

Tópicos de Análise Funcional

Curso ministrado pelo Prof. Dr. Paulo D. Cordaro

Notas de aula de Pedro H. Pontes

29 de setembro de 2025

Introdução

Estas são simples notas de aula da disciplina de pós-graduação do IME-USP “Tópicos em Análise Funcional (MAP5834)”, tomadas por mim no primeiro semestre de 2011, quando esse curso foi ministrado pelo prof. Dr. Paulo D. Cordaro, e que tive a oportunidade de digitalizar, com o apoio do professor Cordaro. A ementa do curso foi elaborada pelo próprio professor Cordaro, mas no final foi estudado nessa disciplina muito mais do que o que fora programado originalmente.

Acho só importante destacar que estas são notas de aula, não um livro completo de Análise Funcional. Apesar dos meus esforços para copiar da melhor forma possível as excepcionais aulas do professor, pode ser que nem tudo tenha ficado escrito da melhor forma possível, e podem persistir alguns erros. No entanto, há a intenção de expandir e melhorar estas notas de aula. Assim sendo, eu agradeceria profundamente o envio de quaisquer correções de erros ou sugestões para o meu e-mail: pedrohp@ime.usp.br.

Pedro Henrique Pontes

Sumário

1	Revisão	4
1.1	Espaços Vetoriais	4
1.2	Somas infinitas	7
1.3	Os 5 teoremas fundamentais dos espaços normados	9
2	Espaços com produto interno	11
2.1	Adjuntos	15
2.2	Bases hilbertianas	16
3	Operadores Compactos	23
3.1	Preliminares para o Teorema Espectral	27
3.2	O Teorema Espectral para operadores compactos hermitianos	29
3.3	Consequências do Teorema Espectral	33
3.4	Aplicação	37
3.5	A Alternativa de Fredholm	40
3.6	Teoria de Riesz-Schauder	40
4	Produto tensorial de espaços de Hilbert	43
5	Funções holomorfas a valores em espaços de Banach	51
6	Álgebras de Banach	55
6.1	Álgebras de Banach comutativas	63
6.2	Aplicações	67
7	Topologia fraca	69
7.1	Nets	69
7.2	Topologia inicial	70
7.3	Topologia fraca no dual de um espaço de Banach	71
8	Álgebras de Banach comutativas	73
8.1	A transformada de Gelfand	74
8.2	Aplicações	76
8.3	Álgebras com involução	80
8.4	Aplicação	83
9	Teorema da Aplicação Espectral	84
9.1	De volta às álgebras com involução	87

10 Teorema Espectral para operadores normais	91
10.1 Resoluções da identidade	93
10.2 Medidas complexas	95
10.3 Preliminares para o Teorema espectral	97
10.4 O Teorema Espectral para operadores normais	102
11 Aplicações	107
11.1 O cálculo simbólico	107
11.2 O problema do subespaço invariante	108
11.3 Operadores normais	109
11.4 De volta aos operadores compactos	111
11.5 Operadores positivos e a representação polar	112
A Exercícios	116
A.1 Lista 1	117
A.2 Lista 2	119
A.3 Lista 3	122

1 Revisão

1.1 Espaços Vetoriais

- Normas $\rightarrow$ distância $\rightarrow$ topologia
- Sequências convergentes, sequências de Cauchy.
- Espaços normados completos: $(E, \|\cdot\|)$ em que toda sequência de Cauchy é convergente: espaços de Banach.

Exemplos. $\mathbb{C}^N$; $C(K)$, em que K é um espaço topológico compacto:

$$C(K) \doteq \{f : K \rightarrow \mathbb{C} : f \text{ é contínua}\}$$

com a norma $\|f\|_\infty \doteq \sup\{|f(x)| : x \in K\}$.

