infty(I)$ e tem média nula. Logo, tem primitiva $\psi \in C_c^\infty(I)$ e portanto $u(\tilde{\varphi}) = u(\psi')$. Logo,

$$\begin{aligned} u(\tilde{\varphi}) &= u(\varphi) - u\left(\left(\int_I \varphi(x) dx\right) \chi\right) = 0 \\ \therefore u(\varphi) &= u\left(\left(\int_I \varphi(x) dx\right) \chi\right) \\ &= \int_I u(\chi) \varphi(x) dx \\ &= u(\chi)(\varphi) \end{aligned}$$

donde segue que

$$u = u(\chi),$$

uma constante. □

Corolário 7.14. *Sejam $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo aberto, $a \in C^\infty(I)$, $f \in C(I)$ e $u \in \mathcal{D}'(I)$ tais que*

$$u' + au = f$$

Então $u \in C^1(I)$ e a equação é satisfeita classicamente.

Demonstração. Consideremos a equação

$$u' = f,$$

ou seja, $a = 0$. Como f é contínua, tem uma primitiva $v \in C^1(I)$ tal que

$$(u - v)' = u' - v' = f - f = 0.$$

Logo, a distribuição $u - v$ é constante, e portando $u \in C^1(I)$ (pois é a soma de duas funções de classe C^1).

Agora, seja E uma solução não-nula da equação $E' = aE$, por exemplo, $E(x) = e^{\int_{x_0}^x a(x) dx}$ para algum $x_0 \in I$ fixado. Então

$$(Eu)' = Eu' + E'u = E(u' + au) = Ef \in C(I),$$

Logo,

$$\left(Eu - \int_{x_0}^x f(y) E(y) \, dy \right)' = 0$$

e portanto, sendo $A(y) = \int_{x_0}^y a(s) \, ds$, temos

$$u = \frac{c - \int_{x_0}^x f(y) A(y) \, dy}{e^{A(x)}} \in C^1(I).$$

□

8 Aula 8 - 27/03/2019

8.1 Diferenciação e multiplicação por funções (continuação)

Como visto na aula anterior, as distribuições na reta com derivada nula são constantes. As distribuições em espaços de dimensão maior satisfazem uma regra análoga para derivadas parciais.

Teorema 8.1. *Sejam $\Omega = U \times I$, com $U \subset \mathbb{R}^{N-1}$ aberto e $I \subset \mathbb{R}$ aberto, e $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ tal que*

$$\frac{\partial u}{\partial x_N} = 0.$$

Então existe $u_0 \in \mathcal{D}'(U)$ tal que

$$u(\varphi) = \int_I u_0(\varphi(\cdot, x_N)) dx_N, \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega), \quad (8.1)$$

ou seja, u é uma distribuição em $(x_1, \dots, x_{N-1})$, e portanto independente de x_N . Em particular, se $u \in C(\Omega)$ então $u = u(\cdot, a)$ para qualquer $a \in I$.

Demonstração. Fixemos $\chi \in C_c^\infty(I)$ tal que $\int_I \chi = 1$. Para $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$, definamos

$$\tilde{\varphi}(x) = \varphi(x) - \left(\int_I \varphi(x', x_N) dx_N \right) \chi(x_N) \in C_c^\infty(\Omega).$$

Assim, temos

$$\int_I \tilde{\varphi}(x', x_N) dx_N = 0 \implies \exists \psi \in C_c^\infty(\Omega) \text{ tal que } \frac{\partial \psi}{\partial x_N} = \varphi$$

e portanto

$$u(\tilde{\varphi}) = u\left(\frac{\partial \psi}{\partial x_N}\right) = -\frac{\partial u}{\partial x_N}(\psi) = 0,$$

donde

$$u(\varphi) = u\left(\chi(x_N) \int_I \varphi(\cdot, x_N) dx_N\right).$$

Então, definindo

$$u_0(\eta) := u(\eta\chi), \quad \eta \in C_c^\infty(U)$$

temos que

$$u(\varphi) = u_0\left(\int_I \varphi(\cdot, x_N) dx_N\right).$$

Vamos verificar que, de fato,

$$u_0\left(\int_I \varphi(\cdot, x_N) dx_N\right) = \int_I u_0(\varphi(\cdot, x_N)) dx_N.$$

Para $t \in \mathbb{R}$, seja

$$\gamma(t) = \int_{-\infty}^t u_0(\varphi(\cdot, x_n)) \, dx_N - u_0 \left(\int_{-\infty}^t \varphi(\cdot, x_N) \, dx_N \right).$$

Notemos que $\gamma(t) = 0$ se $t < -M$ para algum $M > 0$ suficientemente grande (pois as funções tem suporte compacto em I). Agora, pelo Teorema 4.2 podemos derivar o segundo termo dentro de u_0 , e portanto

$$\gamma'(t) = u_0(\varphi(\cdot, t)) - u_0(\varphi(\cdot, t)) = 0 \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

ou seja, γ é constante e igual a 0, donde segue (8.1). Em particular, se $\psi \in C_c^\infty(U)$ vale que

$$u(\psi\chi) = \int_I u_0(\psi)\chi(x_N) \, dx_N = u_0(\psi).$$

Se $u \in C(\Omega)$ temos que

$$u(\psi) = \int_{U \times I} u(x', x_N) \psi(x') \chi(x_N) \, dx' \, dx_N = u_0(\psi).$$

Dado $a \in I$, seja

$$\chi_\varepsilon(x_N) = \frac{1}{\varepsilon} \chi\left(\frac{x_N - a}{\varepsilon}\right), \quad \varepsilon > 0.$$

Então

$$\begin{aligned} u(\psi) &= \int_{U \times I} u(x', x_N) \psi(x') \chi_\varepsilon(x_N) \, dx' \, dx_N = u_0(\psi) \\ &= \int_U \psi(x') \left(\int_I u(x', x_N) \chi_\varepsilon(x_N) \, dx_N \right) \, dx' \\ &\xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \int_U \psi(x') u(x', a) \, dx' \end{aligned}$$

□

Corolário 8.2. *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um aberto, e $u, f \in C(\Omega)$ tais que*

$$\frac{\partial u}{\partial x_j} = f$$

no sentido de distribuições. Então existe a derivada $\frac{\partial u}{\partial x_j}$ no sentido clássico em cada ponto.

Demonstração. Notemos que $\frac{\partial u}{\partial x_j} = f$ no sentido de distribuições significa que

$$-\int_{\Omega} u(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}(x) dx = \int_{\Omega} f(x) \varphi(x) dx \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega)$$

Agora, podemos assumir $j = N$ e $\Omega = U \times I$, como no teorema anterior. Seja

$$v(x) = \int_{\alpha}^{x_N} f(x', t) dt,$$

onde $\alpha \in I$ fixado. Então

$$\frac{\partial(u-v)}{\partial x_N} = 0 \text{ em } \mathcal{D}'(\Omega)$$

Então, pelo teorema anterior, $(u-v)(x) = g(x)$ para alguma função $g \in C(U)$. Assim, temos:

$$u(x) = g(x') + v(x),$$

donde segue que existe, no sentido clássico,

$$\frac{\partial u}{\partial x_N} = \frac{\partial v}{\partial x_N} = f.$$

□

No Teorema 7.13 caracterizamos as distribuições com derivada nula. Existe uma caracterização análoga para multiplicações:

Proposição 8.3. *Seja $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$ tal que $x_j u = 0 \quad \forall j = 1, \dots, N$. Então u é um múltiplo do delta de Dirac, ou seja, existe uma constante $c \in \mathbb{C}$ tal que $u = c\delta$.*

Demonstração. Se $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ podemos escrever¹¹

$$\varphi(x) = \varphi(0) + \sum_1^N x_j \psi_j(x), \quad \psi_j \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N).$$

Então

$$u(\varphi) = \varphi(0)u(1) + \sum_1^N (x_j u)(\psi_j) = u(1)\varphi(0) = u(1)\delta(\varphi).$$

□

Definição 8.4. Seja $P(D) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha \partial^\alpha$, com $a_\alpha \in \mathbb{C} \quad \forall \alpha \in \mathbb{Z}_+^N$ um operador diferencial parcial linear de coeficientes constantes (ODPLCC). Uma distribuição $E \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$ é dita **solução fundamental de $P(D)$** se

$$P(D)E = \delta.$$

¹¹Ver Teorema 1.1.9 em Hörmander (1990).

8.2 Alguns exemplos

Vamos aplicar as propriedades das distribuições em alguns exemplos. Começamos estudando a derivada da função característica num aberto com fronteira regular, e depois passamos ao estudo de alguns fatos da Análise Complexa.

Exemplo 8.5 (Derivada da função característica). Antes do exemplo em si, recordemos algumas definições e alguns fatos básicos.

Definição 8.6. Um aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é dito **com fronteira de classe C^1** se para cada ponto $x_0 \in \partial\Omega$ existe uma função $\rho \in C^1(X_0)$ numa vizinhança X_0 de x_0 tal que

$$\rho(x_0) = 0, \quad d\rho(x_0) \neq 0, \quad \Omega \cap X_0 = \{x \in X_0; \rho(x) < 0\}.$$

Mostra-se que existe uma função $\rho \in C^1(\mathbb{R}^N)$ tal que $\rho(\partial\Omega) = \{0\}$, $d\rho \neq 0$ em $\partial\Omega$ e $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^N; \rho(x) < 0\}$. Podemos então definir

Definição 8.7. Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um aberto de classe C^1 definido pela função ρ como observado acima. A **normal unitária exterior** é o vetor

$$\mathbf{n} = \frac{\nabla \rho}{|\nabla \rho|} \Big|_{\partial\Omega}.$$

Seja dS a medida de superfície em $\partial\Omega$. Se $F: \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^N$ é um campo vetorial de classe C^1 , então vale a fórmula da divergência:

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} F(x) \, dx = \int_{\partial\Omega} F \cdot dS. \quad (8.2)$$

Seja f de classe C^1 num aberto que contém $\overline{\Omega}$. Vamos estudar

$$\frac{\partial(f\chi)}{\partial x_j}$$

onde χ denota a função característica de Ω .

Seja $g \in C^\infty(\Omega)$, U um aberto que contém o fecho de Ω e $f \in C^1(U)$. Então temos que

$$\begin{aligned} \frac{\partial(f\chi)}{\partial x_j}(g) &= -(f\chi)\left(\frac{\partial g}{\partial x_j}\right) \\ &= -\chi\left(f\frac{\partial g}{\partial x_j}\right) \\ &= -\int_{\Omega} f(x) \frac{\partial g}{\partial x_j}(x) \, dx. \end{aligned}$$

Seja $F = (0, \dots, 0, fg, 0, \dots, 0)$. Então

$$\operatorname{div} F = g \frac{\partial f}{\partial x_j} + f \frac{\partial g}{\partial x_j}.$$

Logo, por (8.2),

$$\int_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) g(x) dx + \frac{\partial g}{\partial x_j}(x) f(x) dx = \int_{\partial\Omega} f(x) g(x) n_j(x) dS$$

e portanto

$$\begin{aligned} \frac{\partial(f\chi)}{\partial x_j}(g) &= \int_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) g(x) dx - \int_{\partial\Omega} f(x) g(x) n_j(x) dS \\ &= \left(\frac{\partial f}{\partial x_j} \chi \right)(g) - (f n_j dS). \end{aligned}$$

Assim, pondo $f = 1$, temos que

$$\frac{\partial \chi}{\partial x_j} = -n_j dS.$$

□

Exemplo 8.8 (Fórmula de Cauchy não-homogênea). Consideremos a seguinte notação:

- $z = x + iy \in \mathbb{C}$
- $\partial_z = \frac{1}{2}(\partial_x - i\partial_y)$, $dz = dx + i dy$
- $\partial_{\bar{z}} = \frac{1}{2}(\partial_x + i\partial_y)$, $d\bar{z} = dx - i dy$, (operador de Cauchy-Riemann)

Notemos que o fator $\frac{1}{2}$ nas definições acima é posto para fazer dar certo a fórmula

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy = \frac{\partial f}{\partial z} dz + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} d\bar{z}.$$

Se $\Omega \subset \mathbb{C}$ é aberto e $u \in C^1(\Omega)$ dizemos que u é *analítica* se

$$\frac{\partial u}{\partial \bar{z}} = 0 \quad \text{em } \Omega.$$

Se Ω é um aberto de classe C^1 e $f \in C^1(\Omega)$ então vale a *fórmula de Stokes*:

$$\int_{\partial\Omega} f dz = \int_{\Omega} d(f dz) = \int_{\Omega} df \wedge dz = \int_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} d\bar{z} \wedge dz. \quad (8.3)$$

Sejam $z_0 \in \Omega$ e $\varepsilon > 0$ tal que $D_\varepsilon := \{z \in \mathbb{C}; |z - z_0| \leq \varepsilon\}$. Aplicando (8.3) para

$$\frac{f(z)}{z - z_0}$$

no domínio $\Omega \setminus D_\varepsilon$ temos que

$$\int_{\Omega \setminus D_\varepsilon} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left(\frac{f(z)}{z - z_0} \right) d\bar{z} \wedge dz = \int_{\partial\Omega} \frac{f(z)}{z - z_0} dz - \int_{\partial D_\varepsilon} \frac{f(z)}{z - z_0} dz$$

Mas

$$\int_{\partial D_\varepsilon} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = \int_0^{2\pi} f(z_0 + \varepsilon e^{i\theta}) \varepsilon i e^{i\theta} d\theta \longrightarrow (2\pi i) f(z_0).$$

Por outro lado,

$$\int_{\Omega \setminus D_\varepsilon} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left(\frac{f(z)}{z - z_0} \right) d\bar{z} \wedge dz = \int_{\Omega \setminus D_\varepsilon} \frac{1}{z - z_0} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} f(z) d\bar{z} \wedge dz.$$

Mas, pelo Teorema da Convergência Dominada,

$$\int_{\Omega \setminus D_\varepsilon} \frac{1}{z - z_0} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} f(z) d\bar{z} \wedge dz \longrightarrow \int_{\Omega} \frac{1}{z - z_0} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} f(z) d\bar{z} \wedge dz.$$

De fato, $\partial f / \partial \bar{z}$ é limitada em Ω e $\frac{1}{z - z_0}$ é integrável num disco:

$$\begin{aligned} \left| \int_{|z-z_0| \leq r} \frac{1}{z - z_0} d\bar{z} \wedge dz \right| &\leq 2 \left| \int_{|z-z_0| \leq r} \frac{1}{z - z_0} dx dy \right| \\ &= 2 \int_0^{2\pi} \int_0^r \frac{1}{\rho} \rho d\rho d\theta < \infty. \end{aligned}$$

Assim, passando ao limite $\varepsilon \rightarrow 0$ temos a Fórmula de Cauchy não-homogênea:

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Omega} \frac{f(z)}{z - z_0} dz + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Omega} \frac{1}{z - z_0} \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} dz \wedge d\bar{z}. \quad (8.4)$$

□

Exemplo 8.9 (Solução fundamental do operador de Cauchy-Riemann). Sejam $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{C})$ e $\Omega \subset \mathbb{C}$ um aberto regular de classe C^1 tal que $\text{supp } \varphi \subset \Omega$. Pela Equação (8.4) temos que

$$\begin{aligned} \varphi(z_0) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Omega} \frac{1}{z - z_0} \frac{\partial \varphi}{\partial \bar{z}} dz \wedge d\bar{z} \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{C}} \frac{1}{z - z_0} \frac{\partial \varphi}{\partial \bar{z}} dx dy \\ &= \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left(\frac{1}{\pi(z - z_0)} \right) (\varphi), \end{aligned}$$

ou seja,

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left(\frac{1}{\pi(z - z_0)} \right) = \delta_{z_0}.$$

Isto é, a solução fundamental do operador de Cauchy-Riemann é

$$E_{z_0} := \frac{1}{\pi(z - z_0)}.$$

□

9 Aula 9 - 29/03/2019

9.1 Valores na fronteira para funções analíticas

Recordemos que uma função f é dita *analítica* se

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0.$$

Neste caso,

$$f' = \partial_z f = \frac{1}{2}(\partial_x f - i\partial_y f) = \partial_x f = -i\partial_y f.$$

Vamos estudar a existência de valores na fronteira para funções analíticas sob a ótica da teoria de distribuições.

Teorema 9.1. *Dados $I \subset \mathbb{R}$ limitado e $\gamma > 0$, seja*

$$R = \{x + iy \in \mathbb{C}; x \in I, 0 < y < \gamma\}.$$

Seja f analítica em R de crescimento temperado, ou seja, tal que existem constantes $C > 0$, $n \in \mathbb{N}$ tais que

$$|f(x + iy)| \leq \frac{C}{y^n}, \quad x + iy \in R.$$

Então se $\varphi \in C_c^\infty(I)$ existe

$$\lim_{y \rightarrow 0^+} \int_I f(x + iy) \varphi(x) dx \quad \forall 0 < y < \gamma$$

e a aplicação

$$\varphi \longmapsto \lim_{y \rightarrow 0^+} \int_I f(x + iy) \varphi(x) dx$$

define um elemento $f(x + 0^+) \in \mathcal{D}'_{(n+1)}(R)$. Além disso, a aplicação $f \longmapsto f(x + 0^+)$ é injetora.

Demonstração. Sob as hipóteses, vamos mostrar que existe g analítica em R , contínua em $R \cup (I + i\{0\})$ tal que $g^{(n+1)} = f$. Assumiremos este fato por enquanto.

Se $0 < y < \gamma$ e $\varphi \in C_c^\infty(I)$ então

$$\begin{aligned} \int_I f(x + iy) \varphi(x) dx &= \int_I g^{(n+1)}(x + iy) \varphi(x) dx \\ &= \int_I \partial_x^{n+1} g(x + iy) \varphi(x) dx \\ &= (-1)^{n+1} \int_I g(x + iy) \varphi^{(n+1)}(x) dx. \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}\lim_{y \rightarrow 0^+} \int_I f(x + iy) \varphi(x) dx &= (-1)^{n+1} \int_I g(x, 0) \varphi^{(n+1)}(x) dx \\ &:= \partial_x^{n+1} g(\cdot, 0)(\varphi),\end{aligned}$$

ou seja,

$$f(x + 0^+) = \partial_x^{n+1} g(\cdot, 0).$$

Vamos mostrar que uma dada f não determina duas distribuições diferentes. Suponhamos que $f(x + 0^+) = 0$. Então $g(x, 0) = \sum_0^n a_j x^j =: P(x)$. Mas então $g(z) - p(z)$ é analítica em R , contínua em $R \cup (I + i\{0\})$ e se anula em $I + i\{0\}$. Daí, pelo Princípio da Reflexão de Schwarz¹² temos que $g(z) = p(z) \forall z \in R$, donde segue que $g^{(n+1)} = 0$ e portanto $f = 0$.

Vamos agora demonstrar a existência de uma tal g . Fixemos $x_0 + iy_0 \in R$. Então

$$F(z) = \int_\gamma f,$$

onde γ é qualquer curva C^1 por partes ligando z a z_0 , define uma função analítica em R tal que $F' = f$. Notemos que F também tem crescimento temperado. De fato, dado $z = x + iy \in R$, seja γ a curva $\{(1-t)x_0 + iy_0 + tx - \} \cup \{x + i(ty + (1-t)y_0)\}$ de forma que

$$F(z) = \int_{x_0}^x f(\tau + iy_0) d\tau + \int_{y_0}^y f(x + i\tau) d\tau.$$

Logo, se $n \geq 2$

$$\begin{aligned}|F(z)| &\leq C \int_{x_0}^x \frac{1}{y_0^n} |d\tau| - \frac{1}{n-1} \tau^{-(n-1)} + C \int_{y_0}^y \frac{1}{\tau^n} |d\tau| \\ &\leq \frac{C}{y_0^n} |x - x_0| + \frac{C}{n-1} \left| \frac{1}{y^{n-1}} - \frac{1}{y_0^{n-1}} \right| \\ &\leq C_1 \left(1 + \frac{1}{y^{n-1}} \right) \\ &\leq \frac{C_2}{y^{n-1}}.\end{aligned}$$

Assim, concluímos que

$$F(z) \leq \begin{cases} \frac{C_2}{y^{n-1}} & \text{se } n \geq 2 \\ -C_2 \log y & \text{se } n = 1 \end{cases}$$

Repetindo o processo n vezes obtemos a função g . □

¹²Ver Conway (1980).

Observação 9.2. De forma análoga obtemos $f(x + i0^-)$.

Exemplo 9.3. Seja

$$f(z) = \frac{1}{z}, \quad \text{Im } z > 0.$$

Notemos que f tem crescimento temperado. Se $y > 0$, temos:

$$|f(z)| = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \leq \frac{1}{y}$$

Esta função tem valor na fronteira $y = 0$ denotado por

$$f(x + i0^+) = \frac{1}{x + i0^+}.$$

Notemos que a função $\log z$ é analítica em $\Omega := \mathbb{C} \setminus i\{\mathbb{R}_-\}$ (e em particular na região $[\text{Im } z > 0]$). Seja

$$g(z) = z \log -z.$$

Temos que

$$g''(z) = f(z) \quad \text{em } \Omega.$$

De fato, g é analítica em $[\text{Im } z > 0]$ e contínua até $\text{Im } z = 0$, com

$$g(x) = x \log |x| - x + i\pi x H(-x) = \begin{cases} x \log x - x, & \text{se } x > 0 \\ 0, & \text{se } x = 0 \\ x(\log |x| + \pi), & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

se $x \in \mathbb{R}$, onde H denota a função de Heaviside. Assim,

$$\begin{aligned} g'(x) &= \log |x| + x \text{VP} \left[\frac{1}{x} \right] - 1 + i\pi H(-x) + i\pi x \delta \\ &= \log |x| + i\pi H(-x) \end{aligned}$$

e portanto

$$g''(x) = \text{VP} \left[\frac{1}{x} \right] - i\pi \delta.$$

Logo,

$$\frac{1}{x + i0^+} = \text{VP} \left[\frac{1}{x} \right] - i\pi \delta.$$

Analogamente,

$$\frac{1}{x + i0^-} = \text{VP} \left[\frac{1}{x} \right] + i\pi \delta.$$

Temos, portanto,

$$\delta = \frac{1}{2\pi i} \left(\frac{1}{x + i0^-} - \frac{1}{x + i0^+} \right),$$

fórmula está já conhecida por Paul Dirac antes da formalização da teoria das distribuições. □

9.2 Convolução de distribuições

Já vimos o poder do produto de convolução como ferramenta auxiliar na demonstração de teoremas, possibilitando tratar de funções regulares quando conveniente. Vamos estender a definição de convolução para distribuições, de forma a ter mais esta ferramenta num contexto mais geral.

Veremos que é possível obter uma função C^∞ pela convolução de uma distribuição com uma função C^∞ se uma delas tem suporte compacto, o que permite aproximar distribuições por funções suaves. Tais aproximações são úteis na extensão de propriedades de funções suaves para distribuições.

Começamos estudando a convolução de uma distribuição com uma função, e depois passamos ao estudo da convolução de distribuições.

Definição 9.4. Sejam $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$ e $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$. Definimos $u * \varphi$ como sendo a função

$$(u * \varphi)(x) = u(\varphi(x - \cdot)).$$

Proposição 9.5. Sejam $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$ e $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$. Então $u * \varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$ e

$$\partial^\alpha(u * \varphi) = (\partial^\alpha u) * \varphi = u * (\partial^\alpha \varphi), \quad \alpha \in \mathbb{Z}_+^N.$$

Além disso,

$$\text{supp}(u * \varphi) \subset \text{supp } u + \text{supp } \varphi.$$

Demonstração. Pelo Teorema 4.2 segue que $u * \varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$ e que

$$\partial^\alpha(u * \varphi) = u * (\partial^\alpha \varphi).$$

Por outro lado, temos que:

$$\begin{aligned} \partial^\alpha(u * \varphi)(x) &= u * (\partial_x^\alpha \varphi(x - \cdot)) \\ &= u * ((-1)^{|\alpha|} \partial_y^\alpha \varphi(x - \cdot)) \\ &= (\partial^\alpha u)(\varphi(x - \cdot)) \\ &= (\partial^\alpha u) * \varphi \end{aligned}$$

Agora, seja $x_0 \notin \text{supp } u + \text{supp } \varphi$. Então existe um aberto V_0 contendo x_0 tal que

$$x \notin \text{supp } u + \text{supp } \varphi \quad \forall x \in V_0$$

pois $\text{supp } u + \text{supp } \varphi$ é fechado. Logo,

$$(x - \text{supp } \varphi) \cap \text{supp } u = \emptyset \quad \forall x \in V_0,$$

ou seja,

$$\text{supp } \varphi(x - \cdot) \cap \text{supp } u = \emptyset \quad \forall x \in V_0.$$

Assim,

$$u(\varphi(x - \cdot)) = 0 \quad \forall x \in V_0,$$

donde

$$u * \varphi(x) = 0 \quad \forall x \in V_0$$

e portanto $x_0 \notin \text{supp}(u * \nu)$. □

Observação 9.6. Segue da demonstração da Proposição 9.5 que a derivada pode ser tomada tanto em relação a x quanto em relação à variável da função $\varphi(x - \cdot)$.

Exemplo 9.7. Seja $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$. Então

$$\delta * \varphi = \varphi.$$

De fato, para todo $x \in \mathbb{R}^N$ vale que

$$(\delta * \varphi)(x) = \delta(\varphi(x - \cdot)) = \varphi(x - 0) = \varphi(x).$$

□

10 Aula 10 - 03/04/2019

10.1 Convolução de distribuições (continuação)

Notemos que ao contrário do produto de convolução de funções, a definição do produto de convolução entre uma distribuição e uma função não é simétrica, de forma que a comutatividade não faria sentido.