Para $1 \leq p < \infty$,

$$l_p(\mathbb{N}) \doteq \left\{ (z_n)_{n \in \mathbb{N}} : z_n \in \mathbb{C} \text{ e } \sum_{n=1}^{+\infty} |z_n|^p < \infty \right\}.$$

com a norma

$$\|(z_n)_{n \in \mathbb{N}}\| \doteq \left(\sum_{n=1}^{+\infty} |z_n|^p \right)^{1/p}.$$

Também

$$l_\infty(\mathbb{N}) \doteq \left\{ (z_n)_{n \in \mathbb{N}} : z_n \in \mathbb{C} \text{ e } \sup_{n \in \mathbb{N}} |z_n| < \infty \right\}$$

com a norma

$$\|(z_n)_{n \in \mathbb{N}}\| \doteq \sup_{n \in \mathbb{N}} |z_n|.$$

Temos

$$c_0(\mathbb{N}) \doteq \left\{ (z_n)_n, z_n \in \mathbb{C} : \lim_{n \rightarrow +\infty} |z_n| = 0 \right\}.$$

Logo $c_0(\mathbb{N}) \subseteq l_\infty(\mathbb{N})$, com a mesma norma.

$L^p(X, \mathcal{B}, \mu)$, $1 \leq p \leq \infty$.

Dados $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $m \geq 0$, $C^m([a, b])$ é o conjunto das funções $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ tais que todas as derivadas de ordem menor ou igual a m existem e são contínuas em $[a, b]$. Isto é, $f|_{[a, b]}$ é diferenciável m vezes, e essas derivadas podem ser estendidas continuamente a $[a, b]$. Com a norma

$$\|f\| \doteq \sum_{j=0}^m \sup_{x \in [a, b]} |f^{(j)}(x)|,$$

o espaço $C^m([a, b])$ é um espaço de Banach.

Exemplo de espaço que não é Banach, mas é importante: $C_{L^2}([a, b]) = (C([a, b]), \|\cdot\|_2)$, em que

$$\|f\|_2 \doteq \left(\int_a^b |f(x)|^2 dx \right)^{1/2}.$$

Sejam E, F espaços normados, $f : E \rightarrow F$ linear. São equivalentes:

1. f é contínua em E ;
2. f é contínua em 0;
3. vale

$$\sup_{\|x\| \leq 1} \|f(x)\| < \infty; \text{ e}$$

4. existe $C > 0$ tal que

$$\|f(x)\| \leq C\|x\| \text{ para todo } x \in E.$$

Denotamos

$$L(E, F) \doteq \{f : E \rightarrow F : f \text{ é linear e contínua}\}.$$

Se $f \in L(E, F)$, temos uma norma

$$\|f\| \doteq \sup\{\|f(x)\| : \|x\| \leq 1\}.$$

Também vale

$$\|f\| = \inf\{C : \|f(x)\| \leq C\|x\| \text{ para todo } x \in E\}.$$

Assim $L(E, F)$ se torna um espaço normado.

Com essa norma, $L(E, F)$ é de Banach desde que F seja de Banach. Em particular, se E é normado, $L(E, \mathbb{C})$ é um espaço de Banach.

Notação. $E' \doteq L(E, \mathbb{C})$.

E espaço vetorial, $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$ normas sobre E . Dizemos que essas normas são *equivalentes* se existem $c > 0, C > 0$ tais que

$$c\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq C\|x\|_1 \text{ para todo } x \in E.$$

Teorema 1.1. *Se E tem dimensão finita, duas normas quaisquer sobre E são equivalentes.*

Definição. E espaço normado, F subespaço fechado. Se $x \in E$, dizemos que x é “ortogonal” a F se

$$d(x, F) = \|x\|.$$

Teorema 1.2 (Riesz, existência de vetores quase ortogonais). *Dados E espaço normado, $F \subsetneq E$ subespaço fechado, e $\varepsilon > 0$, existe $x_\varepsilon \in E$ com $\|x_\varepsilon\| = 1$ com $d(x_\varepsilon, F) > 1 - \varepsilon$.*

Demonstração. Existe $x \in E$, $x \notin F$.

$$d(x, F) \doteq \inf_{y \in F} \|x - y\|;$$

temos $d(x, F) > 0$ pois $x \notin F$ e F é fechado. Seja $\varepsilon > 0$. Existe $y_0 \in F$ tal que

$$\|x - y_0\| < d(x, F)(1 + \varepsilon).$$

Defina

$$x_\varepsilon \doteq \frac{x - y_0}{\|x - y_0\|}.$$

Temos $\|x - y_0\| > 0$ pois $x \notin F$ e $y_0 \in F$. $\|x_\varepsilon\| = 1$. Seja $y \in F$.