Vamos mostrar, no entanto, que vale uma lei de associatividade. Para isso, precisaremos de dois lemas preliminares.

Lema 10.1. *Seja $g \in C_c(\mathbb{R}^N)$. Então*

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}^N} g(hk) h^N \xrightarrow{h \rightarrow 0^+} \int_{\mathbb{R}^N} g(y) dy.$$

Demonstração. Sejam $k = (k_1, \dots, k_N) \in \mathbb{Z}^N$ e

$$A(h, k) = [hk_1 - h/2, hk_1 + h/2] \times \dots \times [hk_N - h/2, hk_N + h/2].$$

Sendo $F(h) = \{k \in \mathbb{Z}^N; A(h, k) \cap \text{supp } g \neq \emptyset\}$, temos que

$$\int_{\mathbb{R}^N} g(y) dy = \sum_{k \in F(h)} \int_{\mathbb{R}^N} g(y) \chi_{A(h, k)}(y) dy.$$

Por outro lado,

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}^N} g(hk) h^N = \sum_{k \in F(h)} \int_{\mathbb{R}^N} g(hk) \chi_{A(h, k)}(y) dy.$$

Agora, como g é contínua e tem suporte compacto é uniformemente contínua, ou seja, dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$|y - y_0| \leq \delta \implies |g(y) - g(y_0)| \leq \varepsilon.$$

Então, se $0 < h < \delta/\sqrt{N}$ temos

$$\left| \sum_{k \in F(h)} g(hk) h^N - \int_{\mathbb{R}^N} g(y) dy \right| \leq \sum_{k \in F(h)} \int_{\mathbb{R}^N} |g(hk) - g(y)| \chi_{A(h, k)} dy \rightarrow 0.$$

□

Lema 10.2. *Sejam $f \in C^k(\mathbb{R}^N)$, $g \in C_c(\mathbb{R}^N)$ e*

$$I_h(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^N} f(x - hk) g(hk) h^N.$$

Então

$$\partial^\alpha I_h(x) \xrightarrow{h \rightarrow 0^+} \partial(f * g)(x)$$

uniformemente sobre os compactos de $\mathbb{R}^N$.

Demonstração. Análoga à do Lema 10.1. □

Lema 10.3. *Sejam $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$, $g \in C_c(\mathbb{R}^N)$ e*

$$I_h(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^N} f(x - hk)g(hk)h^N.$$

Então

$$I_h \rightarrow f * g \quad \text{em } C_c^\infty(\mathbb{R}^N).$$

Demonstração. Já temos, pelo Lema 10.2, a convergência uniforme sobre compactos. Agora, notemos que

$$\text{supp } I_h \subset \text{supp } f + \text{supp } g.$$

De fato, se $x_0 \notin \text{supp } f + \text{supp } g$ então existe uma vizinhança V_0 de x_0 tal que $x \notin \text{supp } f + \text{supp } g$ para todo $x \in V_0$. Assim, se $x \in V_0$ e $hk \in \text{supp } g$ então $x - hk \notin \text{supp } f$ e portanto $I_h(x) = 0$. □

Teorema 10.4. *Sejam $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$ e $\varphi, \psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$. Então*

$$(u * \varphi) * \psi = u * (\varphi * \psi).$$

Demonstração. Seja

$$I_h(z) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^N} \varphi(z - hk)\psi(hk)h^N.$$

Pelo Lema 10.3 temos que $I_h \rightarrow \varphi * \psi$ em $C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$. Logo, se $x \in \mathbb{R}^N$, então

$$I_h(x - \cdot) \rightarrow \varphi * \psi(x - \cdot) \quad \text{em } C_c^\infty(\mathbb{R}^N).$$

Logo,

$$\begin{aligned} u * (\varphi * \psi) &= u((\varphi * \psi)(x - \cdot)) \\ &= \lim u(I_h(x - \cdot)) \\ &= \lim \sum_{k \in \mathbb{Z}^N} u(\varphi(x - \cdot - hk))\psi(hk)h^N \\ &= \lim \sum_{k \in \mathbb{Z}^N} (u * \varphi)(x - kh)\psi(hk)h^N \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} (u * \varphi)(x - y)\psi(y) \, dy \\ &= (u * \varphi) * \psi. \end{aligned}$$

□

Observação 10.5. Se $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$, adotamos a seguinte notação para facilitar e clarificar os argumentos:

$$\check{\varphi}(x) = \varphi(-x).$$

Notemos que com esta notação vale

$$u(\varphi) = (u * \check{\varphi})(0).$$

Vamos mostrar que as distribuições podem ser aproximadas por funções C_c^∞ .

Proposição 10.6. *Sejam $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$ e $\{\psi_\varepsilon\}$ uma família de mollifiers. Então*

$$u * \psi_\varepsilon \rightarrow u \quad \text{em } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N).$$

Demonstração. Seja $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$. Então temos que

$$\begin{aligned} (u * \psi_\varepsilon) * \varphi &= ((u * \psi_\varepsilon) * \check{\varphi})(0) \\ &= (u * (\psi_\varepsilon * \check{\varphi}))(0) \\ &= u((\psi_\varepsilon * \check{\varphi})(0 - \cdot)) \end{aligned}$$

Mas

$$\psi_\varepsilon * \check{\varphi} \rightarrow \check{\varphi} \quad \text{em } C_c^\infty.$$

Logo,

$$(u * \psi_\varepsilon)(\varphi) \rightarrow u(\check{\varphi}(-\cdot)) = u(\varphi)$$

□

Vamos generalizar a proposição acima para abertos quaisquer:

Teorema 10.7. *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um aberto e $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Então existe uma sequência $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset C_c^\infty(\Omega)$ tal que*

$$\varphi_n \rightarrow u \quad \text{em } \mathcal{D}'(\Omega).$$

Demonstração. Faremos a demonstração em dois passos. Primeiro, vamos mostrar que existe uma sequência de distribuições de suporte compacto que converge para u em $\mathcal{D}'(\Omega)$ para então concluir a tese.

Vamos mostrar que existe $(u_n) \subset \mathcal{E}'(\Omega)$ tal que $u_n \rightarrow u$ em $\mathcal{D}'(\Omega)$. Seja $\{K_n\}$ uma família de compactos em Ω tal que

$$K_1 \subset \text{int } K_2 \subset K_2 \subset \dots \subset K_n \nearrow \Omega.$$

Assim, dado $K \subset \Omega$ compacto, temos que $K \subset K_m$ para algum $m \in \mathbb{N}$. Seja

$$\chi_n \in C_c^\infty(\text{int } K_{n+1}), \quad \chi_n = 1 \text{ em } K_n.$$

Pondo

$$u_n = \chi_n u \in \mathcal{E}'(\Omega)$$

temos que $\text{supp } u_n \subset K_{n+1}$. Agora, se $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ então $\text{supp } \varphi \subset K_m$ para algum m . Assim,

$$\begin{aligned} u_n(\varphi) &= (\chi_n u)(\varphi) \\ &= u(\chi_n \varphi) \\ &= u(\varphi) \quad \text{se } n \geq m. \end{aligned}$$

Logo,

$$u_n(\varphi) \rightarrow u(\varphi) \quad \forall \varphi \in C_c^\infty.$$

Seja $0 < \varepsilon_0 < d(\text{supp } u_n, \mathbb{R}^N \setminus \Omega)$. Então para $\varepsilon < \varepsilon_0$ temos que, para cada $u_n \in \mathcal{E}'(\Omega)$,

$$\text{supp}(u_n * \psi_\varepsilon) \subset \text{supp } u_n + \overline{B_\varepsilon(0)} \subset \Omega.$$

Logo, $u_n * \psi_\varepsilon \in C_c^\infty(\Omega)$ e

$$u_n * \psi_\varepsilon \rightarrow u_n \quad \text{em } \mathcal{D}'(\Omega).$$

Então, para cada $n \in \mathbb{N}$ seja

$$\varphi_n = u_n * \psi_{1/n} \in C_c^\infty(\Omega).$$

Esta sequência de funções converge para u . □

Observação 10.8. Sejam $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$ e $\{\varphi_j\} \subset C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ tal que $\varphi_j \rightarrow 0$. Então

$$u * \varphi_j \rightarrow 0 \quad \text{em } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N).$$

Observação 10.9. Se $h \in \mathbb{R}^N$ e $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$, definimos

$$(\tau_h \varphi)(x) = \varphi(x - h).$$

Assim, se $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$ e $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ temos que

$$\begin{aligned} \tau_h(u * \varphi)(x) &= (u * \varphi)(x - h) \\ &= u(\varphi(x - h - \cdot)) \\ &= u(\tau_h \varphi(x - \cdot)) \\ &= u * \tau_h \varphi, \end{aligned}$$

ou seja, o produto de convolução comuta com translações.

Vamos mostrar que as propriedades vistas nas observações acima de fato caracterizam a convolução com uma distribuição.

Proposição 10.10. *Seja $U : C_c^\infty(\mathbb{R}^N) \longrightarrow C^\infty(\mathbb{R}^N)$ linear tal que*

i) *Se $\varphi_j \rightharpoonup 0$ em $C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ então $U(\varphi_j) \rightarrow 0$ em $C^\infty(\mathbb{R}^N)$;*

ii) $\tau_h U = U \tau_h \quad \forall h \in \mathbb{R}^N$.

Então existe uma única distribuição $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$ tal que $U = u$.*

Demonstração. Se tal u existir, temos que

$$u(\varphi) = (u * \check{\varphi})(0) = U(\check{\varphi})(0).$$

Então, dado U como no enunciado, definamos

$$\begin{aligned} u & : C_c^\infty(\mathbb{R}^N) \longrightarrow \mathbb{C} \\ \varphi & \longmapsto U(\check{\varphi})(0) \end{aligned}$$

Que u assim definido é linear é óbvio. Se $\varphi_j \rightharpoonup 0$ então $\check{\varphi}_j \rightharpoonup 0$ e portanto $U(\check{\varphi}_j) \rightarrow 0$. Por fim, para qualquer $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ temos que

$$\begin{aligned} U(\varphi)(-h) &= \tau_h U(\varphi)(0) \\ &= U(\tau_h \varphi)(0) \\ &= u(\tau_h \check{\varphi}) \\ &= u(\varphi(-\cdot - h)) \\ &= u * \varphi(-h), \end{aligned}$$

donde segue a tese. □

Notemos a seguinte dualidade:

$$\begin{array}{ccc|ccc} u & * & \varphi & u & * & \varphi \\ \downarrow & & \downarrow & \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N) & & C_c^\infty(\mathbb{R}^N) & \mathcal{E}(\mathbb{R}^N) & & C^\infty(\mathbb{R}^N) \end{array}$$

Todos os resultados se mantêm, em particular:

$$\varphi_j \rightarrow 0 \text{ em } C^\infty(\mathbb{R}^N) \implies u * \varphi_j \rightarrow 0 \text{ em } C_c^\infty(\mathbb{R}^N).$$

Observação 10.11. Sejam $u_1, u_2 \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$, uma delas com suporte compacto. O operador

$$\begin{aligned} U & : C_c^\infty(\mathbb{R}^N) \longrightarrow C^\infty(\mathbb{R}^N) \\ \varphi & \longmapsto u_1 * (u_2 * \varphi) \end{aligned}$$

satisfaz **i)** e **ii)** da Proposição 10.10. Logo, existe uma distribuição u tal que $u(\varphi) = u_1 * (u_2 * \varphi) \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$. Podemos então definir

$$u = u_1 * u_2$$

11 Aula 11 - 05/04/2019

11.1 Convolução de distribuições (continuação)

Passamos agora ao estudo do produto de convolução de distribuições. Pela Observação 10.11 temos a seguinte

Definição 11.1. Sejam $u_1, u_2 \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$, uma delas com suporte compacto. A **convolução de u_1 com u_2** é tal que

$$(u_1 * u_2) * \varphi = u_1 * (u_2 * \varphi) \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N).$$

Vejamos algumas propriedades do produto de convolução de distribuições.

Proposição 11.2. Sejam $u_1, u_2, u_3 \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$, duas delas com suporte compacto. Então

$$(u_1 * u_2) * u_3 = u_1 * (u_2 * u_3)$$

Demonstração. Dada $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$, temos que

$$\begin{aligned} ((u_1 * u_2) * u_3) * \varphi &= (u_1 * u_2) * (u_3 * \varphi) \\ &= u_1 * (u_2 * (u_3 * \varphi)) \\ &= u_1 * ((u_2 * u_3) * \varphi) \\ &= (u_1 * (u_2 * u_3)) * \varphi \end{aligned}$$

□

Proposição 11.3. Sejam $u_1, u_2 \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$, uma delas com suporte compacto. Então

(i) $u_1 * u_2 = u_2 * u_1$

(ii) $\text{supp}(u_1 * u_2) \subset \text{supp } u_1 + \text{supp } u_2$

Demonstração. Para mostrar que duas distribuições u e v são iguais basta mostrar que

$$u * (\varphi * \psi) = v * (\varphi * \psi) \quad \forall \varphi, \psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N),$$

pois disto segue que

$$(u * \varphi) * \psi = (v * \varphi) * \psi$$

e portanto $u * \varphi = v * \varphi$, donde seque que $u = v$. Assim, sejam $\varphi, \psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$. Então

$$\begin{aligned}
(u_1 * u_2) * (\varphi * \psi) &= u_1 * (u_2 * (\varphi * \psi)) \\
&= u_1 * ((u_2 * \varphi) * \psi) \\
&= u_1 * (\psi * (u_2 * \varphi)) \\
&= (u_1 * \psi) * (u_2 * \varphi) \\
&= (u_2 * \varphi) * (u_1 * \psi) \\
&= u_2 * (\varphi * (u_1 * \psi)) \\
&= u_2 * ((u_1 * \psi) * \varphi) \\
&= u_2 * (u_1 * (\psi * \varphi)) \\
&= (u_2 * u_1) * (\varphi * \psi),
\end{aligned}$$

o que demonstra (i).

Agora, seja $\{\psi_\varepsilon\}$ uma família de *mollifiers*. Então

$$(u_1 * u_2) * \psi_\varepsilon \rightarrow u_1 * u_2 \text{ em } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$$

e temos que

$$\begin{aligned}
\text{supp}((u_1 * u_2) * \psi_\varepsilon) &= \text{supp}(u_1 * (u_2 * \psi_\varepsilon)) \\
&\subset \text{supp } u_1 + \text{supp}(u_2 * \psi_\varepsilon) \\
&\subset \text{supp } u_1 + \text{supp } u_2 + \overline{B_\varepsilon(0)}.
\end{aligned}$$

Sejam $x_0 \notin \text{supp } u_1 + \text{supp } u_2$ e V_0 uma vizinhança de x_0 de fecho compacto em $\mathbb{R}^N \setminus (\text{supp } u_1 + \text{supp } u_2)$. Então existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que

$$(\text{supp } u_1 + \text{supp } u_2 + \overline{B_\varepsilon(0)}) \cap V_0 = \emptyset \quad \forall 0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0.$$

Então, para $\varphi \in C_c^\infty(V_0)$ temos que

$$((u_1 * u_2) * \psi_\varepsilon)(\varphi) = 0 \quad \forall 0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0.$$

Mas

$$((u_1 * u_2) * \psi_\varepsilon)(\varphi) \rightarrow (u_1 * u_2)(\varphi).$$

Logo, $u_1 * u_2 = 0$ em V_0 , donde segue que $x_0 \notin \text{supp}(u_1 * u_2)$. □

Observação 11.4. O delta de Dirac funciona como uma identidade para o produto de convolução. De fato, sejam $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$ e $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$. Então temos que

$$(\delta * u) * \varphi = \delta * (u * \varphi) = u * \varphi,$$

pois $u * \varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$.

Observação 11.5. Seja $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$. Então

$$\partial^\alpha u = u * \partial^\alpha \delta.$$

De fato, dada $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ temos:

$$\begin{aligned} (\partial^\alpha u) * \varphi &= u * (\partial^\alpha \varphi) \\ &= u * (\delta * \partial^\alpha \varphi) \\ &= u * (\partial^\alpha \delta * \varphi) \\ &= (u * \partial^\alpha \delta) * \varphi \end{aligned}$$

Observação 11.6. Sejam $u_1, u_2 \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$, uma delas com suporte compacto. Então

$$\partial^\alpha (u_1 * u_2) = (\partial^\alpha u_1) * u_2 = u_1 * (\partial^\alpha u_2).$$

De fato, pela observação anterior e pela associatividade da convolução de distribuições, temos

$$\partial^\alpha (u_1 * u_2) = (u_1 * u_2) * \partial^\alpha \delta = u_1 * (u_2 * \partial^\alpha \delta) = u_1 * (\partial^\alpha u_2).$$

A outra igualdade pode ser mostrada de modo análogo, levando-se em conta a comutatividade da convolução.

Observação 11.7. Sejam $u \in \mathcal{E}'_{(k)}$ e $\varphi \in C^m(\mathbb{R}^N)$ para algum $m \geq k$. Então

$$u * \varphi \in C^{m-k}(\mathbb{R}^N).$$

11.2 Teorema de Estrutura Local

Observação 11.8. Dado $m \in \mathbb{Z}_+$, denotamos

$$x_+^m = \begin{cases} x^m, & \text{se } x \geq 0 \\ 0, & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Com esta notação, temos que $x_+^m \in C^{m-1}(\mathbb{R})$ e

$$\frac{d^{m+1}}{dx^{m+1}} \frac{x_+^m}{m!} = \delta.$$

Observação 11.9. Seja

$$E(x) = \frac{x_{1+}^m \cdots x_{N+}^m}{m!^N} \in C^{m-1}(\mathbb{R}^N).$$

Então

$$\partial_{x_1}^{m+1} \dots \partial_{x_N}^{m+1} E = \delta.$$

Seja $u \in \mathcal{E}'_{(k)}(\mathbb{R}^N)$. Se $m-1 \geq k$ então $f = u * E \in C(\mathbb{R}^N)$ e temos que

$$\partial_{x_1}^{m+1} \dots \partial_{x_N}^{m+1} = (\partial_{x_1}^{m+1} \dots \partial_{x_N}^{m+1})(E * u) = \delta * u = u$$

Teorema 11.10. *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um aberto, $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$ e $U \subset \Omega$ de fecho compacto. Então existem $f \in C(U)$ e $m \in \mathbb{Z}_+$ tais que*

$$u|_U = \partial_{x_1}^{m+1} \dots \partial_{x_N}^{m+1} f$$

Demonstração. Seja $\chi \in C_c^\infty(\Omega)$ tal que $\chi = 1$ em U . Então $\chi u \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^N)$. Assim,

$$\chi u = \partial_{x_1}^{m+1} \dots \partial_{x_N}^{m+1} F$$

em U , onde $F \in C(\mathbb{R}^N)$. Logo,

$$\partial_{x_1}^{m+1} \dots \partial_{x_N}^{m+1} (F|_U) = u|_U.$$

□

11.3 O papel das soluções fundamentais

O seguinte teorema é de grande importância:

Teorema 11.11 (Malgrange-Ehrenpreis). *Seja $P(D) = \sum a_\alpha \partial^\alpha$ um operador diferencial parcial linear com coeficientes constantes (ODPLCC). Se $P(D) \neq 0$ então admite uma solução fundamental.*

Demonstração. Ver Folland (2011) ou Hörmander (1990). □

A importância do Teorema de Malgrange-Ehrenpreis é pelo seguinte: se E é uma solução fundamental para o operador $P(D)$, dada $f \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^N)$, temos

$$P(D)(E * f) = \delta * f = f \quad (11.1)$$

e

$$E * (P(D)f) = f \quad (11.2)$$

De (11.1) segue que $P(D)$ é localmente resolúvel, i.e., dada $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$ e dado $x_0 \in \mathbb{R}^N$ existe $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$ tal que

$$P(D)u = f$$

em uma vizinhança de x_0 . Além disso, se $f \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$ então $u \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$. De fato, seja $\chi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$, $\chi = 1$ em um aberto que contém x_0 . Defina $u = E * (\chi f)$. Então $P(D)u = \chi f = f$ em um aberto que contém x_0 .

11.4 Suporte singular

Definição 11.12. Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um aberto, $u, \in \mathcal{D}'(\Omega)$ e $x_0 \in \Omega$. Dizemos que u é C^∞ em x_0 se existe um aberto $U \subset \Omega$ tal que $x_0 \in U$ e $u|_U \in C^\infty(U)$. O **suporte singular de u** é o conjunto dos pontos que não possuem nenhuma vizinhança na qual a restrição de u é uma função C^∞ , ou seja,

$$\text{supp sing } u = \Omega \setminus \{x_0 \in \Omega; u \text{ é } C^\infty \text{ em } \Omega\}.$$

Exemplo 11.13.

$$\text{supp sing } \delta = \{0\}.$$

□

Exemplo 11.14.

$$\text{supp sing VP} \left[\frac{1}{x} \right] = \{0\}.$$

□

Valem as seguintes propriedades do suporte singular:

Proposição 11.15. Sejam $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ e $f \in C^\infty(\Omega)$. Então

- (i) $\text{supp sing } u \subset \text{supp } u$
- (ii) $\text{supp sing } \partial^\alpha u \subset \text{supp sing } u$
- (iii) $\text{supp sing } fu \subset \text{supp sing } u$

Demonstração. Seja $x \notin \text{supp } u$. Então existe uma vizinhança V de x tal que $u|_V = 0$, portanto $u|_V \in C^\infty(V)$. Logo, $x \notin \text{supp sing } u$.

Seja $x \notin \text{supp sing } u$. Então existe uma vizinhança V de x tal que $u|_V \in C^\infty(V)$, portanto $\partial^\alpha u|_V \in C^\infty(V)$. Logo, $x \notin \text{supp sing } \partial^\alpha u$.

Por fim, seja $x \notin \text{supp sing } u$. Então existe uma vizinhança V de x tal que $u|_V \in C^\infty(V)$, portanto $(fu)|_V \in C^\infty(V)$. Logo, $x \notin \text{supp sing } fu$. □

12 Aula 12 - 10/04/2019

12.1 Operadores hipoelípticos

Definição 12.1. Seja $P(D)$ um ODPLCC em $\mathbb{R}^N$. Dizemos que $P(D)$ é um **operador hipoelíptico** se

$$\text{supp sing } P(D)u = \text{supp sing } u \quad \forall u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N),$$

ou seja, para todo $U \subset \mathbb{R}^N$ aberto vale que se $P(D)u|_U \in C^\infty(U)$ então $u|_U \in C^\infty(U)$.

O seguinte teorema é uma caracterização importante dos operadores hipoelípticos:

Teorema 12.2. *Seja $P(D)$ um ODPLCC. $P(D)$ é hipoelíptico se, e somente se admite uma solução fundamental de classe C^∞ em $\mathbb{R}^N \setminus \{0\}$, ou seja, se admite uma solução fundamental com suporte singular contido em $\{0\}$.*

Demonstração. Pelo Teorema de Malgrange-Ehrenpreis, existe solução fundamental E para $P(D)$. Mas então $P(D)E = \delta$, logo $P(D)E = 0$ fora da origem e portanto E é de classe C^∞ em $\mathbb{R}^N \setminus \{0\}$, pois $P(D)$ é hipoelíptico.

Por outro lado, seja $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$ tal que $P(D)u \in C^\infty(U)$ em algum aberto $U \subset \mathbb{R}^N$. Seja B uma bola aberta com fecho contido em U . basta mostrar que u é de classe C^∞ em B . Seja $\chi \in C_c^\infty(U)$ tal que $\chi|_B = 1$. Então

$$\begin{aligned} E * P(D)(\chi u) &= (P(D)E) * \chi u \\ &= \chi u \\ &= u \quad \text{em } B \end{aligned}$$

Vamos mostrar que

$$E * (P(D)\chi u) \in C^\infty(B_1)$$

onde B_1 tem mesmo centro que B e metade do raio. Agora, pela regra de Leibniz,

$$P(D)(\chi u) = \chi P(D)u + g$$

onde $g \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^N)$, $g = 0$ em B . Mas $\chi P(D)u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$, logo

$$E * (\chi P(D)u) \in C^\infty(\mathbb{R}^N).$$

Resta mostrar que $E * g$ é de classe C^∞ em B_1 . Dado $\varepsilon > 0$ tomamos $\psi_\varepsilon \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ tal que

$$\psi_\varepsilon(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } |x| \leq \varepsilon \\ 0 & \text{se } |x| \geq 2\varepsilon \end{cases}.$$

Assim, temos que

$$E * g = (\psi_\varepsilon E) * g + ((1 - \psi_\varepsilon)E) * g.$$

Como $(1 - \psi_\varepsilon)E$ é de classe C^∞ em $\mathbb{R}^N$, o segundo termo também é. Agora, notemos que

$$\begin{aligned} \text{supp}(\psi_\varepsilon E) * g &\subset \text{supp}(\psi_\varepsilon E) + \text{supp } g \\ &\subset \{|x| \leq 2\varepsilon\} + (\mathbb{R}^N \setminus B). \end{aligned}$$

Então, se 2ε é menor que o raio de B_1 , segue que

$$\text{supp}(\psi_\varepsilon E) * g \subset \mathbb{R}^N \setminus B_1$$

e portanto $E * g$ é de classe C^∞ em B_1 . □

Observação 12.3. Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um aberto, $P(D)$ um operador hipoelítico e $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ tal que $P(D)u \in C^\infty(\Omega)$. Então $u \in C^\infty(\Omega)$. De fato, sejam $B \subset\subset \Omega$ uma bola aberta e $\chi \in C_c^\infty(\Omega)$ tal que $\chi = 1$ em B . Então $P(D)(\chi u) = P(D)u$ em B . Repetindo o argumento da demonstração do teorema, segue que $u = \chi u$ é de classe C^∞ em B . Como B é arbitrária, segue que $u \in C^\infty(\Omega)$.