$$\begin{aligned} \|x_\varepsilon - y\| &= \left\| \frac{x - y_0}{\|x - y_0\|} - y \right\| = \frac{1}{\|x - y_0\|} \|x - y_0 - \|x - y_0\|y\| \\ &\geq \frac{1}{\|x - y_0\|} d(x, F) > \frac{1}{d(x, F)(1 + \varepsilon)} d(x, F) \\ &> \frac{1}{1 + \varepsilon} > 1 - \varepsilon. \end{aligned}$$

Logo $d(x_\varepsilon, F) \geq 1 - \varepsilon$. □

Corolário 1.3. *Se E é um espaço normado de dimensão infinita, então $S \doteq \{x \in E : \|x\| \leq 1\}$ não é compacto.*

Demonstração. Vamos construir uma sequência $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ em E , por indução, satisfazendo as seguintes propriedades:

1. $\|x_n\| = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$; e
2. se $n \neq m$, então $\|x_n - x_m\| \geq 1/2$.

Isso implica a tese, pois $\{x_n\}_n$ não poderá ter subsequência convergente.

Tomo $x_1 \in E$ com $\|x_1\| = 1$. Suponha já contruídos $x_1, \dots, x_n$ com $\|x_i\| = 1$ para todo $i \leq n$, e $\|x_j - x_k\| \geq 1/2$ se $j, k \leq n$, $j \neq k$. Tome

$$F_n \doteq [x_1, \dots, x_n]$$

Como então F_n tem dimensão finita, F_n é completo, logo F_n é fechado em E . Como E tem dimensão infinita, temos $F_n \subsetneq E$. Logo, pelo Teorema 1.2, existe $x_{n+1} \in E$ tal que $\|x_{n+1}\| = 1$ e $d(x_n, F_n) \geq 1/2$, o que basta, pois se $j < n + 1$, temos $x_j \in F_n$. $\square$

1.2 Somas infinitas

Definição. Se E é um espaço normado, e $(x_i)_{i \in I}$ é uma família de elementos de E , dizemos que $(x_i)_{i \in I}$ é *somável* com soma $x \in E$ se: dado $\varepsilon > 0$, existe $F_\varepsilon \subseteq I$ finito tal que, para todo $F \subseteq I$ finito com $F_\varepsilon \subseteq F$, tem-se

$$\left\| \sum_{i \in F} x_i - x \right\| < \varepsilon.$$

Notação.

$$\sum_{i \in I} x_i = x.$$

Observações. 1) Se $\sum_{i \in I} x_i = x$, $\sum_{i \in I} y_i = y$ e $\lambda \in \mathbb{C}$, então $\sum_{i \in I} (x_i + \lambda y_i) = x + \lambda y$.

2) Se $(x_i)_{i \in I}$ é uma família em E , $\sum_{i \in I} x_i = x$ e $f \in L(E, F)$, então $\sum_{i \in I} f(x_i) = f(x)$.

Definição. A família $(x_i)_{i \in I}$ de elementos de E satisfaz o Critério de Cauchy (para somabilidade) se: dado $\varepsilon > 0$, existe $G_\varepsilon \subseteq I$ finito tal que, se $G \subseteq I$ é finito e disjunto de G_ε , então

$$\left\| \sum_{i \in G} x_i \right\| < \varepsilon.$$

Proposição 1.4. Se $(x_i)_{i \in I}$ é somável, então $(x_i)_{i \in I}$ satisfaz o Critério de Cauchy.

Demonstração. Temos $\sum_{i \in I} x_i = x$. Seja $\varepsilon > 0$. Existe $F_\varepsilon \subseteq I$ finito tal que se $F \subseteq I$ é finito, $F_\varepsilon \subseteq F$, então

$$\left\| \sum_{i \in I} x_i - x \right\| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Seja $G \subseteq I$ finito disjunto de F_ε . Então

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{i \in G} x_i \right\| &= \left\| \sum_{i \in G \cup F_\varepsilon} x_i - \sum_{i \in F_\varepsilon} x_i \right\| \\ &= \left\| \left(\sum_{i \in G \cup F_\varepsilon} x_i - x \right) - \left(\sum_{i \in F_\varepsilon} x_i - x \right) \right\| \\ &\leq \left\| \sum_{i \in G \cup F_\varepsilon} x_i - x \right\| + \left\| \sum_{i \in F_\varepsilon} x_i - x \right\| < \varepsilon. \end{aligned} \quad \square$$

Observação. Se $(x_i)_{i \in I}$ satisfaz o Critério de Cauchy, então $\{i \in I : x_i \neq 0\}$ é no máximo enumerável. De fato, se

$$I_n = \{i \in I : \|x_i\| \geq 1/n\},$$

então $\{i \in I : x_i \neq 0\} = \bigcup_{n \geq 1} I_n$. Logo basta mostrar que cada I_n é finito. Dado $n \in \mathbb{N}$, existe $G_n \subseteq I$ finito tal que se $i \notin G_n$, então $\|x_i\| < 1/n$. Logo $I_n \subseteq G_n$ é finito.

Teorema 1.5. *E espaço de Banach, $(x_i)_{i \in I}$ família em E . Se $(x_i)_{i \in I}$ satisfaz o Critério de Cauchy (para somabilidade), então $(x_i)_{i \in I}$ é somável.*

Demonstração. Defina $I_n \doteq \{i \in I : \|x_i\| \geq 1/n\}$, $n \in \mathbb{N}$. Vimos que cada I_n é finito. Seja $I^* \doteq \{i \in I : x_i \neq 0\}$; $I^* = \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$. Para cada n , defina $y_n \doteq \sum_{i \in I_n} x_i$.

$\{y_n\}_n$ é uma sequência de Cauchy em E : seja $\varepsilon > 0$. Existe $F_\varepsilon \subseteq I^*$ finito tal que, se $F \subseteq I^*$ finito e $F \cap F_\varepsilon = \emptyset$, então $\|\sum_{i \in F} x_i\| < \varepsilon$. Como F_ε é finito, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $F_\varepsilon \subseteq I_{n_0}$. Logo, se $m > n \geq n_0$, temos $F_\varepsilon \subseteq I_{n_0} \subseteq I_n \subseteq I_m$, portanto $(I_m \setminus I_n) \cap F_\varepsilon = \emptyset$, donde $\|\sum_{i \in I_m \setminus I_n} x_i\| < \varepsilon$, mas

$$\|y_m - y_n\| = \left\| \sum_{i \in I_m \setminus I_n} x_i \right\| < \varepsilon.$$

Portanto $(y_n)_n$ é de Cauchy.

Como E é completo, existe $x \in E$ tal que $y_n \rightarrow x$.

$\sum_{i \in I} x_i = x$: seja $\varepsilon > 0$. Existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que se $m \geq n_0$ então $\|y_m - x\| < \varepsilon/2$.

Existe $G_\varepsilon \subseteq I^*$ finito tal que se $G \subseteq I^*$ finito e $G \cap G_\varepsilon = \emptyset$, então $\|\sum_{i \in G} x_i\| < \varepsilon/2$.

Existe $m_0 \in \mathbb{N}$ tal que $G_\varepsilon \subseteq I_{m_0}$, e $m_0 \geq n_0$. Seja $F \subseteq I^*$ finito, $I_{m_0} \subseteq F$. Então

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{i \in F} x_i - x \right\| &= \left\| \sum_{i \in I_{m_0}} x_i - x + \sum_{i \in F \setminus I_{m_0}} x_i \right\| \\ &\leq \|y_{m_0} - x\| + \left\| \sum_{i \in F \setminus I_{m_0}} x_i \right\| < \varepsilon, \end{aligned}$$

pois como $G_\varepsilon \subseteq I_{m_0}$, temos $(F \setminus I_{m_0}) \cap G_\varepsilon = \emptyset$. $\square$

Definição. E normado, $(x_i)_{i \in I}$ família em E . Dizemos que $(x_i)_{i \in I}$ é *absolutamente somável* se a família $(\|x_i\|)_{i \in I}$ for somável em $\mathbb{R}$.

Corolário 1.6. Se E é um espaço de Banach e $(x_i)_{i \in I}$ é uma família em E , $(x_i)_{i \in I}$ absolutamente somável implica ser $(x_i)_{i \in I}$ somável.