Corolário 12.4. Seja $\Omega \subset \mathbb{C}$ um aberto. Então as função analíticas em Ω são as distribuições $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ tais que

$$\frac{\partial u}{\partial \bar{z}} = 0.$$

12.2 Alguns exemplos

1) Operador de Laplace:

$$P(D) = \Delta = \sum_1^N \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}$$

Recordemos a 3ª identidade de Green: Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um aberto limitado com fronteira de classe C^1 , $u \in C^2(\Omega)$ e $x \in \Omega$. Então

$$u(x) = \int_\Omega \Delta u(y) E(x-y) dy + \int_{\partial\Omega} \left(u(y) \frac{\partial E}{\partial n_y}(x-y) - E(x-y) \frac{\partial u}{\partial n_y}(y) \right) d\sigma(y),$$

onde

$$E(x) = \begin{cases} \frac{-1}{(N-2)\omega_N} \frac{1}{|x|^{N-2}} & \text{se } N \geq 3 \\ \frac{1}{2\pi} \log|x| & \text{se } N = 2 \end{cases},$$

ω_N denota a área da esfera unitária em $\mathbb{R}^N$ e $d\sigma$ denota a medida de superfície.

Sejam $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ e B uma bola aberta contendo a origem e o suporte de φ . Aplicando a 3ª identidade de Green com $\Omega = B$ obtemos

$$\varphi(0) = \int_{\Omega} E(y) \Delta \varphi(y) \, dy = E(\Delta \varphi) = (\Delta E) \varphi,$$

ou seja,

$$\Delta E = \delta.$$

A função E é chamada **potencial newtoniano** e é a solução fundamental do operador de Laplace.

2) Operador do calor:

$$P(D) = \partial_t - \Delta_x \quad \text{em } \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}.$$

A solução fundamental do operador do calor é

$$E(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{4\pi t}^N} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}, & t > 0 \\ 0, & t \leq 0 \end{cases}.$$

Proposição 12.5. $E \in L_{loc}^1(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R})$ e

$$(\partial_t - \Delta_x)E = \delta.$$

Demonstração. Usando que

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-at^2} \, dt = \left(\frac{\pi}{a}\right)^{1/2}$$

temos que a integral com respeito a x é finita quando $t > 0$. É claro que a integral com respeito a t é finita em compactos, portanto E é localmente integrável.

Que E resolve a equação do calor fora da origem é uma conta simples. Agora, dada $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R})$ temos

$$\begin{aligned} (\partial_t - \Delta_x)E(\varphi) &= E(\partial_t \varphi - \Delta_x \varphi) \\ &= \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^N} E(x, t) (\partial_t \varphi - \Delta_x \varphi) \, dx \, dt. \end{aligned}$$

Então, pelo teorema da Convergência Dominada, temos que

$$\begin{aligned}
(\partial_t - \Delta_x)E(\varphi) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^N} E(x, t) (\partial_t \varphi - \Delta_x \varphi) dx dt \\
&= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\int_{\varepsilon}^{\infty} \int_{\Omega} (\partial_t E - \Delta_x E) \varphi(x, t) dx dt + \int_{\Omega} E(x, \varepsilon) \varphi(x, \varepsilon) dx \right) \\
&= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} \frac{1}{\sqrt{4\pi\varepsilon}^N} e^{\frac{-|x|^2}{4\varepsilon}} \varphi(x, \varepsilon) dx \\
\left(\frac{x}{\sqrt{2\varepsilon}} = y \right) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} \frac{1}{\sqrt{\pi}^N} \varphi(2\sqrt{\varepsilon}y, \varepsilon) dy \\
&= \varphi(0, 0).
\end{aligned}$$

□

Corolário 12.6. *O operador do calor é hipoeĺptico.*

3) Operador das ondas:

$$P(D) = \partial_t^2 - \Delta_x$$

Em alguns textos o operador das ondas aparece denotado por $\square$, e denominado por "operador d'Alembertiano".

Proposição 12.7. *Seja $\Omega = \{(x, t) \in \mathbb{R}^2, t > |x|\}$. Então*

$$E = \frac{1}{2} \chi_{\Omega}$$

é a solução fundamental do operador das ondas, ou seja,

$$(\partial_t^2 - \partial_x^2)E = \delta.$$

Demonstração. Dada $\varphi \in C_c^{\infty}(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R})$, temos que

$$\begin{aligned}
(\partial_t^2 - \partial_x^2)E(\varphi) &= E(\partial_t^2 \varphi - \partial_x^2 \varphi) \\
&= \frac{1}{2} \int_{\Omega} \partial_t^2 \varphi - \partial_x^2 \varphi dx dt \\
&= \frac{1}{2} \int_{\Omega} d(-\varphi_t dx - \varphi_x dt) \\
&= \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} (-\varphi_t dx - \varphi_x dt) \\
&= \frac{1}{2} \int_{\gamma} (-\varphi_t dx - \varphi_x dt)
\end{aligned}$$

onde $\gamma = \{(t, x); t = |x|, -a < x < a\}$ tal que $\text{supp } \varphi \subset [t < a]$. Então, sendo

$$\begin{aligned}\gamma_1 &= (s, s), \quad 0 \leq s \leq a \\ \gamma_2 &= (-s, s), \quad 0 \leq s \leq a\end{aligned}$$

temos

$$(\partial_t^2 - \partial_x^2)E(\varphi) = \frac{1}{2} \int_{\gamma_1} (-\varphi_t dx - \varphi_x dt) - \frac{1}{2} \int_{\gamma_2} (-\varphi_t dx - \varphi_x dt)$$

Mas

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} \int_{\gamma} (-\varphi_t dx - \varphi_x dt) &= \frac{1}{2} \int_0^a -\varphi_t(s, s) - \varphi_x(s, s) ds \\ &= -\frac{1}{2} \int_0^a \frac{d\varphi(s, s)}{ds} ds \\ &= \frac{1}{2} \varphi(0, 0).\end{aligned}$$

A outra integral é análoga, o que conclui a demonstração. □

Dados $f \in C^2(\mathbb{R})$ e $\omega \in \mathbb{R}^N$ tal que $|\omega| = 1$ temos que

$$f(\omega \cdot x + t)$$

satisfaz a equação das ondas. Logo, o operador das ondas não é hipoelítico.

4) Operador de Schrödinger:

$$P(D) = \frac{1}{i} \partial_t - \Delta_x$$

O operador de Schrödinger não é hipoelítico.

12.3 Teorema de Hörmander

Nesta seção usaremos a seguinte notação:

$$P(D) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha D^\alpha,$$

onde a soma é obviamente finita e

$$a_\alpha \in \mathbb{C}, \quad D^\alpha = D_1^{\alpha_1} \dots D_N^{\alpha_N}, \quad D_j = \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x_j}$$

Trocando D por uma variável $\xi \in \mathbb{R}^N$ definimos o **símbolo** de um operador:

$$S = P(\xi) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha \xi^\alpha.$$

O **símbolo principal** é obtido tomando-se apenas os termos de grau máximo do polinômio:

$$SP = P_m(\xi) = \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha \xi^\alpha.$$

Definição 12.8. O operador $P(D)$ é **elíptico** se

$$P_m(\xi) = 0 \implies \xi = 0$$

Exemplo 12.9 (Operador de Cauchy-Riemman).

$$S = SP = \frac{1}{2}(-iD_x + D_y),$$

é um operador elíptico. □

Exemplo 12.10 (Operador de Laplace).

$$S = SP = -|\xi|^2,$$

é um operador elíptico. □

Exemplo 12.11 (Operador do calor).

$$S = i\tau + |\xi|^2, \quad SP = |\xi|^2,$$

não é um operador elíptico □

Exemplo 12.12 (Operador das ondas).

$$S = SP = |\xi|^2 - \tau^2,$$

é um operador elíptico □

Exemplo 12.13 (Operador de Schrödinger).

$$S = \tau + |\xi|^2, \quad SP = |\xi|^2,$$

não é um operador elíptico. □

Proposição 12.14. *Seja $P(D)$ um operador elíptico. Então existem constante $C, R > 0$ tais que*

$$|P(\xi)| \geq C|\xi|^m, \quad \text{se } \xi \in \mathbb{R}^N, |\xi| > R.$$

Demonstração. Seja $K = \{\xi \in \mathbb{R}^N; |\xi| = 1\}$. Como $P(D)$ é elíptico, temos que

$$b = \min_K |P_m(\xi)| > 0.$$

Logo,

$$|P_m(\xi/|\xi|)| \geq b \quad \forall |\xi| > 0,$$

donde

$$|P_m(\xi)| \geq b|\xi|^m.$$

Agora, notemos que

$$P(\xi) = P_m(\xi) + Q(\xi),$$

onde Q é um polinômio de ordem $m - 1$ (no máximo). Então

$$|Q(\xi)| \leq A|\xi|^m$$

para alguma constante positiva A , se $|\xi| > R$ para um R suficientemente grande.

Logo,

$$|P(\xi)| \geq b|\xi|^m - A|\xi|^{m-1} = |\xi|^m \left(b - \frac{A}{|\xi|} \right).$$

Basta então tomar um R conveniente. □

13 Aula 13 - 12/04/2019

13.1 Teorema de Hörmander (continuação)

Teorema 13.1 (Hörmander). *Sejam $P(D) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha D^\alpha$, com $a_\alpha \in \mathbb{C}$ um operador diferencial de coeficientes constantes e $V_P = \{\xi \in \mathbb{C}^N; P(\xi) = 0\}$. São equivalentes:*

(i) $P(D)$ é hipoelíptico.

(ii) $\frac{|D_\xi^\alpha P(\xi)|}{|P(\xi)|} \xrightarrow{|\xi| \rightarrow \infty} 0 \quad \forall \alpha \neq 0$.

(iii) $\xi \rightarrow \infty \implies \text{Im } \xi \rightarrow \infty$ se $\xi \in V_P$.

Demonstração. Ver Hörmander (2005) □

Observação 13.2. Pelo teorema, todo operador elíptico é hipoelíptico.

Observação 13.3. O operador do calor é hipoelíptico.

Observação 13.4. Se o operador é hipoelíptico, então $V_P \cap \mathbb{R}^N$ é compacto.

13.2 Produto tensorial de distribuições

Sejam $\Omega_1 \subset \mathbb{R}^{N_1}, \Omega_2 \subset \mathbb{R}^{N_2}$ abertos e $u \in C(\Omega_1), v \in C(\Omega_2)$. O produto tensorial de u por v é uma função contínua em $\Omega_1 \times \Omega_2$, denotado por $u \otimes v$, dada por

$$u \otimes v(x, y) = u(x)v(y).$$

O produto tensorial se comporta bem como distribuição no seguinte sentido: dadas $\varphi \in C_c^\infty(\Omega_1), \psi \in C_c^\infty(\Omega_2)$, temos que

$$\begin{aligned} (u \otimes v)(\varphi \otimes \psi) &= \int_{\Omega_1} \int_{\Omega_2} u(x)v(y)\varphi(x)\psi(y) dx dy \\ &= u(\varphi)v(\psi). \end{aligned}$$

Vamos mostrar que isto também vale para distribuições.

Teorema 13.5. *Sejam $u_1 \in \mathcal{D}'(\Omega_1)$ e $u_2 \in \mathcal{D}'(\Omega_2)$. Então existe uma única distribuição $u \in \mathcal{D}'(\Omega_1 \times \Omega_2)$ tal que*

$$u(\varphi_1 \otimes \varphi_2) = u_1(\varphi_1)u_2(\varphi_2) \quad \forall \varphi_1 \in C_c^\infty(\Omega_1), \varphi_2 \in C_c^\infty(\Omega_2).$$

Além disso, se $\varphi \in C_c^\infty(\Omega_1 \times \Omega_2)$ então

$$u(\varphi) = u_1(u_2(\varphi(x_1, x_2))) = u_2(u_1(\varphi(x_1, x_2)))$$

Demonstração. Vamos mostrar a existência. Sejam $K_j \subset \Omega_j$ compactos. Então temos que

$$|u_j(\varphi_j)| \leq C_j \sum_{|\alpha| \leq m_j} \sup_{K_j} |\partial^\alpha \varphi_j|.$$

Para $\varphi \in C_c^\infty(K_1 \times K_2)$, definamos

$$I_\varphi(x_1) = u_2(\varphi(x_1, \cdot)).$$

Pelo Teorema 4.2 temos que $I_\varphi \in C_c^\infty(K_1)$ e

$$\partial^\alpha I_\varphi = u_2(\partial^\alpha \varphi(x_1, \cdot)).$$

Logo,

$$|\partial^\alpha I_\varphi| \leq C_2 \sum_{|\beta| \leq m_2} \sup_{K_2} |\partial^\alpha \partial^\beta \varphi|.$$

Definamos

$$\begin{aligned} u &: C_c^\infty(\Omega_1 \times \Omega_2) \longrightarrow \mathbb{C} \\ \varphi &\longmapsto u_1(I_\varphi) \end{aligned}$$

Esta aplicação é uma distribuição, pois satisfaz

$$|u(\varphi)| \leq C_1 \sum_{|\beta| \leq m_1} \sup_{K_1} |\partial^\beta I_\varphi| \leq C \sum_{|\alpha| \leq m} \sup_{K_1 \times K_2} |\partial^\alpha \varphi|.$$

Passemos agora à unicidade. Vamos mostrar que

$$u(\varphi_1 \otimes \varphi_2) = 0 \quad \forall \varphi_j \in C_c^\infty(\Omega_j) \implies u = 0.$$

De fato, sejam $U_j \subset \subset \Omega_j$. Basta mostrar que

$$u|_{U_1 \times U_2} = 0.$$

Sejam $\chi_j \in C_c^\infty(\Omega_j)$ tais que $\chi_j = 1$ em U_j . Basta mostrar que

$$(\chi_1 \otimes \chi_2)u = 0.$$

Para isso, tomemos $\psi_j \in C_c^\infty(\mathbb{R}^{N_j})$ tais que

$$\int \psi_j = 1, \quad \text{supp } \psi_j \subset B_1(0)$$

e para $\varepsilon > 0$ definamos

$$\Psi_\varepsilon(x, y) = \frac{1}{\varepsilon^{N_1+N_2}} \psi_1(x/\varepsilon) \psi_2(y/\varepsilon).$$

Assim, temos que

$$((\chi_1 \otimes \chi_2)u) * \Psi_\varepsilon \in C_c^\infty(\Omega_1 \times \Omega_2)$$

para ε suficientemente pequeno e

$$((\chi_1 \otimes \chi_2)u) * \Psi_\varepsilon \rightarrow ((\chi_1 \otimes \chi_2)u).$$

Mas para todo ε temos que

$$\begin{aligned} ((\chi_1 \otimes \chi_2)u) * \Psi_\varepsilon(x, y) &= ((\chi_1 \otimes \chi_2)u)(\Psi_\varepsilon(x - \cdot, y - \cdot)) \\ &= ((\chi_1 \otimes \chi_2)u)(\psi_{1\varepsilon}(x - \cdot)\psi_{2\varepsilon}(y - \cdot)) \\ &= u(\chi_1(\cdot)\psi_{1\varepsilon}(x - \cdot)\chi_2(\cdot)\psi_{2\varepsilon}(y - \cdot)) \\ &= u((\chi_1\psi_{1\varepsilon}(x - \cdot)) \otimes (\chi_2\psi_{2\varepsilon}(y - \cdot))) \\ &= 0, \end{aligned}$$

donde segue o que queremos.

Por fim, seja $u = u_1 \otimes u_2$. Para $\varphi \in C_c^\infty(\Omega_1 \times \Omega_2)$ temos que

$$u(\varphi) = u_1(u_2(\varphi(x_1, x_2))).$$

Pela mesma construção, existe uma distribuição $v = u_2 \otimes u_1$ tal que

$$v(\varphi) = u_2(u_1(\varphi(x_1, x_2))).$$

Como u e v coincidem quando φ é um produto tensorial, então coincidem sempre. $\square$

Observação 13.6. Se u_1 e u_2 tem suporte compacto, então u tem suporte compacto.

Definição 13.7. A distribuição u do teorema é o chamado **produto tensorial** das distribuições u_1 e u_2 .

Observação 13.8. Sejam $\Omega = U \times I$, com $U \subset \mathbb{R}^{N-1}$ e $I \subset \mathbb{R}$ intervalo, ambos abertos, e $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ tal que $\partial_N u = 0$. Então existe $u_0 \in \mathcal{D}'(U)$ tal que

$$u(\varphi) = \int_I u_0(\varphi(\cdot, x_N)) dx_N = u_0 \otimes 1_I.$$

Observação 13.9. Sejam $u, v \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$, uma delas com suporte compacto. Então

$$\begin{aligned} (u * v)(\varphi) &= ((u * v) * \check{\varphi})(0) \\ &= (u * (v * \check{\varphi}))(0) \\ &= u(v * \check{\varphi}(0 - \cdot)) \\ &= u(v * \check{\varphi}(-x_1)) \\ &= u(v(\check{\varphi}(-x_1 - x_2))) \\ &= u(v(\varphi(x_1 + x_2))) \\ &= (u \otimes v)(\varphi(x_1 + x_2)). \end{aligned}$$

Teorema 13.10 (do Núcleo de Schwartz). *Sejam $\Omega_j \subset \mathbb{R}^{N_j}$, $j = 1, 2$ abertos, $K : C_c^\infty(\Omega_2) \longrightarrow \mathcal{D}'(\Omega_1)$ linear e sequencialmente contínuo. Então existe $\bar{K} \in \mathcal{D}'(\Omega_1 \times \Omega_2)$ tal que*

$$K(\psi)(\varphi) = \bar{K}(\varphi \otimes \psi), \quad \forall \psi \in C_c^\infty(\Omega_2), \varphi \in C_c^\infty(\Omega_1).$$

Demonstração. Ver Hörmander (1990). □

14 Aula 14 - 24/04/2019

14.1 Composição de distribuições com aplicações

Sejam $\Omega_1, \Omega_2 \subset \mathbb{R}^N$ abertos e $f : \Omega_1 \longrightarrow \Omega_2$ um difeomorfismo de classe C^∞ . O operador *pullback* "puxa" funções definidas em Ω_2 para Ω_1 por meio de f :

$$\begin{aligned} f^* : C^\infty(\Omega_2) &\longrightarrow C^\infty(\Omega_1) \\ u &\longmapsto u \circ f \end{aligned}$$

Esta operação também pode ser definida para distribuições. Mais precisamente, temos o seguinte

Teorema 14.1. *Sejam $\Omega_1, \Omega_2 \subset \mathbb{R}^N$ abertos e $f : \Omega_1 \longrightarrow \Omega_2$ um difeomorfismo de classe C^∞ . O pullback pode ser estendido a uma aplicação linear contínua*

$$\begin{aligned} f^* : \mathcal{D}'(\Omega_2) &\longrightarrow \mathcal{D}'(\Omega_1) \\ u &\longmapsto f^* u \end{aligned}$$

Demonstração. Vamos nos inspirar no *pullback* de funções contínuas para definir como age o *pullback* de uma distribuição. Sejam $\varphi \in C_c^\infty(\Omega_1)$ e u uma função contínua em Ω_2 . Então temos:

$$\begin{aligned} f^* u(\varphi) &= (u \circ f)(\varphi) = \int_{\Omega_1} u(f(x)) \varphi(x) dx \\ &= \int_{\Omega_2} u(y) \varphi(f^{-1}(y)) |\det(f^{-1})'(y)| dy \\ &= u(|\det(f^{-1})'| \varphi \circ f^{-1}). \end{aligned}$$

Notemos que $|\det(f^{-1})'| \varphi \circ f^{-1} \in C_c^\infty(\Omega_2)$. De fato, a compacidade do suporte segue da compacidade do suporte de φ , e a regularidade segue do fato de que é uma composição de aplicações C^∞ . Assim, para $u \in \mathcal{D}'(\Omega_2)$ definimos

$$(f^* u)(\varphi) = u(|\det(f^{-1})'| \varphi \circ f^{-1}), \quad \varphi \in C_c^\infty(\Omega_1).$$

A linearidade é trivial. Vamos mostrar que f^* é contínua. Seja $(u_j) \subset \mathcal{D}'(\Omega_2)$ tal que $u_j \rightarrow 0$. Então $u_j(\psi) \rightarrow 0 \forall \psi \in C_c^\infty(\Omega_2)$, donde segue que

$$(f^* u_j)(\varphi) = u_j(|\det(f^{-1})'| \varphi \circ f^{-1}) \rightarrow 0 \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega_1).$$

Logo, $u_j \rightarrow 0 \implies f^* u_j \rightarrow 0$, e portanto f^* é contínua. $\square$

Notemos que o *pullback* de distribuições foi definido para *difeomorfismos* de classe C^∞ . Apenas a regularidade não é o bastante, como mostra o contra-exemplo que segue.

Exemplo 14.2. Seja

$$\begin{aligned} f &: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto x^2 \end{aligned}$$

É claro que $f \in C^\infty(\mathbb{R})$, mas f não é uma bijeção. Com o sub-índice denotando o nome da variável, consideremos

$$\begin{aligned} f^* &: \mathbb{R}_y \longrightarrow \mathbb{R}_x \\ u &\longmapsto u \circ f \end{aligned}$$

Seja ψ_ε uma família de *mollifiers*. Temos que

$$\psi_\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \delta.$$

Se f^* estivesse bem definido, seria contínuo, e portanto existiria $\lim f^* \psi_\varepsilon = f^* \delta$. No entanto, tal limite não existe. De fato, sejam $\chi \in C_c^\infty(\mathbb{R}_y)$ tal que $\chi(0) = 1$ e $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ tal que $\varphi(x) = \chi(x^2)$. Então

$$\begin{aligned} f^* \psi_\varepsilon(\varphi) &= \int_{\mathbb{R}} \psi_\varepsilon(f(x)) \varphi(x) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} \psi_\varepsilon(x^2) \chi(x^2) dx \\ &= 2 \int_0^\infty \psi_\varepsilon(x^2) \chi(x^2) dx \\ &= \int_0^\infty \psi_\varepsilon(t) \chi(t) \frac{1}{\sqrt{t}} dt \\ &= \int_0^\infty \frac{1}{\varepsilon} \psi\left(\frac{t}{\varepsilon}\right) \chi(t) \frac{1}{\sqrt{t}} dt \\ &= \int_0^\infty \psi(s) \chi(\varepsilon s) \frac{1}{\sqrt{\varepsilon s}} ds \\ &= \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \left(\int_0^\infty \psi(s) \chi(\varepsilon s) \frac{1}{\sqrt{s}} ds \right) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \infty, \end{aligned}$$

pois

$$\int_0^\infty \psi(s) \chi(\varepsilon s) \frac{1}{\sqrt{s}} ds \rightarrow \int_0^\infty \psi(s) \frac{1}{\sqrt{s}} ds < \infty,$$

pelo Teorema da Convergência Monótona. $\square$

Veremos, no entanto, que a composição com submersões é sempre possível.

Recordemos que uma aplicação diferenciável $f: \Omega_1 \longrightarrow \Omega_2$ entre abertos de $\mathbb{R}^{N_1}$ e $\mathbb{R}^{N_2}$ é uma *submersão* se $f'(x)$ é sobrejetora em todo ponto $x \in \Omega_1$. Uma condição necessária para que isto ocorra é $N_1 \geq N_2$.

Teorema 14.3. *Sejam $\Omega_1 \subset \mathbb{R}^{N_1}$, $\Omega_2 \subset \mathbb{R}^{N_2}$ abertos, com $N_1 \geq N_2$, e $f : \Omega_1 \longrightarrow \Omega_2$ de classe C^∞ tal que $f'(x)$ é sobrejetora em todo $x \in \Omega_1$. Então existe $f^* : \mathcal{D}'(\Omega_2) \longrightarrow \mathcal{D}'(\Omega_1)$ linear, contínua tal que*

$$f^* u = u \circ f \quad \text{se } u \in C(\Omega_2).$$

Demonstração. Se existir uma tal f^* , então será a única, pois $C_c^\infty(\Omega_2)$ é denso em $\mathcal{D}'(\Omega_2)$ (Teorema 10.7).