Demonstração. Basta mostrar que $(x_i)_{i \in I}$ satisfaz o Critério de Cauchy. Seja $\varepsilon > 0$. Então existe $F_\varepsilon \subseteq I$ finito tal que, se $F \subseteq I$ é finito e $F \cap F_\varepsilon = \emptyset$, então $\sum_{i \in F} \|x_i\| < \varepsilon$. Logo

$$\left\| \sum_{i \in F} x_i \right\| \leq \sum_{i \in F} \|x_i\| < \varepsilon. \quad \square$$

1.3 Os 5 teoremas fundamentais dos espaços normados

Teorema 1.7 (Hahn-Banach). E espaço normado, $F \subseteq E$ subespaço, $f \in F'$ (isto é, $f : F \rightarrow \mathbb{C}$ é linear e contínua). Existe $\tilde{f} : E \rightarrow \mathbb{C}$ linear contínua tal que $\tilde{f}|_F = f$ e $\|\tilde{f}\| = \|f\|$.

Teorema 1.8 (Princípio da Limitação Uniforme). Seja E um espaço de Banach, F um espaço normado e $\mathcal{B} \subseteq L(E, F)$. Se, para cada $x \in E$, o conjunto $\{f(x) : f \in \mathcal{B}\}$ é limitado em F , então $\mathcal{B}$ é limitado em $L(E, F)$.

Teorema 1.9 (Banach-Steinhaus). Sejam E espaço de Banach e F espaço normado. Seja $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ sequência em $L(E, F)$. Se para cada $x \in E$ existe $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x)$, definindo

$$f(x) \doteq \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) \text{ para cada } x \in E,$$

então $f \in L(E, F)$ e $\|f\| \leq \liminf_{n \in \mathbb{N}} \|f_n\|$.

Teorema 1.10 (da Aplicação Aberta). *Sejam E, F espaços de Banach e $f \in L(E, F)$. Então ou $f(E)$ é um conjunto magro em F , ou $f(E) = F$. Além disso, se $f(E) = F$ então f é uma aplicação aberta.*

Observação. Se G é um espaço métrico, então $A \subseteq G$ é magro se $A \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ sendo que, para cada n , $A_n \subseteq G$ é fechado com interior vazio. (Em particular, $G \setminus A = \bigcap_n O_n$ com O_n abertos densos. Assim se G for completo, segue que $G \setminus A$ é denso.)

Corolário 1.11. *E, F de Banach. Se $f \in L(E, F)$ é bijetora, então $f^{-1} \in L(F, E)$.*

Observação. Seja E espaço vetorial sobre $\mathbb{C}$, $\|\cdot\|_1$ e $\|\cdot\|_2$ normas sobre E tais que $(E, \|\cdot\|_1)$ e $(E, \|\cdot\|_2)$ sejam espaços de Banach. Suponha também que exista $c > 0$ tal que $\|x\|_1 \leq c\|x\|_2$. Então $\|\cdot\|_1$ e $\|\cdot\|_2$ são equivalentes. (Pois então $Id : (E, \|\cdot\|_2) \rightarrow (E, \|\cdot\|_1)$ é contínua, logo sua inversa é contínua, pelo Corolário 1.11.)

Exemplo. Seja $C([0, 1])$ com

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in [0, 1]} |f(x)|, \text{ e } \|f\|_2 \doteq \left(\int_0^1 |f(x)|^2 dx \right)^{1/2}, \quad f \in E.$$

Note que

$$\|f\|_2 \leq \|f\|_\infty \text{ para todo } f \in E$$

mas as normas não são equivalentes (pois $(C([0, 1]), \|\cdot\|_\infty)$ é completo, mas o completamento de $(C([0, 1]), \|\cdot\|_2)$ é $L^2([0, 1])$).

Definição. A, B conjuntos não-vazios, $\lambda : A \rightarrow B$. O gráfico de λ é o conjunto

$$G_\lambda \doteq \{(a, \lambda(a)) \in A \times B : a \in A\}.$$

Se A, B forem espaços métricos e λ é contínua, então G_λ é fechado em $A \times B$ (pois ele é sequencialmente fechado).