Para a existência, tomemos $x_0 \in \Omega_1$ e $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^{N_1}, \mathbb{R}^{N_1-N_2})$ tais que

$$h \mapsto (f'(x_0)h, Ah) \in GL(\mathbb{R}^{N_1}).$$

Seja $F(x) = (f(x), Ax)$. Então $F'(x_0) \in GL(\mathbb{R}^{N_1})$. Pelo Teorema da Função Inversa, existem

$$U \subset \mathbb{R}^{N_1} \text{ aberto contendo } x_0,$$

$$V \subset \Omega_2 \text{ aberto contendo } f(x_0),$$

$$W \subset \mathbb{R}^{N_1-N_2} \text{ aberto contendo } 0 \in \mathbb{R}^{N_1-N_2}$$

tais que

$$F|_U : U \longrightarrow V \times W \text{ é um difeomorfismo } C^\infty.$$

Consideremos o *pullback*

$$F^* : C(V \times W) \longrightarrow C(U).$$

Denotemos

$$y \in \mathbb{R}^{N_2}, y' \in \mathbb{R}^{N_1-N_2}.$$

Se $u \in C(\Omega_2)$ podemos considerar

$$F^*(u_y \otimes 1_{y'}) = (u_y \otimes 1_{y'}) \circ F = u \circ f.$$

Isto inspira a seguinte definição:

$$\begin{aligned} f^* & : \mathcal{D}'(\Omega_2) \longrightarrow \mathcal{D}'(U) \\ u & \longmapsto F^*(u \otimes 1) \end{aligned}$$

Recordemos que $F^*(u \otimes 1)$ é a extensão do *pullback* para distribuições:

$$\begin{aligned} F^*(u \otimes 1)(\varphi) &= \int_U (u \otimes 1)(F(x)) \varphi(x) dx \\ &= \int_{V \times W} (u \otimes 1)(y, y') \varphi(F^{-1}(y, y')) |\det(F^{-1})'(y, y')| dy dy'. \end{aligned}$$

Pelo que foi feito, podemos determinar uma cobertura aberta $\{U^j\}$ de Ω_1 e operadores

$$f_j^* : \mathcal{D}'(\Omega_2) \longrightarrow \mathcal{D}'(U^j)$$

tais que

$$f_j^*(u) = u \circ f|_{U^j}$$

se $u \in C(\Omega_2)$. Agora, se j, k são tais que $U^j \cap U^k \neq \emptyset$ então

$$f_j^*(u)|_{U^j \cap U^k} = f_k^*(u)|_{U^k \cap U^j}$$

se $u \in C(\Omega_2)$. Então, pelo Teorema 5.13, existe uma distribuição $f^*(u)$ tal que

$$f^*(u)|_{U^j} = f_j^*(u) = u \circ f|_{U^j}.$$

Basta então tomar uma sequência em $C_c^\infty(\Omega_2)$ convergindo para $u \in \mathcal{D}'(\Omega_2)$ e repetir o argumento de localização. $\square$

Exemplo 14.4. Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um aberto, $\rho \in C^\infty(\Omega)$ uma função real com $d\rho(x) \neq 0 \ \forall x \in \Omega$ e $M := \{x \in \Omega; \rho(x) = 0\} \neq \emptyset$. Então, sendo dS a medida de superfície em M , temos que

$$\rho^*(\delta) = \frac{dS}{|\nabla \rho|}.$$

De fato, seja $x_0 \in M$. Podemos assumir $\frac{\partial \rho}{\partial x_1}(x_0) \neq 0$. Com a notação do teorema anterior, seja

$$F(x) = (\rho(x), x_2, \dots, x_N).$$

F tem, numa vizinhança de x_0 , uma inversa da forma

$$F^{-1}(y) = (\psi(y), y_2, \dots, y_N).$$

De acordo com o teorema, temos que

$$\rho^*(\delta) = F^*(\delta \otimes 1)$$

onde 1 denota a constante em $\mathbb{R}^{N-1}$. Notemos que

$$(\delta \otimes 1)(\chi) = \int_{\Omega} \chi(0, y') dy = \int_M \chi(0, y') dy',$$

onde $y' = (y_2, \dots, y_N)$. Então dada $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ temos

$$\begin{aligned} \rho^*(\delta)(\varphi) &= (\delta \otimes 1) \left(|\det(F^{-1})'| \varphi \circ F^{-1} \right) \\ &= \int_M \left| \frac{\partial \psi}{\partial y_1}(0, y') \right| \varphi(\psi(0, y'), y') dy' \end{aligned}$$

Notemos que

$$y' \longmapsto (\psi(0, y'), y')$$

é uma parametrização de M . Notemos também que

$$\rho(\psi(y), y') = y_1$$

donde

$$\frac{\partial \rho}{\partial x_1}(\psi(y), y') \frac{\partial \psi}{\partial y_1} = 1$$

e portanto

$$\frac{\partial \psi}{\partial y_1} = \frac{1}{\frac{\partial \rho}{\partial x_1}(\psi(y), y')}.$$

Agora, para $j = 2, \dots, N$ temos que

$$\frac{\partial \rho}{\partial x_1}(\psi(y), y') \frac{\partial \psi}{\partial y_j} + \frac{\partial \rho}{\partial x_j} = 0.$$

Assim,

$$\begin{aligned} (\nabla \rho)(\psi(y), y') &= \left(\frac{\partial \rho}{\partial x_1}(\psi(y), y'), \dots, -\frac{\partial \psi}{\partial y_N}(0, y') \frac{\partial \rho}{\partial x_1}(\psi(y), y') \right) \\ &= \frac{\partial \rho}{\partial x_1}(\psi(y), y') \left(1, \dots, -\frac{\partial \psi}{\partial y_N}(0, y') \right) \end{aligned}$$

e portanto, sendo

$$Q = \left| \left(1, \dots, -\frac{\partial \psi}{\partial y_N}(0, y') \right) \right|$$

temos que

$$|(\nabla \rho)(\psi(y), y')| = Q \left| \frac{\partial \rho}{\partial x_1}(\psi(y), y') \right|.$$

Agora, sabemos que

$$dS = Q dy.$$

Logo,

$$\rho^*(\delta)(\varphi) = \int_M \frac{\varphi(\psi(0, y'), y')}{|(\nabla \rho)(\psi(y), y')|} Q dy',$$

justamente o que queríamos demonstrar. □

15 Aula 15 - 26/04/2019

15.1 Transformada de Fourier

Passamos agora ao estudo da transformada de Fourier, uma das ferramentas mais importantes em Análise. Recordaremos a transformada de Fourier para funções e algumas de suas propriedades, e depois estenderemos o estudo para transformadas de distribuições.

Folland (1999) apresenta uma discussão bastante interessante sobre as motivações para a forma da transformação. Aqui, limitar-nos-emos aos aspectos técnicos e operacionais.

Definição 15.1. Seja $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$. A **transformada de Fourier de f** é a aplicação

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^N} e^{-i\langle x, \xi \rangle} f(x) dx, \quad \xi \in \mathbb{R}^N.$$

A notação $\hat{f} = \mathcal{F} f$ também é utilizada.

Observação 15.2. É fácil ver que $\|\hat{f}\|_\infty \leq \|f\|_1$. Disto decorre que a aplicação linear

$$\begin{aligned} \mathcal{F} : L^1(\mathbb{R}^N) &\longrightarrow L^\infty(\mathbb{R}^N) \\ f &\longmapsto \mathcal{F} f \end{aligned}$$

é contínua.

Proposição 15.3. Seja $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$. Então $\hat{f}$ é contínua em $\mathbb{R}^N$ e

$$\hat{f}(\xi) \xrightarrow{\xi \rightarrow \infty} 0.$$

Demonstração. Vamos mostrar a continuidade usando sequências. Sejam $\xi_0 \in \mathbb{R}^N$ e $(\xi_n) \subset \mathbb{R}^N$ tais que $\xi_n \rightarrow \xi_0$. Então

$$e^{-i\langle x, \xi_n \rangle} \rightarrow e^{-i\langle x, \xi_0 \rangle} \quad \forall x \in \mathbb{R}^N.$$

Logo,

$$e^{-i\langle x, \xi_n \rangle} f(x) \rightarrow e^{-i\langle x, \xi_0 \rangle} f(x) \quad \text{q.s. .}$$

Além disso,

$$|e^{-i\langle x, \xi_n \rangle} f(x)| \leq |f(x)|.$$

Logo, pelo Teorema da Convergência Dominada,

$$\hat{f}(\xi_n) \rightarrow \hat{f}(\xi_0),$$

e portanto $\hat{f}$ é contínua.

Agora, seja $g \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$. Sendo $D_j = \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x_j}$, temos que

$$\begin{aligned}\xi_j \hat{g}(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^N} (-D_j) e^{-i\langle x, \xi \rangle} g(x) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} e^{-i\langle x, \xi \rangle} (D_j g)(x) dx,\end{aligned}$$

donde

$$|\xi_j \hat{g}(\xi)| \leq \|D_j g\|_1.$$

Logo, existe $c > 0$ tal que

$$|\xi| |\hat{g}(\xi)| \leq c \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^N$$

e portanto

$$\hat{g}(\xi) \xrightarrow{\xi \rightarrow \infty} 0.$$

Como $C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ é denso em $L^1(\mathbb{R}^N)$, dados $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$ e $\varepsilon > 0$ existe $g \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ tal que

$$\|f - g\|_1 \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Além disso,

$$\begin{aligned}|\hat{f}(\xi)| &\leq |\hat{f}(\xi) - \hat{g}(\xi)| + |\hat{g}(\xi)| \\ &= |(f - g)^\wedge(\xi)| + |\hat{g}(\xi)| \\ &\leq \|f - g\|_1 + |\hat{g}(\xi)| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + |\hat{g}(\xi)|.\end{aligned}$$

Pelo que mostramos anteriormente, existe $R > 0$ tal que $|\hat{g}(\xi)| \leq \varepsilon/2$ se $|\xi| > R$. Logo,

$$|\hat{f}(\xi)| \leq \varepsilon$$

se $|\xi| > R$. □

Exemplo 15.4. Seja

$$f(x) = \chi_{[-1,1]}(x) \in L^1(\mathbb{R}).$$

Temos:

$$\hat{f}(\xi) = \int_{-1}^1 e^{ix\xi} dx = \frac{e^{-ix\xi}}{-i\xi} \Big|_{-1}^1 = \frac{e^{i\xi} - e^{-i\xi}}{i\xi} = \frac{2}{\xi} \frac{e^{i\xi} - e^{-i\xi}}{2i} = \frac{2 \sin \xi}{\xi}$$

□

Definição 15.5. O **espaço de Schwartz**, denotado por $\mathcal{S}$, é o conjunto de todas as funções $u \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$ tais que

$$x^\alpha D^\beta u \in L^\infty(\mathbb{R}^N) \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{Z}_+^N.$$

Exemplo 15.6. $C_c^\infty(\mathbb{R}^N) \subset \mathcal{S}$. □

Exemplo 15.7. Se $a > 0$, então $e^{-a|x|^2} \in \mathcal{S}$. □

Definição 15.8. Sejam $(u_j) \subset \mathcal{S}$ e $u_0 \in \mathcal{S}$. Dizemos que $u_j \rightarrow u_0$ em $\mathcal{S}$ se para todo par de multiíndices $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}_+^N$

$$x^\alpha D^\beta u_j \rightarrow x^\alpha D^\beta u_0 \quad \text{em } L^\infty.$$

Proposição 15.9. $C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ é denso em $\mathcal{S}$.

Demonstração. Vamos mostrar que podemos aproximar elementos de $\mathcal{S}$ por elementos de $C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$.

Seja $u \in \mathcal{S}$. Consideremos a sequência de termos

$$u_n(x) = \psi\left(\frac{x}{n}\right) u(x),$$

onde $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ é tal que

$$0 \leq \psi \leq 1, \quad \psi(x) = 1 \text{ se } |x| \leq 1, \quad \psi = 0 \text{ se } |x| \geq 2.$$

Temos que $u_n \rightarrow u$ em $\mathcal{S}$. De fato:

$$\begin{aligned} x^\alpha D^\beta u_n(x) - x^\alpha D^\beta u(x) &= x^\alpha D^\beta \psi(x/n) u(x) - x^\alpha D^\beta u(x) \\ &= x^\alpha D^\beta u(x) (\psi(x/n) - 1) + \\ &\quad \sum_{\gamma \leq \beta, \gamma \neq \beta} \binom{\beta}{\gamma} x^\alpha D^\gamma u(x) D^{\beta-\gamma} \left\{ \psi\left(\frac{x}{n}\right) \right\} \end{aligned}$$

Mas

$$D^{\beta-\gamma} \left\{ \psi\left(\frac{x}{n}\right) \right\} = \left(\frac{1}{n}\right)^{|\beta-\gamma|} \left(D^{\beta-\gamma} \psi \right) \left(\frac{x}{n} \right).$$

Logo,

$$|x^\alpha D^\beta u_n(x) - x^\alpha D^\beta u(x)| \leq |x^\alpha D^\beta u(x)| |\psi(x/n) - 1| + C/n,$$

onde $C = C(\alpha, \beta, u, \psi)$.

Seja $\varepsilon > 0$. Existe $R > 0$ tal que $|x^\alpha D^\beta u(x)| \leq \varepsilon/4$ se $|x| > R$. Logo, para n suficientemente grande temos que

$$|x^\alpha D^\beta u_n(x) - x^\alpha D^\beta u(x)| \leq \varepsilon/2 + C/n < \varepsilon.$$

Por outro lado, para $|x| \leq R$ podemos assumir $\psi(x/n) = 1$, bastando tomar n suficientemente grande. Neste caso,

$$|x^\alpha D^\beta u_n(x) - x^\alpha D^\beta u(x)| \leq C/n < \varepsilon.$$

Logo, para todo $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\sup |x^\alpha D^\beta u_n(x) - x^\alpha D^\beta u(x)| \leq \varepsilon \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{Z}_+^N.$$

□

Uma caracterização importante do espaço de Schwartz é a seguinte:

Observação 15.10. Seja $u \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$. Então

$$u \in \mathcal{S} \iff (1 + |x|)^p D^\beta u \in L^\infty \quad \forall \beta \in \mathbb{Z}_+^N, \forall p \in \mathbb{Z}.$$

De fato, por um lado é claro que para todo $\alpha \in \mathbb{Z}_+^N$ existe $p \in \mathbb{Z}$ tal que

$$\sup |x^\alpha D^\beta u| \leq \sup |(1 + |x|)^p D^\beta u| < \infty.$$

Por outro lado, se $u \in \mathcal{S}$ então todos os (finitos) termos de $(1 + |x|)^p D^\beta u$ são finitos.

Observação 15.11. Se $p \in [1, \infty]$ então $\mathcal{S} \subset L^p(\mathbb{R}^N)$ (em particular, é denso). De fato, se $p = \infty$ é óbvio. Seja então $p < \infty$. Então

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} |u|^p dx &= \int_{\mathbb{R}^N} |u(x)(1 + |x|)^k|^p \frac{1}{(1 + |x|)^{kp}} dx \\ &\leq M \int_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{(1 + |x|)^{kp}} dx \\ &= M \omega_N \int_0^\infty \frac{r^{N-1}}{(1 + r)^{kp}} dr \\ &< \infty \end{aligned}$$

se $kp - N > 0$.

A importância do espaço de Schwartz é que este espaço é invariante pela transformada de Fourier. Mais ainda, neste espaço a transformada tem a propriedade fundamental de "trocar" derivadas por multiplicações por coordenadas. Em outros termos, temos o seguinte

Teorema 15.12. *A transformada de Fourier define uma aplicação contínua*

$$\mathcal{F} : \mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{S}.$$

Além disso,

$$(D_j f)^\wedge(\xi) = \xi_j \hat{f}(\xi)$$

e

$$(x_j f)^\wedge(\xi) = -(D_j \hat{f})(\xi)$$

Demonstração. Seja $f \in \mathcal{S}$. Temos:

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^N} e^{-i\langle x, \xi \rangle} f(x) dx.$$

Então

$$\begin{aligned} -(D_j \hat{f})(\xi) &= - \int_{\mathbb{R}^N} (-x_j) e^{-i\langle x, \xi \rangle} f(x) dx \\ &= (x_j f)^\wedge(\xi) \end{aligned}$$

Repetindo o argumento, temos que

$$D^\alpha \hat{f}(\xi) = ((-x)^\alpha f)^\wedge(\xi).$$

Evidentemente,

$$\|D^\alpha \hat{f}\|_\infty \leq \|x^\alpha f\|_1.$$

Notemos também que

$$\begin{aligned} (D^\alpha f)^\wedge(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^N} e^{-i\langle x, \xi \rangle} (D^\alpha f)(x) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} (-D)^\alpha e^{-i\langle x, \xi \rangle} f(x) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} \xi^\alpha e^{-i\langle x, \xi \rangle} f(x) dx \\ &= \xi^\alpha \hat{f}(\xi) \end{aligned}$$

Agora, sabemos que $f \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$ e que $D^\alpha \hat{f} \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$. Notemos que

$$\xi^\beta D^\alpha \hat{f}(\xi) = (D^\beta (-x)^\alpha f)^\wedge(\xi)$$

e portanto $\hat{f} \in \mathcal{S}$. Por fim, notemos que

$$\begin{aligned} |\xi^\beta D^\alpha \hat{f}(\xi)| &\leq \|D^\beta (-x)^\alpha f\|_1 \\ &\leq C \|(1 + |x|)^l D^\beta (-x)^\alpha f\|_\infty, \end{aligned}$$

onde

$$C = \int_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{(1 + |x|)^l} dx$$

e $l > N$. Logo, se $f_j \rightarrow 0$ em $\mathcal{S}$ então $\hat{f}_j \rightarrow 0$ em $\mathcal{S}$, logo $\mathcal{F}$ é contínua. $\square$

16 Aula 16 - 08/05/2019

16.1 Transformada de Fourier (continuação)

Definição 16.1. A transformada inversa de Fourier é dada por

$$(\mathcal{F}^{-1} f)(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^N} \int_{\mathbb{R}^N} e^{i\langle x, \xi \rangle} f(x) dx. \quad (16.1)$$

Observação 16.2. Notemos que

$$(\mathcal{F}^{-1} f)(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^N} \hat{f}(-\xi)$$

Vamos mostrar que de fato faz sentido falar sobre uma inversa para $\mathcal{F}$. Para isso, precisaremos do seguinte

Lema 16.3. Seja $g \in \mathcal{S}$ a função gaussiana:

$$g(x) = e^{-|x|^2/2}.$$

Então

$$\hat{g}(\xi) = (2\pi)^{N/2} e^{-|\xi|^2/2}.$$

Demonstração. Consideremos o caso $N = 1$. Neste caso, g satisfaz a equação diferencial

$$g'(x) + xg(x) = 0.$$

Tomando a transformada de Fourier desta equação temos

$$\hat{g}'(\xi) + (xg)^\wedge(\xi) = 0.$$

Logo,

$$i\xi \hat{g}(\xi) + \left(-\frac{1}{i}\right) \hat{g}'(\xi) = 0$$

donde

$$\hat{g}'(\xi) + \xi \hat{g}(\xi) = 0$$

e portanto

$$\hat{g}(\xi) = \hat{g}(0) e^{-\xi^2/2}.$$

Mas

$$\hat{g}(0) = \int_{\mathbb{R}} g(x) e^{-i\langle 0, x \rangle} dx = \sqrt{2\pi},$$

Logo

$$\hat{g}(\xi) = \sqrt{2\pi} e^{-\xi^2/2}$$

Agora, para N arbitrário, temos que

$$\begin{aligned}\hat{g}(\xi) &= \int_{\mathbb{R}} \dots \int_{\mathbb{R}} e^{-ix_1\xi_1 - x_1^2/2} \dots e^{-ix_N\xi_N - x_N^2/2} dx_1 \dots dx_N \\ &= \sqrt{2\pi} e^{-\xi_1^2/2} \dots \sqrt{2\pi} e^{-\xi_N^2/2} \\ &= (2\pi)^{N/2} e^{-|\xi|^2/2}\end{aligned}$$

□

Teorema 16.4. $\mathcal{F} : \mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{S}$ é uma bijeção contínua com inversa $\mathcal{F}^{-1}$ contínua (e portanto um isomorfismo topológico).

Demonstração. Vamos mostrar que se $f \in \mathcal{S}$ então

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^N} \int_{\mathbb{R}^N} e^{I\langle x, \xi \rangle} \hat{f}(\xi) d\xi,$$

ou seja, $\mathcal{F}^{-1} \circ \mathcal{F} = Id$. Seja $g \in \mathcal{S}$ tal que $g(0) = 1$. Temos:

$$\begin{aligned}\frac{1}{(2\pi)^N} \int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}^N} e^{i\langle x-y, \xi \rangle} g(\xi) f(y) dy d\xi &= \frac{1}{(2\pi)^N} \int_{\mathbb{R}^N} e^{i\langle x, \xi \rangle} \int_{\mathbb{R}^N} e^{i\langle y, \xi \rangle} f(y) dy g(\xi) d\xi \\ &= \frac{1}{(2\pi)^N} \int_{\mathbb{R}^N} f(y) \int_{\mathbb{R}^N} e^{i\langle x-y, \xi \rangle} g(\xi) d\xi dy \\ &= \frac{1}{(2\pi)^N} \int_{\mathbb{R}^N} f(y) \hat{g}(y-x) dy\end{aligned}$$

Logo,

$$\int_{\mathbb{R}^N} e^{i\langle x, \xi \rangle} \hat{f}(\xi) g(\xi) d\xi = \int_{\mathbb{R}^N} f(x+y) \hat{g}(y) dy.$$

Agora, seja $\varepsilon > 0$. Pondo $g_\varepsilon(x) = g(\varepsilon x)$ temos

$$\begin{aligned}\hat{g}_\varepsilon(y) &= \int_{\mathbb{R}^N} e^{-i\langle y, z \rangle} g_\varepsilon(z) dz \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} e^{-i\langle y, z \rangle} g(\varepsilon z) dz \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} e^{-i\langle y, w/\varepsilon \rangle} g_\varepsilon(w) \frac{1}{\varepsilon^N} dw \\ &= \frac{1}{\varepsilon^N} \hat{g}\left(\frac{y}{\varepsilon}\right).\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N} e^{i\langle x, \xi \rangle} \hat{f}(\xi) g(\varepsilon \xi) d\xi &= \int_{\mathbb{R}^N} f(x+y) \frac{1}{\varepsilon^N} \hat{g}\left(\frac{y}{\varepsilon}\right) dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} f(x+\varepsilon z) \hat{g}(z) dz.\end{aligned}$$

Fazendo $\varepsilon \rightarrow 0$ temos que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} e^{i\langle x, \xi \rangle} \hat{f}(\xi) g(\xi) d\xi &\rightarrow \int_{\mathbb{R}^N} e^{i\langle x, \xi \rangle} \hat{f}(\xi) d\xi, \\ \int_{\mathbb{R}^N} f(x + \varepsilon z) \hat{g}(z) dz &\rightarrow f(x) \int_{\mathbb{R}^N} \hat{g}(z) dz \end{aligned}$$

Em particular, tomando $g = e^{-|x|^2/2}$ temos que

$$\int_{\mathbb{R}^N} \hat{g}(\xi) d\xi = (2\pi)^{N/2} \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-t^2/2} \right)^N = (2\pi)^N,$$

donde segue que

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^N} \int_{\mathbb{R}^N} e^{i\langle x, \xi \rangle} \hat{f}(\xi) d\xi.$$

A continuidade de $\mathcal{F}^{-1}$ segue de maneira análoga à continuidade de $\mathcal{F}$. $\square$

Vamos agora estudar algumas propriedades fundamentais da transformada de Fourier no espaço de Schwartz.

Proposição 16.5. *Sejam $u, v \in \mathcal{S}$. Então*

- (i) $\int_{\mathbb{R}^N} \hat{u} v dx = \int_{\mathbb{R}^N} u \hat{v} dx$
- (ii) $\int_{\mathbb{R}^N} u \bar{v} dx = \frac{1}{(2\pi)^N} \int_{\mathbb{R}^N} \hat{u} \bar{\hat{v}} dx$ (fórmula de Parseval)
- (iii) $(u * v)^\wedge = \hat{u} \hat{v}$
- (iv) $(uv)^\wedge = \frac{1}{(2\pi)^N} \hat{u} * \hat{v}$

Demonstração. Em primeiro lugar, notemos que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} \hat{u}(x) v(x) dx &= \int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}^N} e^{-i\langle x, \xi \rangle} u(\xi) v(x) d\xi dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} u(\xi) \hat{v}(\xi) d\xi, \end{aligned}$$

o que demonstra (i).

Para demonstrar a identidade de Parseval, seja

$$w = \frac{1}{(2\pi)^N} \bar{\hat{v}}$$

e notemos que

$$\begin{aligned}\overline{\hat{w}}(\xi) &= \overline{\frac{1}{(2\pi)^N} \int_{\mathbb{R}^N} \hat{v} e^{-i\langle x, \xi \rangle} dx} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^N} \int_{\mathbb{R}^N} \hat{v} e^{i\langle x, \xi \rangle} dx \\ &= v(\xi)\end{aligned}$$

pela fórmula de inversão de Fourier (16.1). Logo, usando (i) segue que

$$\begin{aligned}\frac{1}{(2\pi)^N} \int_{\mathbb{R}^N} \hat{u}(x) \overline{\hat{f}}(x) dx &= \frac{1}{(2\pi)^N} \int_{\mathbb{R}^N} \hat{u}(x) v(x) dx \\ &= \frac{1}{(2\pi)^N} \int_{\mathbb{R}^N} u(x) \hat{v}(x) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} u(x) \overline{f}(x) dx.\end{aligned}$$

Notando que f percorre $\mathcal{S}$, demonstramos (ii).

Pelo teorema de Fubini, temos que

$$\begin{aligned}(u * v)^\wedge(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}^N} e^{-i\langle \xi, x \rangle} u(x - y) v(y) dx dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}^N} e^{-i\langle \xi, x - y \rangle} u(x - y) e^{-i\langle \xi, y \rangle} v(y) \\ &= \hat{u}(\xi) \hat{v}(\xi),\end{aligned}$$

o que demonstra (iii).

Por fim, notemos que, por um lado,

$$\mathcal{F}\{\mathcal{F}(uv)\}(x) = (2\pi)^N u(-x) v(-x).$$

Por outro lado,

$$\mathcal{F}\{\hat{u} * \hat{v}\}(x) = (2\pi)^{2N} u(-x) v(-x),$$

donde segue (iv). □

A próxima definição é uma das mais importantes do curso. Sua relevância vem do fato de que se trata do ambiente conveniente para falarmos em transformadas de Fourier para distribuições.