E, F espaços normados. Então $E \times F$ é normado, com norma

$$\|(x, y)\| \doteq \|x\| + \|y\|, \quad x \in E, y \in F.$$

Teorema 1.12 (do Gráfico Fechado). *E, F espaços de Banach, $f : E \rightarrow F$ transformação linear. Se G_f for fechado em $E \times F$, então $f \in L(E, F)$.*

Observação. G_f é fechado $\iff$ para todo $x_n \in E$, se $(x_n, f(x_n)) \rightarrow (x, y)$, então $y = f(x)$ $\iff$ para todo $x_n \in E$, se $x_n \rightarrow x$ e $f(x_n) \rightarrow y$ então $y = f(x)$ $\iff$ para todo $x_n \in E$, se $x_n \rightarrow 0$ e $f(x_n) \rightarrow y$, então $y = 0$.

Demonstração do Teorema 1.12. Vamos considerar, em E , as normas $\|\cdot\|$ e $\|x\| \doteq \|x\| + \|f(x)\|$, $x \in E$. Temos dois espaços: $(E, \|\cdot\|)$ Banach e $(E, \|x\|)$ normado. Note que

$$\|x\| \leq \|x\|, \text{ para todo } x \in E.$$

Se mostrarmos que existe $c > 0$ tal que

$$\|x\| \leq c\|x\| \text{ para todo } x \in E,$$

teríamos em particular $\|f(x)\| \leq c\|x\|$ e assim f seria contínua. Pela Observação anterior, basta mostrar que $(E, \|x\|)$ é completo.

Seja $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sequência de Cauchy em $(E, \|x\|)$. Pela fórmula de $\|x\|$, isso implica que $(x_n)_n$ é sequência de Cauchy em $(E, \|\cdot\|)$, e $(f(x_n))_n$ é sequência de Cauchy em $(F, \|\cdot\|)$ (pois $\|x\| \leq \|x\|$ e $\|f(x)\| \leq \|x\|$). Como esses espaços são completos, existem $x \in E$, $y \in F$ tais que $x_n \rightarrow x$ e $f(x_n) \rightarrow y$. Como G_f é fechado, temos $y = f(x)$. Logo

$$\begin{aligned} \|x_n - x\| &= \|x_n - x\| + \|f(x_n - x)\| \\ &= \|x_n - x\| + \|f(x_n) - f(x)\| \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Logo $(x_n)_n$ é convergente em $(E, \|x\|)$. □

Exemplo. $T : L^2([0, 1]) \rightarrow L^2([0, 1])$ contínua. Suponha que $T(L^2[0, 1]) \subseteq C([0, 1])$ ($C([0, 1])$ com a norma do sup). Logo temos

$$\begin{aligned} T_0 : L^2[0, 1] &\rightarrow C([0, 1]) \\ u &\mapsto Tu. \end{aligned}$$

T_0 é contínua? De fato, pelo Teorema do Gráfico Fechado, basta mostrar que se $u_n \rightarrow u$ em $L^2[0, 1]$ e $T_0 u_n \rightarrow v$ em $C([0, 1])$, então $v = T_0 u$. Mas $Tu_n \rightarrow v$ em $C([0, 1])$ implica $Tu_n \rightarrow v$ em $L^2[0, 1]$. Como $T : L^2([0, 1]) \rightarrow L^2([0, 1])$ é contínua, segue que $Tu = v$, logo T_0 é contínua.

2 Espaços com produto interno

H espaço pré-hilbertiano. $\langle, \rangle : H \times H \rightarrow \mathbb{C}$, $\|x\| \doteq \langle x, x \rangle^{1/2}$ norma. $|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|$ (Cauchy-Schwarz). Valem:

- Lei do paralelogramo:

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2), \text{ para todos } x, y \in H.$$

- Fórmula de polarização:

$$\langle x, y \rangle = \frac{1}{4} (\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2 + i\|x + iy\|^2 - i\|x - iy\|^2).$$

Teorema 2.1. *H espaço pré-hilbertiano, $A \subseteq H$ conjunto convexo e completo. Então existe um único $a^* \in A$ tal que*

$$\|a^*\| \leq \|a\| \text{ para todo } a \in A.$$

Demonstração. Seja $\delta \doteq d(0, A)$, e suponha $\delta > 0$ (A é fechado). Então existe $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ sequência em A tal que $\|a_n\| \rightarrow \delta$. Provemos que $\{a_n\}_n$ é de Cauchy:

$$\|a_m - a_n\|^2 = 2\|a_m\|^2 + 2\|a_n\|^2 - \|a_m + a_n\|^2, \quad (1)$$

pela Lei do Paralelogramo. Temos $(a_m + a_n)/2 \in A$ pois A é convexo. Logo $\|(a_m + a_n)/2\| \geq \delta$, e assim $\|a_m + a_n\|^2 \geq 4\delta^2$. De (1) temos

$$\|a_m - a_n\|^2 \leq 2\|a_m\|^2 + 2\|a_n\|^2 - 4\delta^2 \rightarrow 0$$

pois $a_n \rightarrow \delta$. Como A é completo, existe $a^* \in A$ tal que $a_n \rightarrow a^*$, e assim $\|a^*\| = \lim \|a_n\| = \delta$.