Definição 16.6. Uma **distribuição temperada** é um funcional linear

$$u: \mathcal{S} \longrightarrow \mathbb{C}$$

contínuo no seguinte sentido:

$$f_j \rightarrow 0 \text{ em } \mathcal{S} \implies u(f_j) \rightarrow 0 \text{ em } \mathbb{C}.$$

Denotamos por $\mathcal{S}'$ o espaço das distribuições temperadas.

Observação 16.7. Temos que

$$C_c^\infty(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow \mathcal{S}$$

logo

$$\mathcal{S}' \hookrightarrow \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N).$$

Observação 16.8. $\mathcal{S}$ é o maior subespaço de $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$ onde podemos fazer análise de Fourier.

Observação 16.9. As derivações definem endomorfismos contínuos em $\mathcal{S}$. De fato,

$$f_j \rightarrow 0 \text{ em } \mathcal{S} \implies D^\alpha f_j \rightarrow 0 \text{ em } \mathcal{S}.$$

Notação. Dizemos que $h \in \mathcal{O}_M$ se as derivadas de h são dominadas por polinômios, ou seja, se $h \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$ e se para todo multiíndice $\alpha \in \mathbb{Z}_+^N$ existe $P_\alpha \in \mathbb{R}[x_1, \dots, x_N]$ tal que

$$|\partial^\alpha h(x)| \leq |P_\alpha(x)| \quad \forall x \in \mathbb{R}^N.$$

Notemos que $\mathcal{O}_M$ é um anel com as operações de adição e multiplicação de funções usuais.

Proposição 16.10. $\mathcal{S}$ é um $\mathcal{O}_M$ -módulo, ou seja, se $f \in \mathcal{S}$ e $h \in \mathcal{O}_M$ então $hf \in \mathcal{S}$.

Demonstração. Sejam f e h como no enunciado. Então dados multiíndices α, β temos que

$$\begin{aligned} |x^\alpha D^\beta(hf)| &= \left| \sum_{\gamma \leq \beta} \binom{\beta}{\gamma} x^\alpha D^\gamma h D^{\beta-\gamma} f \right| \\ &\leq \sum_{\gamma \leq \beta} \binom{\beta}{\gamma} |D^\gamma h| |x^\alpha D^{\beta-\gamma} f| \\ &\leq \sum_{\gamma \leq \beta} \binom{\beta}{\gamma} |P_\gamma(x)| |x^\alpha D^{\beta-\gamma} f| \end{aligned}$$

e todos os termos na última linha são finitos pois $f \in \mathcal{S}$. □

Observação 16.11. Notemos que $\mathcal{S}'$ também é um $\mathcal{O}_M$ módulo. De fato, se $f_j \rightarrow 0$ em $\mathcal{S}$ então $hf_j \rightarrow 0$ em $\mathcal{S}$ para todo $h \in \mathcal{O}_M$. Logo, se $u \in \mathcal{S}'$ então

$$hu(f_j) = u(hf_j) \rightarrow 0$$

Exemplo 16.12. Temos que $\mathcal{E}' \subset \mathcal{S}'$. De fato, se $u \in \mathcal{E}'$ então existem um compacto K e constantes $c > 0, m \in \mathbb{Z}_+$ tais que

$$|u(f)| \leq c \sum_{|\alpha| \leq m} \sup_K |\partial^\alpha f| \quad \forall f \in C^\infty(\mathbb{R}^N), \forall \alpha \in \mathbb{Z}_+^N.$$

Assim,

$$f_j \rightarrow 0 \text{ em } \mathcal{S} \implies u(f_j) \rightarrow 0 \text{ em } \mathbb{C}.$$

□

Exemplo 16.13. Para $1 \leq p \leq \infty$ temos que $L^p(\mathbb{R}^N) \subset \mathcal{S}'$. De fato, sejam $u \in L^p(\mathbb{R}^N)$ e $f \in \mathcal{S}$. Então, sendo q o expoente conjugado de p , temos que

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mathbb{R}^N} u(x) f(x) dx \right| &\leq \|u\|_p \left(\int_{\mathbb{R}^N} |f(x)|^q dx \right)^{1/q} \\ &\leq \|u\|_p \sup \left[|f(x)| (1+|x|)^k \right] \left(\int_{\mathbb{R}^N} (1+|x|)^{-qk} dx \right)^{1/q}. \end{aligned}$$

Para k suficientemente grande, $(1+|x|)^k \in L^q(\mathbb{R}^N)$, donde segue o resultado. Em particular, $\mathcal{S} \subset \mathcal{S}'$. □

Dadas $u, v \in \mathcal{S}$, vimos que

$$\int_{\mathbb{R}^N} \hat{u}(x) v(x) dx = \int_{\mathbb{R}^N} u(x) \hat{v}(x) dx.$$

Isto motiva a seguinte

Definição 16.14. Se $u \in \mathcal{S}'$ definimos sua transformada de Fourier da seguinte maneira:

$$\hat{u}(f) = u(\hat{f}), \quad f \in \mathcal{S}.$$

Exemplo 16.15. Seja $u = 1 \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$. Então dada $f \in \mathcal{S}$ temos que

$$\hat{u}(f) = u(\hat{f}) = \int_{\mathbb{R}^N} \hat{f}(\xi) d\xi = (2\pi)^N f(0).$$

Logo,

$$\hat{1} = (2\pi)^N \delta.$$

□

17 Aula 17 - 10/05/2019

17.1 Transformada de Fourier (continuação)

Observação 17.1. Sejam $u \in \mathcal{S}'$ e $f \in \mathcal{S}$. Então

$$\mathcal{F}^{-1} u(f) = u(\mathcal{F}^{-1} f)$$

donde

$$\mathcal{F} \mathcal{F}^{-1} u = \mathcal{F}^{-1} \mathcal{F} u = u.$$

Observação 17.2. Se $u \in \mathcal{S}'$ valem

$$\begin{aligned}(D_j u)^\wedge &= \xi_j \hat{u} \\ D_j \hat{u} &= -(x_j u)^\wedge\end{aligned}$$

De fato, se $f \in \mathcal{S}$ temos que

$$\begin{aligned}(D_j u)^\wedge(f) &= D_j u(\hat{f}) \\ &= -u(D_j \hat{f}) \\ &= u((\xi_j f)^\wedge) \\ &= \hat{u}(\xi_j f) \\ &= \xi_j \hat{u}(f)\end{aligned}$$

e que

$$\begin{aligned}D_j \hat{u}(f) &= -\hat{u}(D_j f) \\ &= -u((D_j f)^\wedge) \\ &= -u(\xi_j \hat{f}) \\ &= -(\xi_j u)^\wedge(f).\end{aligned}$$

Em geral, temos que

$$\begin{aligned}(P(D) u)^\wedge &= \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha (D^\alpha u)^\wedge \\ &= \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha \xi^\alpha \hat{u}(\xi) \\ &= P(\xi) \hat{u}(\xi).\end{aligned}$$

Exemplo 17.3. Vimos que

$$\hat{1} = (2\pi)^N \delta.$$

Logo,

$$(x^\alpha)^\wedge = \frac{(-1)^\alpha}{i^{|\alpha|}} (2\pi)^N \delta^{(\alpha)}$$

e portanto se $P(x) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha x^\alpha$ temos que

$$(P(x))^\wedge = (2\pi)^N \sum_{|\alpha| \leq m} \frac{(-1)^\alpha}{i^{|\alpha|}} a_\alpha \delta^{(\alpha)}$$

□

Teorema 17.4. Se $u \in \mathcal{S}$ satisfaz

$$\Delta u = 0$$

então u é um polinômio.

Demonstração. Temos que

$$\Delta u = 0 \implies (\Delta u)^\wedge = 0.$$

Mas

$$(\Delta u)^\wedge = -|\xi|^2 \hat{u}(\xi)$$

donde temos que $\text{supp } u \subset \{0\}$. Logo,

$$\hat{u} = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha \delta^{(\alpha)}.$$

Então usando a transformada inversa de Fourier temos que

$$\begin{aligned} u &= \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha \mathcal{F}^{-1} \delta^{(\alpha)} \\ &= \sum_{|\alpha| \leq m} \tilde{a}_\alpha x^\alpha. \end{aligned}$$

□

Exemplo 17.5. Seja $u \in L^1(\mathbb{R}^N) \subset \mathcal{S}'$. Para $f \in \mathcal{S}$ temos que

$$\begin{aligned} \hat{u}(f) &= u(\hat{f}) \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} u(\xi) \hat{f}(\xi) d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} u(\xi) \int_{\mathbb{R}^N} e^{-i\langle y, \xi \rangle} f(y) dy d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} f(y) \int_{\mathbb{R}^N} e^{-i\langle y, \xi \rangle} u(\xi) d\xi dy. \end{aligned}$$

Logo, $\hat{u}$ como distribuição temperada é definida pela integração contra

$$\int_{\mathbb{R}^N} e^{-i\langle y, \xi \rangle} u(\xi) d\xi$$

□

Notação. Seja $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$. Então

$$\check{u}(\varphi) = u(\check{\varphi})$$

Teorema 17.6. Se $u \in L^2(\mathbb{R}^N)$ então $\hat{u} \in L^2(\mathbb{R}^N)$ e

$$\|\hat{u}\|_2 = (2\pi)^{N/2} \|u\|_2$$

Demonstração. Dadas $u \in L^2(\mathbb{R}^N)$ e $f \in \mathcal{S}$ temos

$$\begin{aligned} |\hat{u}(f)| &= \left| \int_{\mathbb{R}^N} u(x) \hat{f}(x) dx \right| \\ &\leq \|u\|_2 \|\hat{f}\|_2 \\ &\leq (2\pi)^{-N/2} \|u\|_2 \|f\|_2, \end{aligned}$$

pela identidade de Parseval. Consideremos a seguinte aplicação:

$$\begin{aligned} T &: \mathcal{S} \longrightarrow \mathbb{C} \\ f &\longmapsto \hat{u}(f) \end{aligned}$$

Como $\mathcal{S}$ é denso em $L^2(\mathbb{R}^N)$ a aplicação T se estende (por continuidade) a um funcional linear contínuo em $L^2(\mathbb{R}^N)$ com norma $\|T\| \leq (2\pi)^{N/2} \|u\|_2$. Pelo Teorema de Riesz existe $v \in L^2(\mathbb{R}^N)$ tal que

$$T(f) = \int_{\mathbb{R}^N} v(x) f(x) dx = \hat{u}(f) \quad \forall f \in \mathcal{S}.$$

Logo, $v = \hat{u}$ e $\|\hat{u}\|_2 \leq (2\pi)^{N/2} \|u\|_2$. Agora, pela fórmula de inversão temos que

$$\mathcal{F}^{-1}(u) = \frac{1}{(2\pi)^N} \check{\check{u}}.$$

Logo,

$$u = \mathcal{F}^{-1} \hat{u} = \frac{1}{(2\pi)^N} \check{\check{u}}.$$

Assim,

$$(2\pi)^N \|u\|_2 \leq \|\hat{\hat{u}}\|_2 \leq (2\pi)^{N/2} \|\hat{u}\|_2$$

e portanto

$$(2\pi)^{N/2} \|u\|_2 \leq \|\hat{u}\|_2,$$

o que conclui a demonstração. □

Definição 17.7. Uma função $h \in C^1(\mathbb{C}^N)$ é uma **função inteira** se

$$\frac{\partial h}{\partial \bar{z}_j} = 0 \quad \forall j = 1, \dots, N.$$

Observação 17.8. Se h é inteira então h é $C^\infty(\mathbb{C}^N)$. De fato, recordemos que

$$\frac{\partial}{\partial z_j} \frac{\partial}{\partial \bar{z}_j} = \frac{1}{4} \left(\frac{\partial^2}{\partial x_j^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_j^2} \right).$$

Assim,

$$0 = \sum_1^N \frac{\partial}{\partial z_j} \frac{\partial}{\partial \bar{z}_j} h = \frac{1}{4} \Delta h \quad (\text{em } \mathbb{R}^{2N}).$$

Como Δ é um operador hipoelíptico, então $h \in C^\infty(\mathbb{R}^{2N})$.

Exemplo 17.9. Dado $a \in \mathbb{C}$, a função

$$h(z) = e^{\langle z, a \rangle}$$

é inteira. □

Teorema 17.10. Se $u \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^N)$ então $\hat{u}$ é definida pela função

$$\xi \mapsto u_x(e^{-i\langle x, \xi \rangle})$$

e esta função se estende a uma função inteira em $\mathbb{C}^N$ dada por

$$\hat{u}(z) = u_x(e^{-i\langle x, z \rangle}), \quad z \in \mathbb{C}^N.$$

Demonstração. Sejam $u \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^N)$ e $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$. Então

$$(u_x \otimes \varphi_\xi)(e^{-i\langle x, \xi \rangle}) = u_x \left(\int_{\mathbb{R}^N} \varphi(\xi) e^{-i\langle x, \xi \rangle} d\xi \right) = u(\hat{\varphi}) = \hat{u}(\varphi).$$

Por outro lado,

$$(u_x \otimes \varphi_\xi)(e^{-i\langle x, \xi \rangle}) = \int_{\mathbb{R}^N} \varphi(\xi) u_x(e^{-i\langle x, \xi \rangle}) d\xi.$$

Por fim, notemos que $\hat{u}$ é de fato uma função inteira:

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}_j} \hat{u} = u_x \left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}_j} e^{-i\langle x, z \rangle} \right) = 0.$$

□

Observação 17.11. Se $u \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^N)$ então $\hat{u} \in \mathcal{O}_M$. De fato, pelo teorema anterior temos que

$$D_\xi^\alpha \hat{u}(\xi) = u_x((-x)^\alpha e^{-i\langle x, \xi \rangle}).$$

Mas como $u \in \mathcal{E}'$ então existem $C > 0$ e $m \in \mathbb{Z}_+$ tais que

$$|u(f)| \leq C \sum_{|\alpha| \leq m} \sup_K |D^\alpha f| \quad \forall f \in C^\infty(\mathbb{R}^N).$$

Logo,

$$|D_\xi^\alpha \hat{u}(\xi)| \leq C \sum_{|\beta| \leq m} \sup_K |D^\beta(x^\alpha) e^{-i\langle x, \xi \rangle}|,$$

ou seja, as derivadas de $\hat{u}$ são dominadas por constantes (que são polinômios), donde segue a observação.

Teorema 17.12. Sejam $u \in \mathcal{S}'$ e $v \in \mathcal{E}'$. Então $u * v \in \mathcal{S}'$ e vale

$$(u * v)^\wedge = \hat{u} \hat{v}.$$

Demonstração. Em primeiro lugar, observemos que o produto $\hat{u} \hat{v}$ está bem definido. De fato, $\mathcal{S}'$ é um $\mathcal{O}_M$ -módulo (Observação 16.11) e pela observação acima $\hat{v} \in \mathcal{O}_M$, donde segue que $\hat{u} \hat{v} \in \mathcal{S}'$.

Seja $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$. Temos que

$$(u * v)(\varphi) = [(u * v) * \check{\varphi}](0).$$

Vamos mostrar que

$$[(u * v) \check{\varphi}](0) = u(\check{v} * \varphi).$$

De fato, dado $x \in \mathbb{R}^N$ temos que

$$\begin{aligned} [(u * v) \check{\varphi}](x) &= [u * (v * \check{\varphi})](x) \\ &= u_y((v * \check{\varphi})(x - y)) \\ &= u_y(v_z(\check{\varphi}(x - y - z))) \end{aligned}$$

donde

$$[(u * v) \check{\varphi}](0) = u_y(v_z(\check{\varphi}(-y - z))).$$

Agora, fixado $y \in \mathbb{R}^N$ seja

$$\eta = \check{\varphi}(-y + \cdot) \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N).$$

Então temos

$$\begin{aligned}
 v_z(\check{\varphi}(-y-z)) &= v_z(\check{\eta}) \\
 &= \check{v}(\eta) \\
 &= \check{v}_z(\check{\varphi}(-y+z)) \\
 &= \check{v}_z(\varphi(y-z)) \\
 &= (\check{v} * \varphi)(y).
 \end{aligned}$$

Logo,

$$[(u * v)\check{\varphi}](0) = u_y((\check{v} * \varphi)(y)),$$

donde segue que

$$(u * v)(\varphi) = u(\check{v} * \varphi), \quad \varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N).$$

Inspirados pela identidade acima, consideremos a seguinte aplicação:

$$\varphi \in \mathcal{S} \mapsto u(\check{v} * \varphi) \in \mathbb{C}.$$

Que se trata de uma aplicação linear é evidente. Vamos mostrar que também é contínua. De fato, como v e portanto $\hat{v}$ tem suporte compacto então existem um compacto $K \subset \mathbb{R}^N$ e constantes $C > 0, m \in \mathbb{Z}_+$ tais que

$$\begin{aligned}
 \sup_{\mathbb{R}^N} |x^\alpha D^\beta (\check{v} * \varphi)(x)| &\leq \sup_{x \in \mathbb{R}^N} |x^\alpha \check{v}_y[D_x^\beta \varphi(x-y)]| \\
 &\leq C \sum_{|\gamma| \leq k} \sup_{x \in \mathbb{R}^N} \sup_{y \in K} |x^\alpha D_x^\beta D_y^\gamma \varphi(x-y)| \\
 &\leq C \sum_{|\gamma| \leq k+|\beta|} \sup_{x \in \mathbb{R}^N} |x^\alpha D^\gamma \varphi(x)|,
 \end{aligned}$$

donde segue que $u * v \in \mathcal{S}'$ e

$$(u * v)(\hat{\varphi}) = u(\check{v} * \hat{\varphi}), \quad \varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N).$$

Por outro lado, dada $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ temos, pela segunda parte do Teorema 13.5:

$$\begin{aligned}
 (\check{v} * \hat{\varphi})(x) &= v[\hat{\varphi}(x + \cdot)] = v_y \left[\int_{\mathbb{R}^N} e^{-i\langle x+y, \xi \rangle} \varphi(\xi) d\xi \right] \\
 &= \int_{\mathbb{R}^N} e^{-i\langle x, \xi \rangle} v_y(e^{-i\langle y, \xi \rangle}) \varphi(\xi) d\xi \\
 &= \mathcal{F}(\varphi \hat{v})(x).
 \end{aligned}$$

Assim, dada $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$, vale que

$$\begin{aligned} (u * v)^\wedge(\varphi) &= u(\mathcal{F}(\varphi \hat{v})) \\ &= \hat{u}(\varphi \hat{v}) \\ &= \hat{v} \hat{u}(\varphi), \end{aligned}$$

o que conclui a demonstração. □

18 Aula 18 - 17/05/2019

18.1 O Teorema de Paley-Wiener-Schwartz

Teorema 18.1 (Paley-Wiener-Schwartz). *Sejam $U(\zeta)$ uma função inteira em $\mathbb{C}^N$ e $A > 0$. Então são equivalentes:*

(Ia) *U é a transformada de Fourier de $u \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^N)$ com suporte contido em $B_A(0)$.*

(Ib) *Existem constantes $C > 0, M \in \mathbb{Z}_+$ tais que*

$$|U(\zeta)| \leq C(1 + |\zeta|)^M e^{A|\operatorname{Im}\zeta|}$$

Também são equivalentes:

(IIa) *U é a transformada de Fourier de $u \in C_c^\infty(B_A(0))$.*

(IIb) *Para todo $M \in \mathbb{Z}_+$ existe uma constante $C_M > 0$ tal que*

$$|U(\zeta)| \leq C_M(1 + |\zeta|)^{-M} A e^{|\operatorname{Im}\zeta|}$$

Demonstração. (Ia) $\implies$ (Ib): Seja $\chi_\delta \in C_c^\infty(B_{A+\delta}(0))$ tal que $\chi_\delta = 1$ num aberto contendo $B_A(0)$ e

$$|\partial^\alpha \chi_\delta| \leq \frac{C_\alpha}{\delta^\alpha}.$$

Logo, se $\zeta \in \mathbb{C}^N$ então

$$\begin{aligned} |u(\zeta)| &= |u(e^{-i\langle \cdot, \zeta \rangle})| \\ &= |(\chi_\delta u)(e^{-i\langle \cdot, \zeta \rangle})| \\ &= |u(\chi_\delta e^{-i\langle \cdot, \zeta \rangle})| \\ &\leq C \sum_{|\alpha| \leq M} \sup_{|x| \leq A+\delta} \left| \partial^\alpha \{ \chi_\delta e^{-i\langle \cdot, \zeta \rangle} \} \right| \\ &\leq C \sum_{|\alpha| \leq M} \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} \sup_{|x| \leq A+\delta} \left| \partial^{\alpha-\beta} \chi_\delta(x) (-i\zeta) e^{-i\langle \cdot, \zeta \rangle} \right| \\ &\leq C \sum_{|\alpha| \leq M} \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} C_{\alpha-\beta} \delta^{-|\alpha-\beta|} |\zeta|^{|\beta|}. \end{aligned}$$

Notemos que

$$\left| e^{-i\langle x, \operatorname{Re}\zeta \rangle} e^{-i\langle x, i\operatorname{Im}\zeta \rangle} \right| = e^{\langle x, \operatorname{Im}\zeta \rangle} \leq e^{(A+\delta)|\operatorname{Im}\zeta|},$$

donde

$$\begin{aligned} |U(\zeta)| &\leq C' \sum_{|\alpha| \leq M} (1 + |\zeta|)^{|\alpha|} \frac{1}{\delta^{|\alpha|}} e^{(A+\delta)|\operatorname{Im}\zeta|} \\ (\delta = (1 + |\zeta|)^{-1}) &= C' \sum_{|\alpha| \leq M} (1 + |\zeta|)^{2|\alpha|} e^{A|\operatorname{Im}\zeta|} e^{\frac{|\operatorname{Im}\zeta|}{1+|\zeta|}}. \end{aligned}$$

(IIa) $\implies$ (IIb): Seja $u \in C_c^\infty(B_A(0))$. Temos

$$U(\zeta) = \int_{|x| \leq A} u(x) e^{-i\langle x, \zeta \rangle} dx$$

e

$$(i\zeta)^\alpha U(\zeta) = \int_{|x| \leq A} (\partial^\alpha u)(x) e^{-i\langle x, \zeta \rangle} dx.$$

Logo, para todo $\alpha \in \mathbb{Z}_+^N$

$$|\zeta^\alpha U(\zeta)| \leq (\sup |\partial^\alpha U|)(B_A(0)) e^{A|\operatorname{Im}\zeta|} \iff |U(\zeta)| \leq C_M (1 + |\zeta|)^{-M} e^{A|\operatorname{Im}\zeta|}.$$

(IIb) $\implies$ (IIa): Temos

$$|U(\zeta)| \leq C_M (1 + |\zeta|)^{-M} e^{A|\operatorname{Im}\zeta|}.$$

Em particular,

$$|U(\zeta)| \leq C_M (1 + |\zeta|)^{-M} \quad \forall \zeta \in \mathbb{R}^n \implies u \in \mathcal{S}', u \in L^1, u \in C^\infty(\mathbb{R}^N).$$

Temos

$$u(x) = \frac{1}{(2\pi)^N} \int_{\mathbb{R}^N} U(\xi) e^{i\langle x, \xi \rangle} d\xi.$$

Pelo Teorema de Cauchy, dado $\eta \in \mathbb{R}^N$ temos

$$u(x) = \frac{1}{(2\pi)^N} \int_{\mathbb{R}^N} U(\xi + i\eta) e^{i\langle x, \xi + i\eta \rangle} d\xi.$$

Tomando $M = N + 1$ temos

$$\begin{aligned} |u(x)| &\leq \frac{C_{N+1}}{(2\pi)^N} \int_{\mathbb{R}^N} (1 + |\xi + i\eta|)^{-N-1} e^{A|\eta|} e^{-\langle x, \eta \rangle} d\xi \\ &\leq C e^{A|\eta| - \langle x, \eta \rangle} \int_{\mathbb{R}^N} (1 + |\xi|)^{-N-1} d\xi \end{aligned}$$

e portanto

$$|u(x)| \leq C e^{A|\eta| - \langle x, \eta \rangle} \quad \forall x, \eta \in \mathbb{R}^N.$$

Pondo $\eta = tx$ com $t > 0$ temos

$$|u(x)| \leq Ce^{t|x|(A-|x|)}.$$

Se $|x| > A$, fazendo $t \rightarrow +\infty$ concluímos que $u(x) = 0$.

(Ib) $\implies$ (Ia): Temos que

$$|U(\xi)| \leq C(1 + |\xi|)^M, \quad \xi \in \mathbb{R}^N.$$

Em particular, $U|_{\mathbb{R}} \in \mathcal{S}'$ e portanto $U = \hat{u}$ para alguma $u \in \mathcal{S}'$. Seja

$$\rho_\epsilon = \frac{1}{\epsilon^N} \rho(x/\epsilon), \quad \epsilon > 0.$$

Então $\rho_\epsilon * u \rightarrow u$ em $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$. Além disso,

$$\mathcal{F}(\rho_\epsilon * u) = \mathcal{F}(\rho_\epsilon) \mathcal{F}(u) = \mathcal{F}(\rho_\epsilon) u$$

Pela parte (II), para todo $M \in \mathbb{Z}_+$ existe $C_{M,\epsilon} > 0$ tal que

$$|\hat{\rho}_\epsilon(\zeta)| \leq C_{M,\epsilon}(1 + |\zeta|)^{-M} e^{\epsilon|\operatorname{Im}\zeta|}.$$

Logo, dado $M \in \mathbb{Z}_+$ existe $\tilde{C}_{M,\epsilon} > 0$ tal que

$$|\hat{\rho}_\epsilon(\zeta)U(\zeta)| \leq \tilde{C}_{M,\epsilon}(1 + |\zeta|)^{-M} e^{(A+\epsilon)|\zeta|}.$$

Também pela parte (II), $\operatorname{supp}(\rho_\epsilon * u) \subset B_{A+\epsilon}(0)$. Como $\rho_\epsilon * u \rightarrow u$ em $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$, então $\operatorname{supp} u \subset B_A(0)$. $\square$

19 Aula 19 - 22/05/2019

19.1 A parametriz

Definição 19.1. Seja $P(D)$ um ODPLCC em $\mathbb{R}^N$. Então $E \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$ é uma **parametriz** para $P(D)$ se

$$P(D)E = \delta - \omega$$

com $\omega \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$.

Teorema 19.2. Se $P(D)$ tem uma parametriz que é $C^\infty(\mathbb{R}^N \setminus \{0\})$ então $P(D)$ é *hipoelíptico*.

Demonstração. A demonstração é a mesma do caso em que E é solução fundamental. $\square$

Teorema 19.3. Se $P(D)$ é *elíptico* então $P(D)$ admite uma parametriz $C^\infty(\mathbb{R}^N \setminus \{0\})$ e portanto é *hipoelíptico*.

Demonstração. Seja $P(D) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha D^\alpha$ ($m \geq 1$). Então o símbolo de $P(D)$ é

$$P(\xi) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha \xi^\alpha$$

e o símbolo principal de $P(D)$ é

$$P_m(\xi) = \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha \xi^\alpha.$$

Recordemos que $P(D)$ é *elíptico* se e somente se a única raiz de seu símbolo é 0. Logo,

$$|P_m(\xi/|\xi|)| \geq C \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\},$$

ou seja,

$$|P_m(\xi)| \geq C|\xi|^m \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\}.$$

Temos

$$P(\xi) = P_m(\xi) + Q(\xi)$$

com

$$|Q(\xi)| \leq C|\xi|^{m-1} \quad \forall |\xi| \geq 1.$$

Logo, se $|\xi| \geq 1$ então

$$\begin{aligned} |P(\xi)| &\geq c|\xi|^m - C|\xi|^{m-1} \\ &= |\xi|^m \left(c - \frac{C}{|\xi|} \right) \\ &\geq \frac{c}{2} |\xi|^m \end{aligned}$$

se $|\xi| > R$ para algum $R \geq 1$. Seja $\chi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ tal que $\chi = 1$ em $|\xi| \leq R$. Então

$$f(\xi) = \frac{1 - \chi(\xi)}{P(\xi)} \in C^\infty(\mathbb{R}^N) \cap L^\infty(\mathbb{R}^N) \subset \mathcal{S}'.$$

Logo, podemos tomar $E \in \mathcal{S}'$ tal que $\hat{E} = f$. Assim,

$$\mathcal{F}(P(D)E) = P(\xi)\hat{E}(\xi) = 1 - \chi(\xi)$$

e portanto

$$P(D)E = \delta - \omega$$

com $\omega = \mathcal{F}^{-1}(\chi)$.

Vamos mostrar que

$$\left| D^\alpha \frac{1}{P(\xi)} \right| \leq C_\alpha |\xi|^{-m-\alpha}, \quad |\xi| > R.$$

Se $\alpha = 0$, é trivial. Se vale para $|\beta| < |\alpha|$ então

$$\begin{aligned} 0 &= D^\alpha(1) = D^\alpha \left(P(\xi) \frac{1}{P(\xi)} \right) \\ &= \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} D^\beta \left(\frac{1}{P(\xi)} \right) D^{\alpha-\beta} P(\xi) \\ &= P(\xi) D^\alpha \left(\frac{1}{P(\xi)} \right) + \sum_{\beta \leq \alpha, \beta \neq \alpha} D^\beta \left(\frac{1}{P(\xi)} \right) D^{\alpha-\beta} P(\xi). \end{aligned}$$

Logo,

$$P(\xi) D^\alpha \left(\frac{1}{P(\xi)} \right) = - \sum_{\beta \leq \alpha, \beta \neq \alpha} D^\beta \left(\frac{1}{P(\xi)} \right) D^{\alpha-\beta} P(\xi)$$

e portanto

$$\begin{aligned} \left| P(\xi) D^\alpha \left(\frac{1}{P(\xi)} \right) \right| &\leq \sum_{\beta \leq \alpha, \beta \neq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} C_\beta |\xi|^{-m-|\beta|} |\xi|^{m-|\alpha|+|\beta|} \\ &\leq C^\alpha |\xi|^{-|\alpha|}, \end{aligned}$$

donde

$$\left| D^\alpha \frac{1}{P(\xi)} \right| \leq C'_\alpha |\xi|^{-m-|\alpha|}.$$

Temos então que

$$\left| \xi^\beta D^\alpha \left(\frac{1}{P(\xi)} \right) \right| \leq C_\alpha |\xi|^{\beta-m-|\alpha|}, \quad |\xi| \geq R.$$

Se

$$g(\xi) = \frac{1 - \chi(\xi)}{P(\xi)}$$

então

$$|\xi^\beta D^\alpha g(\xi)| \leq C_\alpha |\xi|^{\beta-m-|\alpha|} \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^N.$$

Então

$$\mathcal{F}(D^\beta(x^\alpha E(x))) \leq C_\alpha |\xi|^{\beta-m-|\alpha|}.$$

Fixamos $\beta \in \mathbb{Z}_+^N$ e tomamos α com $|\alpha| > N + 1 + |\beta| - m$. Com esta escolha de α temos que $\xi^\beta D^\alpha g(\xi) \in L^1(\mathbb{R}^N)$ e portanto

$$D^\beta(x^\alpha E(x)) = \frac{1}{(2\pi)^N} \int_{\mathbb{R}^N} \xi^\beta D^\alpha g(\xi) e^{i\langle x, \xi \rangle} d\xi \in C(\mathbb{R}^N).$$

Concluimos então que para todo β se $|\alpha| > N + 1 + |\beta| - m$ então $D^\beta(x^\alpha E(x)) \in C(\mathbb{R}^N)$. Em particular, se $|\alpha| > N + 1 - m$ então $x^\alpha E(x) \in C(\mathbb{R}^N)$.

Dado $x_0 \neq 0$ existe α com $|\alpha| > N + 1 - m$ tal que se $x_0^\alpha \neq 0$ então $x^\alpha \neq 0$ em uma vizinhança V_0 de x_0 . Logo $E(x)$ é contínuo em V_0 . Suponhamos então $D^\gamma E$ contínua em $\mathbb{R}^N \setminus \{0\}$ para todo γ tal que $|\gamma| \leq |\beta|$. Dado $x_0 \neq 0$ existe α com $|\alpha| > N + 1 + |\beta| - m$ tal que se $x_0^\alpha \neq 0$ então $x^\alpha \neq 0$ em V_0 . Temos:

$$D^\beta(x^\alpha E(x)) = x^\alpha D^\beta E(x) + F_{\alpha\beta}(x).$$

Logo, $D^\beta E$ é contínua em V_0 . □

Teorema 19.4. *Sejam $P(D)$ elíptico, $f \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$ e $x_0 \in \mathbb{R}^N$. Então existe $u \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$ tal que $P(D)u = f$ em uma vizinhança de x_0 .*

Demonstração. Pelo teorema anterior, $P(D)$ admite uma parametriz, então temos

$$P(D)E = \delta - \omega.$$

Seja $g \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$. Então

$$\begin{aligned} P(D)(E * g) &= P(D)E * g \\ &= \delta * g - \omega * g \\ &= g - \omega * g. \end{aligned}$$

Seja $\chi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ tal que $\text{supp } \chi \subset \Omega$, onde Ω é um aberto contendo x_0 , e $\chi = 1$ em uma vizinhança de x_0 . Então

$$\begin{aligned} P(D)[E * (\chi g)] &= \chi g - \omega * (\chi g) \\ &= \chi g - \chi(\omega * (\chi g)) - (1 - \chi)(\omega * (\chi g)) \\ &= g - \chi(\omega * (\chi g)) - (1 - \chi)(\omega * (\chi g)) - (1 - \chi)g. \end{aligned}$$

Basta determinar g tal que

$$g_\chi(\omega * (\chi g)) = \chi f,$$

ou seja,

$$g - Tg = \chi f \tag{19.1}$$

com

$$Tg(x) = \chi(x) \int_{\Omega} \omega(x-y)(\chi g)(y) \, dy.$$

Suponhamos Ω de fecho compacto e seja $x \in \Omega$. Temos

$$\begin{aligned} |Tg(x)| &\leq \int_{\Omega} |\omega(x-y)| |\chi g(y)| \, dy \\ &\leq \sup_{\Omega \times \Omega} |\omega(x-y)| \sup_{\Omega} |g(y)| |\Omega| \\ &\leq \frac{1}{2} \sup_{\Omega} |g| \end{aligned}$$

se Ω for pequeno o suficiente. Logo, podemos calcular a inversa de $I - T$:

$$(I - T)^{-1} = \sum_0^{\infty} T^j.$$

Assim

$$g(x) = \sum_0^{\infty} T^j(\chi f) \in C_c(\mathbb{R}^N), \quad \text{supp } g \subset \Omega.$$

Pela Equação (19.1) segue que $g \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$. □

Observação 19.5. O operador $(1 - \Delta)$ em $\mathbb{R}^N$ tem símbolo $1 + |\xi|^2$. Logo, $(1 - \Delta)^m$ tem símbolo $(1 + |\xi|^2)^m$.

Proposição 19.6. Dada $v \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^N)$ existem $u \in C^\infty(\mathbb{R}^N) \cap \mathcal{S}'$ e $M \in \mathbb{Z}_+$ tais que

$$(1 - \Delta)^M u = v.$$

Demonstração. Temos que

$$\begin{aligned}(1 - \Delta)^M u = v &\iff (1 + |\xi|^2)^M \hat{u} = \hat{v} \\ &\iff \hat{u}(\xi) = \frac{\hat{v}(\xi)}{(1 + |\xi|^2)^M}.\end{aligned}$$

Mas existe $k \in \mathbb{Z}_+$ tal que

$$\hat{v}(\xi) \leq C(1 + |\xi|^2)^k$$

e portanto

$$|\hat{u}(\xi)| \leq C \frac{1}{(1 + |\xi|^2)^{M-k}}.$$

Se $2M - 2k > N + 1$ então $\hat{u} \in L^1(\mathbb{R}^N)$ e portanto $u \in C(\mathbb{R}^N)$. $\square$

Teorema 19.7 (da estrutura). *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ e $U \subset \Omega$ um aberto relativamente compacto. Então existem $v \in C(\mathbb{R}^N)$ e $M \in \mathbb{Z}_+$ tais que*

$$u|_U = (1 - \Delta)^M v|_U.$$

Demonstração. Tomemos $\chi \in C_c^\infty(\Omega)$ tal que $\chi = 1$ em uma vizinhança de $\overline{U}$. Segue da proposição. $\square$

20 Aula 20 - 24/05/2019

20.1 Espaços de Sobolev

Definição 20.1. Seja $s \in \mathbb{R}$. Definimos $H^s(\mathbb{R}^N)$ como o espaço das distribuições temperadas $u \in \mathcal{S}'$ tais que

$$\hat{u} \in L^2\left(\mathbb{R}^N, \frac{(1 + |\xi|^2)^s}{(2\pi)^N} d\xi\right),$$

ou seja, tais que

$$\|u\|_s := \left(\frac{1}{(2\pi)^N} \int_{\mathbb{R}^N} (1 + |\xi|^2)^s |\hat{u}(\xi)|^2 d\xi \right)^{1/2} < \infty.$$

Observação 20.2. Notemos que $H^0(\mathbb{R}^N) = L^2(\mathbb{R}^N)$.

Proposição 20.3. Seja $s \in \mathbb{R}$. Então $H^s(\mathbb{R}^N)$ é um espaço de Hilbert com o produto interno

$$\langle u, v \rangle = \frac{1}{(2\pi)^N} \int_{\mathbb{R}^N} (1 + |\xi|^2)^s \hat{u}(\xi) \overline{\hat{v}(\xi)} d\xi.$$

Demonstração. Recordemos que se $u \in L^2(\mathbb{R}^N)$ então $\hat{u} \in L^2(\mathbb{R}^N)$ e vale que

$$\|\hat{u}\|_2 = (2\pi)^{N/2} \|u\|_2.$$

Seja $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset H^s(\mathbb{R}^N)$ uma sequência de Cauchy. Notemos que

$$\begin{aligned} \|u_n - u_m\|_2^2 &= (2\pi)^{N/2} \|\hat{u}_n - \hat{u}_m\|_2^2 \\ &= (2\pi)^{N/2} \int_{\mathbb{R}^N} |\hat{u}_n - \hat{u}_m|^2 d\xi \\ &\leq (2\pi)^{N/2} \int_{\mathbb{R}^N} (1 + |\xi|^2)^s |\hat{u}_n - \hat{u}_m|^2 d\xi \longrightarrow 0, \end{aligned}$$

donde segue que (u_n) é de Cauchy em $L^2(\mathbb{R}^N)$. Mas este é um espaço de Hilbert, donde segue que existe $u \in L^2(\mathbb{R}^N)$ tal que

$$u_n \longrightarrow u.$$

Agora, queremos que $u \in H^s(\mathbb{R}^N)$, logo devemos mostrar que $(1 + |\xi|^2)^s \hat{u} \in L^2(\mathbb{R}^N)$.

Notemos que

$$\|u_n - u_m\|_s^2 = \frac{1}{(2\pi)^N} \int_{\mathbb{R}^N} |(1 + |\xi|^2)^{s/2} \hat{u}_n - (1 + |\xi|^2)^{s/2} \hat{u}_m|^2 d\xi$$

e portanto a sequência $((1 + |\xi|^2)^{s/2} \hat{u}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é de Cauchy em $L^2(\mathbb{R}^N)$. Seja $v \in L^2(\mathbb{R}^N)$ o limite desta sequência. Vamos mostrar que

$$v = (1 + |\xi|^2)^{s/2} \hat{u}$$

mostrando que os limites em $\mathcal{S}'$ são iguais.

Vamos mostrar que $(1 + |\xi|^2)^{s/2} \hat{u}_n \rightarrow (1 + |\xi|^2)^{s/2} \hat{u}$ em $\mathcal{S}'$. De fato, para toda $\varphi \in \mathcal{S}$ temos que

$$\begin{aligned} (1 + |\xi|^2)^{s/2} \hat{u}_n(\varphi) &= \hat{u}_n((1 + |\xi|^2)^{s/2} \varphi) \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} \hat{u}_n(\xi) (1 + |\xi|^2)^{s/2} \varphi(\xi) d\xi \\ &\rightarrow \int_{\mathbb{R}^N} \hat{u}(\xi) (1 + |\xi|^2)^{s/2} \varphi(\xi) d\xi \\ &= (1 + |\xi|^2)^{s/2} u(\varphi) \end{aligned}$$

donde segue a afirmação. Analogamente,

$$(1 + |\xi|^2)^{s/2} \hat{u}_n(\varphi) \rightarrow v(\varphi).$$

Como o limite é único temos que $(1 + |\xi|^2)^{s/2} \hat{u} = v \in L^2(\mathbb{R}^N)$, e portanto $u \in H^s(\mathbb{R}^N)$.

Por fim, temos que

$$\begin{aligned} \|u - u_n\|_s^2 &= \frac{1}{(2\pi)^N} \int_{\mathbb{R}^N} (1 + |\xi|^2)^s |\hat{u} - \hat{u}_n|^2 d\xi \\ &= \frac{1}{(2\pi)^N} \int_{\mathbb{R}^N} |(1 + |\xi|^2)^{s/2} \hat{u} - (1 + |\xi|^2)^{s/2} \hat{u}_n|^2 d\xi \\ &\rightarrow 0, \end{aligned}$$

o que conclui a demonstração. □

Observação 20.4. Se $s \geq r$ então

$$H^s(\mathbb{R}^N) \subset H^r$$

e vale que

$$\|u\|_r \leq \|u\|_s$$

(donde segue que a inclusão é contínua). De fato, seja $u \in H^s(\mathbb{R}^N)$. Então temos que

$$\begin{aligned} \infty &\geq \frac{1}{(2\pi)^N} \int_{\mathbb{R}^N} (1 + |\xi|^2)^s |\hat{u}|^2 d\xi \\ &\geq \frac{1}{(2\pi)^N} \int_{\mathbb{R}^N} (1 + |\xi|^2)^r |\hat{u}|^2 d\xi \end{aligned}$$

Proposição 20.5. *Seja $s \in \mathbb{R}$. Então $\mathcal{S} \hookrightarrow H^s(\mathbb{R}^N)$ e a inclusão é contínua.*

Demonstração. Seja $\varphi \in \mathcal{S}$. Então

$$\begin{aligned}\|\varphi\|_s^2 &= \frac{1}{(2\pi)^N} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{(1+|\xi|^2)^s}{(1+|\xi|^2)^p} |(1+|\xi|^2)^p \hat{\varphi}(\xi)| d\xi \\ &\leq C_p \sup_{\mathbb{R}^N} |(1+|\xi|^2)^p \hat{\varphi}(\xi)|\end{aligned}$$

para p suficientemente grande.

Para mostrar a continuidade, consideremos uma sequência $(\varphi_j) \subset \mathcal{S}$ tal que $\varphi_j \rightarrow 0$ em $\mathcal{S}$ arbitrária. Então temos

$$\begin{aligned}\hat{\varphi}_j \rightarrow 0 \text{ em } \mathcal{S} &\implies (1+|\xi|^2)^p \hat{\varphi}_j \rightarrow 0 \text{ em } L^\infty \\ &\implies \varphi_j \rightarrow 0 \text{ em } H^s(\mathbb{R}^N)\end{aligned}$$

donde segue a continuidade da inclusão. $\square$

Definição 20.6. Seja $s \in \mathbb{R}$. Definimos a aplicação $T^s : \mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{S}$ da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}T^s u &= \mathcal{F}^{-1} \left((1+|\xi|^2)^{s/2} \hat{u}(\xi) \right) \\ &= \frac{1}{(2\pi)^N} \int_{\mathbb{R}^N} e^{i\langle x, \xi \rangle} (1+|\xi|^2)^{s/2} \hat{u}(\xi) d\xi, \quad u \in \mathcal{S}\end{aligned}$$

Observação 20.7. A aplicação $\xi \mapsto 1+|\xi|^2$ pertence a $\mathcal{O}_M$.

Observação 20.8. Vale que

$$H^s(\mathbb{R}^N) = \left\{ u \in \mathcal{S}'; T^s u \in L^2(\mathbb{R}^N) \right\},$$

com

$$\|u\|_s = \|T^s u\|_0.$$

Logo, $T^s : H^s(\mathbb{R}^N) \longrightarrow H^0(\mathbb{R}^N)$ é uma isometria com inversa T^{-s} . Em geral, são isometrias as aplicações

$$T^r : H^s(\mathbb{R}^N) \longrightarrow H^{s-r}(\mathbb{R}^N)$$

com $r, s \in \mathbb{R}$.

Observação 20.9. Dado $s \in \mathbb{R}$ temos que

$$H^s(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow \mathcal{S}'$$

e a inclusão é contínua. De fato, seja $(u_j) \subset H^s(\mathbb{R}^N)$ tal que $u_j \rightarrow 0$ em $H^s(\mathbb{R}^N)$. Então temos que $T^s u_j \rightarrow 0$ em $L^2(\mathbb{R}^N)$ e portanto em $\mathcal{S}'$. Logo, $u_j = T^{-s} T^s u_j \rightarrow 0$ em $\mathcal{S}'$, donde segue a afirmação.

Observação 20.10. Como $\mathcal{S}$ é denso em $L^2(\mathbb{R}^N)$ temos que $T^{-s}\mathcal{S} = \mathcal{S}$ é denso em $H^s(\mathbb{R}^N)$.

Teorema 20.11. Se $s = m \in \mathbb{Z}_+$ então

$$H^s(\mathbb{R}^N) = \left\{ u \in L^2(\mathbb{R}^N); D^\alpha u \in L^2(\mathbb{R}^N) \ \forall |\alpha| \leq m \right\}$$

e a norma

$$\|u\|_m = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_0^2 \right)^{1/2}$$

é equivalente a $\|u\|_m$.

Demonstração. Sabemos (ver Cavalcanti e Cavalcanti (2009)) que

$$\frac{1}{C_m} \sum_{|\alpha| \leq m} \xi^{2\alpha} \leq (1 + |\xi|^2)^m \leq C_m \sum_{|\alpha| \leq m} \xi^{2\alpha}.$$

Daí segue que

$$\frac{1}{C_m(2\pi)^N} \int_{\mathbb{R}^N} \sum_{|\alpha| \leq m} \xi^{2\alpha} |\hat{u}|^2 d\xi \leq \|u\|_m^2 \leq \frac{C_m}{(2\pi)^N} \sum_{|\alpha| \leq m} \xi^{2\alpha} |\hat{u}|^2 d\xi.$$

Notando que

$$\xi^{2\alpha} |\hat{u}|^2 = |(D^\alpha u)^\wedge|^2$$

a tese segue facilmente. □

Notemos que $H^s(\mathbb{R}^N) \subset H^0(\mathbb{R}^N) = L^2(\mathbb{R}^N)$ para todo $s \geq 0$, então os elementos de $H^2(\mathbb{R}^N)$ são funções. Para $s < 0$ os elementos do respectivo espaço de Sobolev tem uma natureza mais singular.

Exemplo 20.12. Com $N = 1$, seja

$$f(x) = \frac{1}{\pi x} \sin x.$$

Temos que $f = \mathcal{F}^{-1} \chi_{[-1,1]}$:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^{-1} \chi_{[-1,1]}(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{ix\xi} \chi_{[-1,1]}(\xi) d\xi \\ &= \frac{1}{2\pi x} \int_{-1}^1 e^{ix\xi} x d\xi \\ &= \frac{1}{2\pi x} \int_{-x}^x \cos u du \\ &= \frac{1}{\pi x} \sin x. \end{aligned}$$

Mas então $\hat{f} = \chi_{[-1,1]}$ e portanto $f \in H^s(\mathbb{R})$ para todo $s \in \mathbb{R}$. □

Exemplo 20.13. Sabemos que $\hat{\delta} = 1$. Então

$$\|\delta\|_s = \frac{1}{(2\pi)^N} \int_{\mathbb{R}^N} (1 + |\xi|^2)^s d\xi = \omega_N \int_0^\infty (1 + r^2)^s r^{N-1} dr.$$

Sabemos a priori que s deve ser negativo, do contrário a integral é claramente divergente. Então temos, para $s < 0$:

$$\begin{aligned} \int_0^\infty (1 + r^2)^s r^{N-1} dr &= \int_0^\infty \frac{1}{(1 + r^2)^{-s}} r^{N-1} dr \\ &\leq \int_0^1 \frac{1}{(1 + r^2)^{-s}} r^{N-1} dr + \int_1^\infty \frac{1}{r^{-2s}} r^{N-1} dr. \end{aligned}$$

Assim,

$$\delta \in H^s(\mathbb{R}^N) \iff s \leq -\frac{1}{2}N.$$

□

Seja $s > 0$. Sabemos que $H^s(\mathbb{R}^N)$ é um espaço de Hilbert, e portanto pode ser identificado com seu dual $\left(H^s(\mathbb{R}^N)\right)^*$ de forma natural (via isomorfismo de Riesz) pelo produto interno. No entanto, o produto interno em $L^2(\mathbb{R}^N)$ nos fornece uma forma natural de identificar $\left(H^s(\mathbb{R}^N)\right)^*$ com $H^{-s}(\mathbb{R}^N)$.

Antes, notemos que se $v \in H^s(\mathbb{R}^N)$ então $\bar{v} \in H^s(\mathbb{R}^N)$ e $\|\bar{v}\|_s = \|v\|_s$:

$$\begin{aligned} \|\bar{v}\|_s^2 &= \frac{1}{(2\pi)^N} \int_{\mathbb{R}^N} (1 + |\xi|^2)^s |\hat{\bar{v}}(\xi)|^2 d\xi \\ &= \frac{1}{(2\pi)^N} \int_{\mathbb{R}^N} (1 + |\xi|^2)^s |\hat{v}(-\xi)|^2 d\xi. \end{aligned}$$

Tomemos então $u \in H^s(\mathbb{R}^N)$ e $v \in H^{-s}(\mathbb{R}^N)$. Então $\bar{v} \in H^{-s}(\mathbb{R}^N)$ e temos que

$$\hat{u}\hat{\bar{v}} = \left[(1 + |\xi|^2)^{s/2} \hat{u}\right] \left[(1 + |\xi|^2)^{-s/2} \hat{\bar{v}}\right] \in L^1(\mathbb{R}^N),$$

uma vez que ambos os termos no lado direito estão em $L^2(\mathbb{R}^N)$. Assim, v define um funcional linear contínuo sobre $H^s(\mathbb{R}^N)$:

$$\begin{aligned} J_v &: H^s(\mathbb{R}^N) \longrightarrow \mathbb{C} \\ u &\longmapsto \int_{\mathbb{R}^N} \hat{u}\hat{\bar{v}} d\xi \end{aligned}$$

Por outro lado, seja J um funcional linear contínuo sobre $H^s(\mathbb{R}^N)$. Como $H^s(\mathbb{R}^N)$ é um espaço de Hilbert, temos que $\exists g \in H^s(\mathbb{R}^N)$ tal que

$$\begin{aligned} J(u) &= \frac{1}{(2\pi)^N} \int_{\mathbb{R}^N} (1 + |\xi|^2)^s \hat{u}(\xi) \bar{\hat{g}}(\xi) d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} \hat{u}\hat{\bar{w}} d\xi \end{aligned}$$

onde

$$w(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^N} (1 + |\xi|^2)^s v \in H^{-s}(\mathbb{R}^N)$$

(pois $H^s(\mathbb{R}^N) \subset H^{-s}(\mathbb{R}^N)$).

Notemos que

$$\begin{aligned} J_v(u) &\leq \frac{1}{(2\pi)^N} \int_{\mathbb{R}^N} |\hat{u}(\xi) \hat{v}(\xi)| d\xi \\ &= \frac{1}{(2\pi)^N} \int_{\mathbb{R}^N} (1 + |\xi|^2)^{s/2} |\hat{u}(\xi)| (1 + |\xi|^2)^{-s/2} |\hat{v}(-\xi)| d\xi \\ &\leq \|u\|_s \|v\|_{-s} \end{aligned}$$

Para o próximo teorema precisaremos do seguinte

Lema 20.14. *Para quaisquer $\xi, \eta \in \mathbb{R}^N$ e $s \in \mathbb{R}$ vale que*

$$(1 + |\xi|^2)^s \leq 2^{|s|} (1 + |\xi - \eta|^2)^{|s|} (1 + |\eta|^2)^s$$

Demonstração. Primeiro, seja $s \geq 0$. Então temos

$$\begin{aligned} (1 + |\xi|^2)^s &\leq (1 + |\xi - \eta + \eta|^2)^s \\ &\leq (1 + 2|\xi - \eta|^2 + 2|\eta|^2)^s \\ &\leq 2^s (1 + |\xi - \eta|^2 + |\eta|^2)^s \\ &\leq 2^s (1 + |\xi - \eta|^2)^s (1 + |\eta|^2)^s. \end{aligned}$$

Mas

$$(1 + |\eta|^2)^{-s} \leq 2^s (1 + |\xi - \eta|^2)^s (1 + |\xi|^2)^{-s}$$

e então, trocando η por ξ temos

$$(1 + |\xi|^2)^{-s} \leq 2^s (1 + |\xi - \eta|^2)^s (1 + |\eta|^2)^{-s}.$$

□

Vamos mostrar que a multiplicação por funções de Schwartz preserva os espaços $H^s(\mathbb{R}^N)$. Isto será útil para localizarmos espaços de Sobolev.

Teorema 20.15. *Sejam $u \in H^s(\mathbb{R}^N)$ e $\varphi \in \mathcal{S}$. Então $\varphi u \in H^s(\mathbb{R}^N)$ e existe uma constante $C = C(\varphi, s)$ tal que*

$$\|\varphi u\|_s \leq C \|u\|_s.$$

Demonstração. Suponhamos $u \in \mathcal{S}$. Então

$$(\varphi u)^\wedge(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^N} \int_{\mathbb{R}^N} \hat{\varphi}(\xi - \eta) \hat{u}(\eta) d\eta.$$

De fato:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} \hat{\varphi}(\xi - \eta) \hat{u}(\eta) d\eta &= \int_{\mathbb{R}^N} \left(\int_{\mathbb{R}^N} e^{-i\langle x, \xi - \eta \rangle} \varphi(x) dx \right) \hat{u}(\eta) d\eta \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} \left(\int_{\mathbb{R}^N} e^{i\langle x, \eta \rangle} \hat{u}(\eta) d\eta \right) e^{-i\langle x, \xi \rangle} \varphi(x) dx \\ &= (2\pi)^N \int_{\mathbb{R}^N} u(x) \varphi(x) e^{-i\langle x, \xi \rangle} dx \\ &= (2\pi)^N (\varphi u)^\wedge(\xi). \end{aligned}$$

Agora, notemos que

$$(1 + |\xi|^2)^{s/2} |(\varphi u)^\wedge| \leq \frac{2^{|s|/2}}{(2\pi)^N} \int_{\mathbb{R}^N} (1 + |\xi - \eta|^2)^{|s|/2} |\hat{\varphi}(\xi - \eta)| (1 + |\eta|^2)^{s/2} |\hat{u}(\eta)| d\eta$$

donde seque que

$$\|\varphi u\|_s^2 \leq c \|(1 + |\eta|^2)^{|s|/2} \hat{\varphi}(\eta)\|_1 \|u\|_s^2.$$

Concluimos então que existe $C = C(\varphi, s)$ tal que

$$\|\varphi u\|_s \leq C \|u\|_s \quad \forall u \in \mathcal{S}.$$

Seja então $(u_j) \subset \mathcal{S}$ tal que $u_j \rightarrow u \in H^s(\mathbb{R}^N)$. Se $j, k \in \mathbb{N}$ temos que

$$\|\varphi(u_j - u_k)\|_s \leq C \|u_j - u_k\|_s,$$

ou seja, (φu_j) é uma sequência de Cauchy e portanto $\varphi u_j \rightarrow v \in H^s(\mathbb{R}^N)$. Mas $u_j \rightarrow u$ em $\mathcal{S}'$, logo $\varphi u_j \rightarrow \varphi u$ em $\mathcal{S}'$ e portanto $v = \varphi u$, donde decorre a tese. $\square$

21 Aula 21 - 29/05/2019

21.1 Espaços de Sobolev (continuação)

Os espaços de Sobolev se comportam bem em relação a derivadas:

Teorema 21.1. *Seja $P(D)$ um operador diferencial parcial linear de coeficientes constantes de ordem m e seja $s \in \mathbb{R}$. Então $P(D)$ define um operador linear contínuo*

$$P(D): H^s(\mathbb{R}^N) \longrightarrow H^{s-m}(\mathbb{R}^N).$$

Demonstração. Seja $u \in H^s(\mathbb{R}^N)$. Notemos que existe $C > 0$ tal que

$$P(\xi) \leq C(1 + |\xi|^2)^{m/2}.$$

Então

$$\begin{aligned} (1 + |\xi|^2)^{s-m} |(P(D)u)^\wedge(\xi)|^2 &\leq (1 + |\xi|^2)^{s-m} |P(\xi)|^2 |\hat{u}(\xi)|^2 \\ &\leq C^2 (1 + |\xi|^2)^s |\hat{u}(\xi)|^2. \end{aligned}$$

□

Lema 21.2. *Sejam $s \in \mathbb{R}$ e $k \in \mathbb{Z}_+$ tais que*

$$s > k + \frac{N}{2}.$$

Então existe $C = C(k, N, s) > 0$ tal que

$$\|D^\alpha u\|_\infty \leq C \|u\|_s \quad \forall u \in \mathcal{S}, \quad \forall |\alpha| \leq k.$$

Demonstração. Pela fórmula de inversão de Fourier, temos que

$$u(x) = \frac{1}{(2\pi)^N} \int_{\mathbb{R}^N} e^{i\langle x, \xi \rangle} \hat{u}(\xi) d\xi.$$

Temos também que

$$D^\alpha u(x) = \frac{1}{(2\pi)^N} \int_{\mathbb{R}^N} e^{i\langle x, \xi \rangle} \xi^\alpha \hat{u}(\xi) d\xi$$

e portanto

$$\begin{aligned} |D^\alpha u(x)| &\leq \frac{1}{(2\pi)^N} \int_{\mathbb{R}^N} |\xi|^{|\alpha|} |\hat{u}(\xi)| d\xi \\ &= \frac{1}{(2\pi)^N} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|\xi|^{|\alpha|}}{(1 + |\xi|^2)^{s/2}} (1 + |\xi|^2)^{s/2} |\hat{u}(\xi)| d\xi \\ &\leq \frac{1}{(2\pi)^N} \left\{ \int_{\mathbb{R}^N} (1 + |\xi|^2)^s |\hat{u}(\xi)|^2 d\xi \right\}^{1/2} \left\{ \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|\xi|^{2|\alpha|}}{(1 + |\xi|^2)^s} d\xi \right\}^{1/2} \\ &\leq \|u\|_s \left\{ \frac{1}{(2\pi)^N} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{(1 + |\xi|^2)^{s-k}} d\xi \right\} \end{aligned}$$

pois

$$\begin{aligned} |\xi|^{2|\alpha|} &\leq (1 + |\xi|^{2|\alpha|}) \\ &\leq (1 + |\xi|^2)^{|\alpha|} \\ &\leq (1 + |\xi|^2)^k. \end{aligned}$$

□

Notação. Denotaremos

$$B^k(\mathbb{R}^N) := \left\{ u \in C^k(\mathbb{R}^N); D^\alpha u \in L^\infty(\mathbb{R}^N) \ \forall |\alpha| \leq k \right\}$$

com a norma

$$\|u\|_{(k)} := \sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha u\|_\infty.$$

Observação 21.3. É fácil ver que $B^k(\mathbb{R}^N)$ com a norma acima é um espaço de Banach.

Teorema 21.4. *São equivalentes:*

- (i) $s > k + \frac{N}{2}$.
- (ii) $H^s(\mathbb{R}^N) \subset B^k(\mathbb{R}^N)$.

Demonstração. (i) $\implies$ (ii) Pelo lema anterior, temos que

$$\|u\|_{(k)} \leq C \|u\|_s \quad \forall u \in \mathcal{S}.$$

Seja $v \in H^s(\mathbb{R}^N)$. Então existe uma sequência $(u_j) \subset \mathcal{S}$ tal que $u_j \rightarrow v$ em $H^s(\mathbb{R}^N)$. Mas então

$$\|u_j - u_n\|_{(k)} \leq C \|u_j - u_n\|_s,$$

donde segue que (u_j) é uma sequência de Cauchy em $B^k(\mathbb{R}^N)$. Mas então existe $w \in B^k(\mathbb{R}^N)$ tal que $u_j \rightarrow w$. Agora, como ambas as convergências se dão em $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$ segue que $v = w \in B^k(\mathbb{R}^N)$.

(ii) $\implies$ (i) Vamos mostrar que a inclusão é contínua. Seja $(u_j) \subset H^s(\mathbb{R}^N)$ tal que

$$\begin{aligned} u_j &\rightarrow u && \text{em } H^s(\mathbb{R}^N) \\ u_j &\rightarrow v && \text{em } B^k(\mathbb{R}^N). \end{aligned}$$

Como as convergências se dão em $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$ temos que $u = v$ e portanto o gráfico da aplicação de inclusão é fechado. Pelo Teorema do Gráfico Fechado segue a continuidade da inclusão. Assim, temos que existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\|u\|_{(k)} \leq C \|u\|_s \quad \forall u \in H^s(\mathbb{R}^N),$$

ou seja, temos (redefinindo a constante) que

$$\sum_{|\alpha| \leq k} |D^\alpha u(x)| \leq C \|u\|_s \quad \forall u \in H^s(\mathbb{R}^N), \forall x \in \mathbb{R}^N.$$

Mas então

$$\sum_{|\alpha| \leq k} |\delta_x^{(\alpha)} u| \leq C \|u\|_s \quad \forall u \in H^s(\mathbb{R}^N), \forall x \in \mathbb{R}^N$$

e portanto

$$|\delta_x^{(\alpha)} u| \leq C \|u\|_s \quad \forall u \in H^s(\mathbb{R}^N), \forall x \in \mathbb{R}^N, \forall |\alpha| \leq k.$$

Sendo

$$T_{\alpha,x} = \delta_x^{(\alpha)}$$

definamos

$$\mathfrak{F} = \left\{ T_{\alpha,x}; x \in \mathbb{R}^N, \alpha \in \mathbb{Z}_+^N, \|\alpha\| \leq k \right\}.$$

Temos que

$$\mathfrak{F} \subset \left(H^s(\mathbb{R}^N) \right)^* = H^{-s}(\mathbb{R}^N)$$

é limitado. Vamos obter uma descrição de $\hat{T}_{\alpha,x}$ que nos permita usar este fato. Notemos que para $\varphi \in \mathcal{S}$ temos que

$$\begin{aligned} \hat{T}_{\alpha,x}(\varphi) &= T_{\alpha,x}(\hat{\varphi}) \\ &= T_{\alpha,x} \left(\int_{\mathbb{R}^N} e^{-i\langle \cdot, y \rangle} \varphi(y) dy \right) \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} (iy)^\alpha e^{-i\langle x, y \rangle} \varphi(y) dy, \end{aligned}$$

donde concluímos que

$$\hat{T}_{\alpha,x} = (iy)^\alpha e^{-i\langle x, y \rangle}.$$

Uma vez que $\|T_{\alpha,x}\|_s < \infty$ segue que

$$\int_{\mathbb{R}^N} (1 + |\xi|^2)^{-s} |\xi|^{2\alpha} d\xi < \infty$$

donde concluímos que

$$s > k + \frac{N}{2}.$$

□

Até agora vimos apenas espaços de Sobolev em todo o $\mathbb{R}^N$. É possível generalizar e estudar espaços de Sobolev locais.

Definição 21.5. Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto e $s \in \mathbb{R}$. Definimos

$$H_{loc}^s(\Omega) := \left\{ u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N); \varphi u \in H^s(\mathbb{R}^N) \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega) \right\}.$$

Temos em $H_{loc}^s(\Omega)$ a seguinte noção de convergência:

Definição 21.6. Seja $(u_j) \subset H_{loc}^s(\Omega)$. Então

$$u_j \rightarrow 0 \quad \text{em } H_{loc}^s(\Omega)$$

se

$$\varphi u_j \rightarrow 0 \quad \text{em } H^s(\mathbb{R}^N) \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N).$$

Vamos agora estudar algumas propriedades dos espaços H_{loc}^s .

Proposição 21.7. Sejam $s \geq l$. Então $H_{loc}^s(\Omega) \subset H_{loc}^l(\Omega)$ e a inclusão é contínua.

Demonstração. Seja $u \in H_{loc}^s(\Omega)$. Por definição, temos que

$$\varphi u \in H^s(\mathbb{R}^N) \subset H^l(\mathbb{R}^N) \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N),$$

donde segue que $H_{loc}^s(\Omega) \subset H_{loc}^l(\Omega)$. A continuidade segue de maneira análoga. $\square$

As próximas duas propriedades são triviais.

Proposição 21.8. $H_{loc}^0 = L_{loc}^2(\Omega)$

Proposição 21.9. Se $u \in H_{loc}^s(\Omega)$ e $f \in C^\infty(\Omega)$ então $fu \in H_{loc}^s(\Omega)$.

Proposição 21.10. Se $u \in H_{loc}^s(\Omega)$ e $\alpha \in \mathbb{Z}_+^N$ então $D^\alpha u \in H_{loc}^{s-|\alpha|}$. Em geral, se $P(x, D) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) D^\alpha$ com $a_\alpha \in C^\infty(\Omega)$ então

$$u \in H_{loc}^s(\Omega) \implies P(x, D)u \in H_{loc}^{s-m}(\Omega).$$

Demonstração. Seja $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$. Temos que $\varphi u \in H^s(\mathbb{R}^N)$. Temos então:

$$\varphi D_j u = D_j(\varphi u) - (D_j \varphi)u.$$

Mas os dois termos no lado direito estão em $H^{s-1}(\mathbb{R}^N)$. Como φ é arbitrária, isto demonstra que $D_j u \in H_{loc}^{s-1}(\Omega)$. Procedendo de maneira análoga e utilizando a regra de Leibniz obtemos a tese. $\square$

A seguinte propriedade é uma caracterização importante dos espaços $H_{loc}^s(\Omega)$.

Proposição 21.11. *Seja $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Então $u \in H_{loc}^s(\Omega)$ se, e somente se $\forall U \subset \Omega$ com fecho compacto existe $\tilde{u} \in H^s(\mathbb{R}^N)$ tal que $\tilde{u} = u$ em U .*

Demonstração. Seja $U \subset \Omega$ com fecho compacto. Então existe uma função de corte $\psi \in C_c^\infty(\Omega)$ tal que $\psi = 1$ em U . Então $u = \psi u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ em U .

Por outro lado, seja $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$. Então existe $\tilde{u} \in H^s(\mathbb{R}^N)$ tal que $u = \tilde{u}$ em $\text{supp } \varphi$, donde segue que $\varphi u \in H^s(\mathbb{R}^N)$ pelo Teorema 20.15. $\square$

Observação 21.12. Seja $v \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^N)$. Então pelo Teorema de Paley-Wiener-Schwartz existem $C > 0$ e $M \in \mathbb{Z}_+$ tais que

$$|\hat{v}(\xi)| \leq C(1 + |\xi|^2)^M \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^N$$

donde segue que $v \in H^s(\mathbb{R}^N)$ para algum $s \in \mathbb{R}$.

Teorema 21.13. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um aberto. Então vale que*

$$(i) \quad \bigcap_{s \in \mathbb{R}} H_{loc}^s(\Omega) = C^\infty(\Omega).$$

$$(ii) \quad \bigcup_{s \in \mathbb{R}} H_{loc}^s(\Omega) = \mathcal{D}'_F(\Omega).$$

Demonstração. Em (i) uma inclusão é trivial e a outra segue facilmente do Teorema 21.4. $\square$

22 Aula 22 - 31/05/2019

22.1 Regularidade

Teorema 22.1. *Seja $P(D)$ um ODPLCC de ordem $m \geq 1$ elíptico. Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um aberto e $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ e suponha que $P(D)u \in H_{loc}^s(\Omega)$. Então $u \in H_{loc}^{s+m}(\Omega)$.*

Demonstração. Existe $E \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$ parametriz para $P(D)$ tal que

$$E|_{\mathbb{R}^N \setminus \{0\}} \in C^\infty(\mathbb{R}^N \setminus \{0\}),$$

dada por

$$P(D)E = \delta - \omega, \quad \omega \in C^\infty(\mathbb{R}^N).$$

Fixemos $x_0 \in \Omega$ e $\rho > 0$ tais que $B = B_\rho(x_0)$ tem fecho contido em Ω . Vamos mostrar que $u \in H_{loc}^{s+m}(B)$.

Observamos que se $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ é tal que para todo $x \in \Omega$ existe $V_x \subset \Omega$ vizinhança de x tal que $u|_{V_0} \in H_{loc}^s(V_0)$ então $u \in H_{loc}^s(\Omega)$.

Tomemos $\psi \in C_c^\infty(\Omega)$ tal que $\psi = 1$ em um aberto que contém o fecho de B . Temos:

$$P(D)[E * (\psi u)] = \delta * (\psi u) - \omega * (\psi u),$$

logo

$$\psi u = E * [P(D)(\psi u)] + \omega * (\psi u).$$

Agora,

$$P(D)(\psi u) = \psi P(D)u + g =: f + g$$

onde $g \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^N)$, $g = 0$ em B . Temos que $f \in H^s(\mathbb{R}^N)$ e

$$\psi u = E * f + E * g + \omega * (\psi u).$$

Seja $\chi \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$ tal que

$$\chi(x) = \begin{cases} 0, & |x - x_0| < \rho/4 \\ 1, & |x - x_0| > \rho/2 \end{cases}.$$

Então

$$E * g = (\chi E) * g + [(1 - \chi)E] * g.$$

Notemos que $\chi E \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$ e portanto

$$(\chi E) * g \in C^\infty(\mathbb{R}^N).$$

Além disso,

$$\begin{aligned} \operatorname{supp}((1-\chi)E * g) &\subset \operatorname{supp}((1-\chi)E) + \operatorname{supp} g \\ &\subset \left\{x \in \mathbb{R}^N : |x - x_0| \leq \rho/2\right\} + \left\{x \in \mathbb{R}^N : |x - x_0| > \rho\right\}. \end{aligned}$$

Conclusão:

$$(1-\chi)E * g = 0 \quad \text{em} \quad \{x \in \mathbb{R}^N : |x - x_0| < \rho/2\}$$

e portanto

$$(u - E * f)|_{B_{\rho/2}(x_0)} \in C^\infty(B_{\rho/2}(x_0)).$$

Recordemos que existem $C > 0, R > 0$ tais que

$$|P(\xi)| \geq C|\xi|^m \quad \forall |\xi| \geq R.$$

Tomemos $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ tal que

$$\psi(\xi) = 1, \quad |\xi| \leq R$$

e

$$\hat{E}(\xi) = \frac{1 - \psi(\xi)}{P(\xi)}.$$

Então

$$E = \mathcal{F}^{-1} \left(\frac{1 - \psi(\xi)}{P(\xi)} \right).$$

Logo,

$$\mathcal{F}(E * f)(\xi) = \hat{E}(\xi) \hat{f}(\xi) = \frac{1 - \psi(\xi)}{P(\xi)} \hat{f}(\xi).$$

Notemos que

$$\begin{aligned} \|E * f\|_{s+m}^2 &= \frac{1}{(2\pi)^N} \int_{\mathbb{R}^N} (1 + |\xi|^2)^{s+m} |\mathcal{F}(E * f)(\xi)|^2 d\xi \\ &= \frac{1}{(2\pi)^N} \int_{\mathbb{R}^N} (1 + |\xi|^2)^{s+m} \frac{|1 - \psi(\xi)|^2}{|P(\xi)|^2} |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi \\ &\leq \frac{1}{(2\pi)^N} C \int_{\mathbb{R}^N} \frac{(1 + |\xi|^2)^{s+m}}{|\xi|^{2m}} |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi \\ &\leq C \|f\|_s^2, \end{aligned}$$

o que completa a demonstração. $\square$

Teorema 22.2. *Seja $P(D)$ um ODPLCC de ordem $m \geq 1$ em $\mathbb{R}^N$ com $N \geq 2$. Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um aberto. Então $\exists u \in C_c^{m-1}(\Omega) \setminus C_c^m(\Omega)$ tal que*

$$P(D)u \in C_c(\Omega)$$

Demonstração. Suponha que $0 \in \Omega$ e seja $R > 0$ tal que

$$K = \overline{B_R(0)} \subset \Omega.$$

Seja $E = \{u \in C_c^{m-1}(K) : P(D)u \in C_c(K)\}$. Então E é um espaço de Banach com norma

$$\|u\|_E = \|u\|_{(m-1)} + \|P(D)u\|_{(0)}.$$

Note que $C_c^k(K) = \{v \in C_c^k(\mathbb{R}^N) : \text{supp } v \subset K\}$ é um espaço de Banach com a norma

$$\|v\|_{(k)} = \sum_{\alpha \leq k} \sup_K |D^\alpha v|.$$

Vamos verificar a afirmação de que E é um espaço de Banach. Seja $\{u_j\}$ uma sequência de Cauchy em E . Então $\{u_j\}$ é uma sequência de Cauchy em $C_c^{m-1}(K)$, $\{P(D)u_j\}$ é uma sequência de Cauchy em $C_c(K)$, e portanto

$$u_j \rightarrow v \quad \text{em} \quad C_c^{m-1}(K)$$

e

$$P(D)u_j \rightarrow w \quad \text{em} \quad C_c(K).$$

Note que as convergências se dão também em $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$.

Mostramos agora que $E \subset C_c^m(K)$. Suponha que $E \subset C_c^m(K)$. Pelo Teorema do Gráfico Fechado, a inclusão é contínua, e portanto existe $C > 0$ tal que

$$\|u\|_{(m)} \leq C(\|u\|_{(m-1)} + \|P(D)u\|_{(0)}) \quad \forall u \in C_c^m(K),$$

onde

$$P(D) = P_m(D) + P_{m-1}(D).$$

Existe também $C' > 0$ tal que

$$\|u\|_{(m)} \leq C'(\|u\|_{(m-1)} + \|P_m(D)u\|_{(0)}) \quad \forall u \in C_c^m(K),$$

pois

$$\|P_{m-1}(D)u\|_{(0)} \leq A\|u\|_{(m-1)} \quad \forall u \in C_c^m(K).$$

Sejam $\psi \in C_c^\infty(K)$, $\psi \equiv 1$ em $\overline{B_{R/2}(0)}$ e $U \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$ solução de $P_{m-1}(D)U = 0$. Se $j \geq 0$, definimos

$$u_j(x) = \frac{1}{2^{mj}}(\psi U)(2^j x).$$

Temos, para $|\alpha| \leq m-1$,

$$|D^\alpha u_j(x)| \leq B \frac{2^{|\alpha|j}}{2^{mj}} = \frac{B}{2^{(m-|\alpha|)j}},$$

onde $B = B(\psi, U)$ é uma constante. Seja

$$u(x) = \sum_0^M u_j(x) \in C_c^\infty(K).$$

Temos:

$$\begin{aligned} \|u\|_{(m-1)} &= \sum_{|\alpha| \leq m-1} \sum_0^M \sup_K |D^\alpha u_j| \\ &\leq \sum_{|\alpha| \leq m-1} \sum_0^M \frac{B}{2^{(m-|\alpha|)j}} \\ &\leq \sum_{|\alpha| \leq m-1} \sum_0^M \frac{B}{2^j} \\ &\leq D \sum_0^\infty 2^{-j} \\ &= 2D \end{aligned}$$

Agora,

$$\text{supp } P_m(D)u_j \subset \left\{ \frac{R}{2^{j+1}} < |x| < \frac{R}{2^j} \right\}$$

e portanto

$$\|P_m(D)u\|_0 = |P_m(D)u(x_*)| \leq C,$$

onde x_* é algum ponto em $\left\{ \frac{R}{2^{j+1}} < |x| < \frac{R}{2^j} \right\}$ para algum j , pois os suportes são disjuntos e c independente de M . Concluimos que

$$\|u\|_{(m)} \leq C \quad \text{independente de } M.$$

Em particular, as derivadas $\sum_{|\alpha| \leq m} |D^\alpha u(0)|$ são limitadas por uma constante independente de M .

Temos:

$$u = \sum_0^M u_j(x), \quad D^\alpha u(x) = \sum_0^M D^\alpha u_j(x), \quad D^\alpha u(0) = D^\alpha U(0).$$

Logo,

$$D^\alpha u(0) = (M+1)D^\alpha U(0)$$

e

$$(M+1) \sum_{|\alpha| \leq m} |D^\alpha U(0)| \leq \text{constante independente de } M,$$

e portanto para toda $U \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$ solução de $P_m(D)U = 0$ temos $D^\alpha U(0) = 0$ para todo $|\alpha| = m$.

Temos $\zeta \in \mathbb{C}^N$ tal que $P_m(\zeta) = 0$. Então, tomando

$$U(x)e^{i\langle x, \zeta \rangle}$$

temos que $P(D)U = 0$ e portanto $\zeta^\alpha = 0$ para todo $|\alpha| = m$. Logo $\zeta = 0$, o que é absurdo para $N \geq 2$. $\square$

23 Aula 23 - 05/06/2019

23.1 O conjunto frente de onda

Recorde: da definição do suporte singular, temos que $x_0 \notin \text{supp singu}$ se, e somente se, u é de classe C^∞ em uma vizinhança de x_0 .

Lema 23.1. $x_0 \notin \text{supp singu} \iff \exists \varphi \in C_c^\infty(\Omega)$, com $\varphi = 1$ em uma vizinhança de x_0 , tal que para todo M existe C_M tal que

$$|\widehat{\varphi u}(\xi)| \leq C_M(1 + |\xi|)^{-M} \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^N.$$

Demonstração. ($\implies$): existe uma vizinhança V de x_0 tal que $u|_V \in C^\infty(V)$. Se $\varphi \in C_c^\infty(V)$, $\varphi = 1$ em uma vizinhança de x_0 , então $\varphi u \in \mathcal{S}$.

($\impliedby$): Em uma vizinhança V de x_0 ,

$$u(x) = \frac{1}{(2\pi)^N} \int_{\mathbb{R}^N} e^{i\langle x, \xi \rangle} \widehat{\varphi u}(\xi) d\xi, \quad x \in V.$$

Por derivação sob o sinal da integral segue que $u|_V \in C^\infty$. □

Observação 23.2. Um cone fica determinado pela sua interseção com a esfera unitária, podendo ser escrito como

$$\Gamma = \{tx : t > 0, x \in \Omega\}$$

onde Ω é um subconjunto da esfera.

Definição 23.3. $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ é C^∞ em $(x_0, \xi_0) \in \Omega \times (\mathbb{R}^N \setminus \{0\})$ se existe $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$, com $\varphi = 1$ em uma vizinhança de x_0 , e Γ um cone aberto com $\xi_0 \in \Gamma$ tais que

$$|\widehat{\varphi u}(\xi)| \leq C_M(1 + |\xi|)^{-M}, \quad \xi \in \Gamma.$$

O conjunto frente de onda é então

$$WF(u) = \{(x, \xi) \in \Omega \times (\mathbb{R}^N \setminus \{0\}) : u \text{ não é } C^\infty \text{ em } (x, \xi)\}.$$

Note que $WF(u)$ é fechado em $\Omega \times (\mathbb{R}^N \setminus \{0\})$.

Lema 23.4. Seja $v \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^N)$ tal que

$$|\widehat{v}(\xi)| \leq C_M(1 + |\xi|)^{-M}$$

para ξ num cone aberto Γ . Então o mesmo é verdade para φv , onde $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ em qualquer cone Γ_1 com fecho contido em Γ .

Demonstração. Temos

$$\widehat{\varphi v} \xi = \frac{1}{(2\pi)^N} \int_{\mathbb{R}^N} \widehat{\varphi}(\eta) \widehat{v}(\xi - \eta) d\eta.$$

Pelo Teorema de Paley-Wiener,

$$|\widehat{v}(\xi)| \leq A(1 + |\xi|)^k,$$

para A e k fixos.

Temos então:

$$(2\pi)^N \widehat{\varphi v}(\xi) = \underbrace{\int_{|\eta| \leq c|\xi|} \widehat{\varphi}(\eta) \widehat{v}(\xi - \eta) d\eta}_{(I)} + \underbrace{\int_{|\eta| > c|\xi|} \widehat{\varphi}(\eta) \widehat{v}(\xi - \eta) d\eta}_{(II)},$$

onde $c \in (0, 1)$ será escolhido adiante.

Notemos que

$$|\eta| > c|\xi| \implies |\xi - \eta| \leq |\xi| + |\eta| \leq \left(1 + \frac{1}{c}\right) |\eta|,$$

e portanto temos que

$$\begin{aligned} |II| &\leq \int_{|\eta| > c|\xi|} |\widehat{\varphi}(\eta)| |\widehat{v}(\xi - \eta)| d\eta \\ &\leq AC_M \int_{|\eta| > c|\xi|} (1 + |\eta|)^{-M} (1 + |\xi - \eta|)^k d\eta \\ &\leq AC_M \int_{|\eta| > c|\xi|} (1 + |\eta|)^{-M} \left(1 + \left(1 + \frac{1}{c}\right) |\eta|\right)^k d\eta \\ &\leq AC_M \left(1 + \frac{1}{c}\right)^k \int_{|\eta| > c|\xi|} (1 + |\eta|)^{-M} (1 + |\eta|)^k d\eta \\ &\leq AC_M \left(1 + \frac{1}{c}\right)^k \int_{|\eta| > c|\xi|} (1 + |\eta|)^{-M'} (1 + |\eta|)^{-N-1} d\eta \\ &\leq AC_M \left(1 + \frac{1}{c}\right)^k \int_{|\eta| > c|\xi|} (1 + c|\xi|)^{-M'} (1 + |\eta|)^{-N-1} d\eta \\ &\leq AC_M \left(1 + \frac{1}{c}\right)^k (1 + c|\xi|)^{-M'} B, \end{aligned}$$

onde $M = M' + N + 1 + k$ e

$$B = \int_{\mathbb{R}^N} (1 + |\eta|)^{-N-1} d\eta.$$

Concluimos que

$$|II| \leq C_{M'}(1 + |\xi|)^{-M'}, \quad \xi \in \mathbb{R}^N.$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} |I| &\leq \sup_{|\eta - \xi| \leq c|\xi|} |\widehat{v}(\eta)| \int_{\mathbb{R}^N} |\widehat{\varphi}(\xi - \eta)| d\eta \\ &= \|\widehat{\varphi}\|_1 \sup_{|\eta - \xi| \leq c|\xi|} |\widehat{v}(\eta)|. \end{aligned}$$

Seja $\Gamma_1 \subset \Gamma$ um cone fechado. Tomemos c tal que

$$\dot{\xi} \in S^{N-1} \cap \Gamma_1, |\eta - \dot{\xi}| \leq c \implies \eta \in \Gamma.$$

Então,

$$\xi \in \Gamma, |\eta - \xi| \leq c|\xi| \implies \eta \in \Gamma.$$

Logo, se $\xi \in \Gamma_1$ e $|\eta - \xi| \leq c|\xi|$, então

$$|\eta| = |\xi + \eta - \xi| \geq (1 - c)|\xi|.$$

Logo, se $\xi \in \Gamma_1$, então

$$\begin{aligned} |\widehat{v}(\eta)| &\leq C_M(1 + |\eta|)^{-M} \\ &\leq C_M(1 + (1 - c)|\xi|)^{-M} \end{aligned}$$

e portanto

$$\sup_{|\eta - \xi| \leq c|\xi|} |\widehat{v}(\eta)| \leq C_M(1 + (1 - c)|\xi|)^{-M},$$

o que conclui a demonstração. □

Denotando por π a projeção

$$\pi : (x, \xi) \in \Omega \times (\mathbb{R}^N \setminus \{0\}) \mapsto x \in \Omega,$$

temos a seguinte

Proposição 23.5. *Para toda $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$,*

$$\pi(WF(u)) = \text{suppsing } u$$

Demonstração. Por um lado, se $x_0 \notin \text{suppsing } u$, então u é C^∞ em (x_0, ξ) para todo $\xi \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$ e portanto $x_0 \notin \pi(WF(u))$.

Por outro lado, suponhamos que $x_0 \notin \pi(WF(u))$. Então dado $\zeta \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$ temos que u é C^∞ em (x_0, ζ) e portanto existe $\psi \in C_c^\infty(\Omega)$, com $\psi = 1$ em uma vizinhança de x_0 , e $\Sigma \subset \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$ cone aberto, com $\zeta \in \Sigma$, tal que

$$|\widehat{\psi u}(\xi)| \leq \dot{C}_M(1 + |\xi|)^{-M}, \quad \xi \in \Sigma.$$

Como S^{N-1} é compacta, existem $\Gamma_1, \dots, \Gamma_k$ cones abertos tais que

$$\Gamma_1^{(1)} \cup \dots \cup \Gamma_k^{(1)} = \mathbb{R}^N \setminus \{0\},$$

onde $\Gamma_j^{(1)} \subset \Gamma_j$ é fechado, e $\varphi_1, \dots, \varphi_k \in C_c^\infty(\Omega)$, com $\varphi_j = 1$ em uma vizinhança de x_0 , tais que

$$|\widehat{\varphi_j u}(\xi)| \leq C_M(1 + |\xi|)^{-M}, \quad \xi \in \Gamma_j.$$

Seja U uma vizinhança de x_0 tal que $\varphi_j = 1$ em U , e seja $\phi \in C_c^\infty(U)$ tal que $\phi = 1$ em um aberto contendo x_0 . Então

$$\begin{aligned} |\widehat{\phi u}(\xi)| &= |\widehat{\phi \varphi_j u}(\xi)| \\ &\leq C_M(1 + |\xi|)^{-M}, \end{aligned}$$

para $\xi \in \Gamma_j^{(1)}$. □

Proposição 23.6. *Sejam $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ e $a \in C^\infty(\Omega)$. Então*

- (i) $WF(au) \subset WF(u)$;
- (ii) $WF(D^\alpha u) \subset WF(u)$ para todo $\alpha \in \mathbb{Z}_+^N$.

Demonstração. Suponha uC^∞ em (x_0, ξ_0) . Então existem $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$, $\varphi = 1$ em uma vizinhança de x_0 , e um cone aberto $\Gamma \subset \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$ tal que $\xi_0 \in \Gamma$. Ademais,

$$|\widehat{\varphi u}(\xi)| \leq C_M(1 + |\xi|)^{-M}, \quad \xi \in \Gamma.$$

Seja $\chi \in C_c^\infty(\Omega)$, $\chi = 1$ em $\text{supp } \varphi$. Logo,

$$\varphi au = (\chi a)(\varphi u)$$

e

$$|\widehat{\varphi au}(\xi)| = |\widehat{(\chi a)(\varphi u)}(\xi)| \leq C_M(1 + |\xi|)^{-M} \quad \forall \xi \in \Gamma_1,$$

onde Γ_1 é qualquer cone aberto com fecho contido em Γ com $\xi_0 \in \Gamma_1$. Logo, au é C^∞ em (x_0, ξ_0) .

Agora, assumamos $|\alpha| = 1$. Existem $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$, $\varphi = 1$ em uma vizinhança de x_0 , e um cone aberto $\Gamma \subset \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$, com $\xi_0 \in \Gamma$, tais que

$$|\widehat{\varphi u}(\xi)| \leq C_M(1 + |\xi|)^{-M}, \quad \xi \in \Gamma.$$

Tomemos $\chi \in C^\infty(V)$, com $\varphi = 1$ em V . Então

$$\chi D_j(\varphi u) = (\chi \varphi) D_j u$$

e

$$|\widehat{D_j(\varphi u)}(\xi)| = |\xi_j \widehat{\varphi u}(\xi)| \leq C_M(1 + |\xi|)^{-M}, \quad \xi \in \Gamma,$$

e portanto, para todo $\xi \in \Gamma_1$ como antes,

$$\begin{aligned} |(\widehat{\chi \varphi D_j u})(\xi)| &= |\widehat{\chi D_j(\varphi u)}(\xi)| \\ &\leq C_M(1 + |\xi|)^{-M}, \end{aligned}$$

e segue que $D_j u$ é C^∞ em (x_0, ξ_0) . □

Considere

$$P(x, D) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) D^\alpha,$$

com $a_\alpha \in C^\infty(\Omega)$ (para que o operador possa agir sobre distribuições). Recorde:

$$P_m(x, D) = \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha(x) D^\alpha,$$

$$P_m(x, \xi) = \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha(x) \xi^\alpha, \quad (x, \xi) \in \Omega \times (\mathbb{R}^N \setminus \{0\})$$

e

$$\mathcal{C}_P = \{(x, \xi) \in \Omega \times (\mathbb{R}^N \setminus \{0\}) : P_m(x, \xi) = 0\}.$$

Definição 23.7. $P(x, D)$ é **elíptico** em $(x_0, \xi_0) \in \Omega \times (\mathbb{R}^N \setminus \{0\})$ se $(x_0, \xi_0) \in \mathcal{C}_P$.

Teorema 23.8. Se $u \in \mathcal{D}'$, então $WF(u) \subset WF(Pu) \cup \mathcal{C}_P$.

Exemplo 23.9. Suponha $Pu = f \in C^\infty(\Omega)$. Então $WF(u) \subset \mathcal{C}_P$, i.e., se $(x_0, \xi_0) \notin \mathcal{C}_P$, então u é C^∞ em (x_0, ξ_0) .

24 Aula 24 - 07/06/2019

Teorema 24.1. *Sejam $P(D)$ um ODPLCC, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um aberto e $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Então*

$$WF(u) \subset WF(P(D)u) \cup \mathcal{C}_P.$$

Demonstração. Se $(x_0, \xi_0) \notin \mathcal{C}_P$ e $P(D)u$ é C^∞ em (x_0, ξ_0) , então u é C^∞ em (x_0, ξ_0)

$P_m(\xi_0) \neq 0$. Logo, $P_m(\xi_0/|\xi_0|) \neq 0$, e então, por continuidade, $\exists U \subset S^{N-1}$ vizinhança de $\xi_0/|\xi_0|$ tal que $P(\xi) \neq 0$ para todo $\xi \in U$. Em particular, podemos assumir que $\exists c > 0$ tal que $|P_m(\xi)| \geq c$ para todo $\xi \in U$. Definamos

$$\Gamma_0 = \{t\xi : t > 0, \xi \in U\}.$$

Em Γ_0 vale

$$|P_m(\xi)| \geq c|\xi|^m.$$

Procedemos como antes: se $\xi \in \Gamma_0$ e $|\xi| \geq 1$,

$$\begin{aligned} P(\xi) &= |P_m(\xi) - P_m(\xi) + P(\xi)| \\ &\geq |P_m(\xi)| - |P(\xi) - P_m(\xi)| \\ &\geq c|\xi|^m - K|\xi|^{m-1} \\ &= |\xi|^m \left(c - \frac{K}{|\xi|} \right). \end{aligned}$$

Logo, se $\xi \in \Gamma_0$, $|\xi| \geq 1$ e $|\xi| \geq 2K/c$, então

$$P(\xi) \geq \frac{c}{2}|\xi|^m.$$

Seja $\chi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$, $\chi = 1$ se $|\xi| \leq R = \max\{1, 2K/c\}$. Seja $h \in C^\infty(\mathbb{R}^N \setminus \{0\})$, $\text{supp } h \subset \Gamma_0$, positivamente homogênea de grau 0 e $h = 1$ em um cone Γ_1 contendo ξ_0 , Γ_1 com fecho contido em Γ_0 . Seja ainda h_0 em S^{N-1} sendo 1 em U , $\text{supp } h_0$ compacto contido em $\Gamma_0 \cap S^{N-1}$.

$$h(t\xi) = h(\xi), \quad t > 0,$$

$$Q(\xi) = h(\xi) \left(\frac{1 - \chi(\xi)}{P(\xi)} \right),$$

$$Q(D)f(x) = \frac{1}{(2\pi)^N} \int_{\mathbb{R}^N} e^{i\langle x, \xi \rangle} Q(\xi) \widehat{f}(\xi) d\xi,$$

$$Q(D)f = \mathcal{F}^{-1}(Q\widehat{f}).$$

Fato:

$$Q(D) : \begin{cases} \mathcal{S} \hookrightarrow \mathcal{S} \\ \mathcal{S}' \hookrightarrow \mathcal{S}' \end{cases} \quad \text{continuamente}$$

Exercício: Se $w \in \mathcal{S}'$, então

$$\text{supp sing } Q(D)w \subset \text{supp sing } w.$$

Propriedade: Se $v \in \mathcal{S}'$ é tal que

$$|\widehat{v}(\xi)| \leq C_M(1 + |\xi|)^{-M} \quad \forall \xi \in \Gamma_0,$$

então $Q(D)v \in C^\infty$.

Demonstremos o fato: Seja $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ tal que $P(D)u$ é C^∞ em (x_0, ξ_0) . Existem $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$, $\varphi = 1$ em uma vizinhança V_0 de x_0 , e um cone aberto contendo ξ_0 (que podemos assumir $= \Gamma_0$) tal que

$$|\widehat{\varphi P(D)u}(\xi)| \leq C_M(1 + |\xi|)^{-M} \quad \forall \xi \in \Gamma_0.$$

Então

$$\begin{aligned} [Q(D)P(D)(\varphi u)] &= \mathcal{F}^{-1}[Q(D)P(D)\widehat{\varphi u}(\xi)] \\ &= \mathcal{F}^{-1}[h(x)(1 + \chi(\xi))\widehat{\varphi u}(\xi)]. \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} [Q(D)P(D)(\varphi u)] &= Q(D)[\varphi P(D)u + w], \quad w = 0 \text{ em } V_0 \\ &= \underbrace{Q(D)[\varphi P(D)u]}_{\in C^\infty(\mathbb{R}^N)} + \underbrace{Q(D)w}_{\in C^\infty(V_0)}. \end{aligned}$$

Concluimos que

$$\mathcal{F}^{-1}[h(1 - \chi)\widehat{\varphi u}] \in C^\infty(V_0).$$

Mas

$$\mathcal{F}^{-1}[h(1 - \chi)\widehat{\varphi u}] = \mathcal{F}^{-1}[(h\chi)\widehat{\varphi u}] + \mathcal{F}^{-1}[h\widehat{\varphi u}].$$

Agora,

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^{-1}[(h\chi)\widehat{\varphi u}] &= \mathcal{F}^{-1}[\mathcal{F}\mathcal{F}^{-1}(h\chi)\mathcal{F}[\varphi u]] \\ &= \omega * \varphi u \in C^\infty(\mathbb{R}^N), \end{aligned}$$

onde

$$\omega = \mathcal{F}^{-1}(h\chi) \in C^\infty.$$

Conclusão:

$$\mathcal{F}^{-1}[h(\widehat{\varphi}u)] \in C^\infty(V_0).$$

Agora,

$$\begin{aligned}\mathcal{F}^{-1}[h(\widehat{\varphi}u)] &= \varphi u + \mathcal{F}^{-1}[(1-h)\widehat{\varphi}u] \\ &= u + \mathcal{F}^{-1}[(1-h)\widehat{\varphi}u]\end{aligned}$$

e portanto $u \in C^\infty(V_0)$.

Afirmção: se $v \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^N)$, então $g := \mathcal{F}^{-1}[(h-1)\widehat{v}]$ é C^∞ em (x_0, ξ_0) . De fato, seja $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$, $\psi = 1$ em uma vizinhança de x_0 (lembrar que $h = 1$ em Γ_1 , $\xi_0 \in \Gamma_1$).

$$\widehat{\psi}g(\xi) = \int_{\eta \notin \Gamma_1} \widehat{\psi}(\xi - \eta)(h(\eta) - 1)\widehat{v}(\eta) d\eta.$$

Tomemos Γ_* um cone com fecho contido em Γ_1 , com $\xi_0 \in \Gamma_*$. Existe $\delta > 0$ tal que

$$\xi \in \Gamma_*, \eta \in \Gamma_1 \implies |\xi - \eta| \geq \delta|\xi|.$$

Seja $U = S^{N-1} \cap \Gamma_*$. Então $\exists \delta > 0$ tal que

$$\dot{\xi} \in U, \eta \neq \Gamma_1 \implies |\dot{\xi} - \eta| \geq \delta.$$

Logo, se $\xi \in \Gamma_*$,

$$\left| \frac{\xi}{|\xi|} - \frac{\eta}{|\eta|} \right| \geq \delta$$

e portanto

$$|\xi - \eta| \geq \delta|\xi|.$$

Resta provar que $\widehat{\varphi}g$ é rapidamente decrescente em Γ_* . Dado M ,

$$|\widehat{\varphi}g(\xi)| \leq C_M \int_{\eta \notin \Gamma_1} (1 + |\xi|)^{-M-k-N-1} (1 + |\eta|^k) d\eta,$$

onde k é tal que $|\widehat{v}(\eta)| \leq A(1 + |\eta|)^k$. Logo,

$$\begin{aligned}|\widehat{\varphi}g(\xi)| &\leq \int_{\eta \notin \Gamma_1} (1 + |\xi - \eta|)^{-M} (1 + |\xi - \eta|)^{-N-1-k} (1 + |\eta|^k) d\eta \\ &\leq \frac{C_M}{(1 + \delta|\xi|)^M} \int_{\mathbb{R}^N} (1 + |\xi - \eta|)^{-N-1-k} (1 + |\xi - \eta|^k) (1 + |\xi|^k) d\eta \\ &\leq \frac{C_M}{(1 + \delta|\xi|)^M} (1 + |\xi|)^k \underbrace{\int_{\mathbb{R}^N} (1 + |\xi - \eta|)^{-N-1} d\eta}_C\end{aligned}$$

o que completa a demonstração. □

Referências

- BACHMAN, G.; NARICI, L. *Functional Analysis*. New York: Dover Publications, 2000.
- BREZIS, H. *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*. New York: Springer, 2010.
- CAVALCANTI, M.; CAVALCANTI, V. *Introdução à Teoria das Distribuições e aos Espaços de Sobolev*. [S.l.]: Eduem, 2009.
- CONWAY, J. B. *Functions of One Complex Variable*. [S.l.]: Springer, 1980.
- DIEUDONNÉ, J. *History of Functional Analysis*. [S.l.]: North-Holland, 1981.
- FOLLAND, G. B. *Real Analysis - Modern Techniques and Their Applications*. 2nd. ed. [S.l.]: John Wiley & Sons, 1999.
- FOLLAND, G. B. *Introduction to Partial Differential Equations*. 2nd. ed. [S.l.]: Overseas Press, 2011.
- HÖRMANDER, L. *The Analysis of Linear Partial Differential Operators I*. 2nd. ed. [S.l.]: Springer, 1990.
- HÖRMANDER, L. *The Analysis of Linear Partial Differential Operators II*. [S.l.]: Springer, 2005.
- KESAVAN, S. *Topics in Functional Analysis and Applications*. [S.l.]: John Wiley & Sons, 1989.
- LIEB, E. H.; LOSS, M. *Analysis*. 2nd. ed. [S.l.]: American Mathematical Society, 2001. (Graduate Studies in Mathematics).
- RUDIN, W. *Functional Analysis*. [S.l.]: McGraw-Hill Book Company, 1991.
- SCHWARTZ, L. *Theorie des Distributions*. [S.l.]: Hermann, 1966.
- STEIN, E. M. *Singular Integrals and Differentiability Properties of Functions*. [S.l.]: Princeton University Press, 1970. (Princeton Mathematical Series).
- TRÉVES, F. *Topological Vector Spaces, Distributions and Kernels*. [S.l.]: Academic Press, 1967.

Índice Remissivo

- conjunto frente de onda, 129
- convolução
 - de distribuição com função suave, 58
 - de distribuições, 65
 - de funções, 10
- Desigualdade
 - de Young, 12
- distribuição, 20
 - de ordem m , 20
 - derivada, 39
 - multiplicação por funções C^∞ , 43
 - restrição a um aberto, 30
 - temperada, 94
- espaço
 - $L^p_{loc}(\Omega)$, 8
 - de Schwartz, 88
 - de Sobolev H^s , 112
 - de Sobolev H^s_{loc} , 122
- fórmula
 - de Leibniz, 21
 - de Stokes, 52
 - de Taylor, 5
- fórmula de Cauchy
 - não-homogênea, 53
- função de corte, 16
- função inteira, 99
- funções de teste, 6
- Heaviside
 - função de, 39
- mollifiers*, 14
- multi-índice, 5
- operador
 - das ondas, 73
 - de Cauchy-Riemann, 52
 - de Laplace, 71
 - de Schrödinger, 74
 - do calor, 72
 - elíptico, 75, 133
 - hipoelíptico, 70
 - parametriz, 107
 - partição da unidade, 18
 - potencial newtoniano, 72
 - produto tensorial, 79
 - pullback*, 81
 - símbolo, 75
 - símbolo principal, 75
 - solução fundamental, 50
 - suporte
 - de distribuição, 31
 - de função, 5
 - suporte singular, 69
- Teorema
 - de Lebesgue, 9
 - de Minkowski, 12
 - de Paley-Wiener-Schwartz, 104
- transformada de Fourier
 - de distribuições temperadas, 96
 - de funções L^1 , 86
 - inversa, 91
- Valor Principal
 - de $\frac{1}{x}$, 41