Unicidade: se $a_1, a_2 \in A$ são tais que $\|a_1\| = \|a_2\| = \delta$ temos, pela Lei do Paralelogramo,

$$\|a_1 - a_2\|^2 = 2\|a_1\|^2 + 2\|a_2\|^2 - \|a_1 + a_2\|^2 \leq 2\delta^2 + 2\delta^2 - 4\delta^2 = 0,$$

isto é, $a_1 = a_2$. □

Notação. $x \perp y$ se, e somente se $\langle x, y \rangle = 0$. Se $A \subseteq H$, temos

$$A^\perp \doteq \{x \in H : x \perp y, \forall y \in A\}.$$

Note que $A^\perp$ é sempre fechado.

Exercício. Vale $\overline{[A]} \subseteq (A^\perp)^\perp$.

Também vale que $x \perp y$ implica $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$ (Pitágoras).

Lema 2.2. *Seja H pré-hilbertiano, $F \subseteq H$ subespaço, $z \in H$. São equivalentes:*

- $\|z\| = d(z, F)$; ($\iff \|z\| \leq \|z - y\|$ para todo $y \in F$)
- $z \in F^\perp$.

Demonstração. a) $\Rightarrow$ b): Suponha que $z \notin F^\perp$. Então existe $x \in F$ tal que $\langle z, x \rangle \neq 0$, e posso assumir $\|x\| = 1$.

$$\begin{aligned}\|z\|^2 &= \|z - \langle x, z \rangle x + \langle x, z \rangle x\|^2 = \|z - \langle x, z \rangle x\|^2 + \|\langle x, z \rangle x\|^2 \\ &= \|z - \langle x, z \rangle x\|^2 + |\langle x, z \rangle|^2 < \|z\|^2\end{aligned}$$

absurdo.

b) $\Rightarrow$ a): Se $z \in F^\perp$, então dado $y \in F$,

$$\|z - y\|^2 = \|z\|^2 + \|y\|^2 \geq \|z\|^2. \quad \square$$

Teorema 2.3. *H pré-hilbertiano, $F \subseteq H$ subespaço completo. Dado $x \in H$, existe um único $x_F \in F$ tal que $x - x_F \perp F$ (ou seja, pelo Lema 2.2, $\iff \|x - x_F\| = d(x - x_F, F) = d(x, F)$).*

Demonstração. Dado $x \in H$, tomo

$$A \doteq x - F = \{x - y : y \in F\}.$$

Pelo Teorema 2.1, existe $x_F \in F$ tal que

$$\|x - x_F\| \leq \|x - y\| \text{ para todo } y \in F,$$

e x_F é único. Logo $\|x - x_F\| = d(x, F)$. $\square$

Digressão. Esse teorema fornece uma aplicação $p_F : H \rightarrow H$ dada por

$$p_F(x) = x_F.$$

A função p_F está bem definida (pois o x_F é único), $p_F(x) = x$ para todo $x \in F$, e $\text{Im } p_F = F$. Além disso, é fácil ver que p_F é linear.

Se $F = \{0\}$, então $p_F = 0$.

Se $F \neq \{0\}$, então $\|p_F\| = 1$ (em particular, $p_F \in L(H)$). De fato,

$$\|x\|^2 = \|x - x_F + x_F\|^2 = \|x - x_F\|^2 + \|x_F\|^2 \geq \|x_F\|^2 = \|p_F(x)\|^2,$$

logo $\|p_F\| \leq 1$. Seja $x_0 \in F$ com $\|x_0\| = 1$. Logo $p_F(x_0) = x_0$, e $\|p_F(x_0)\| = \|x_0\| = 1$, e assim $\|p_F\| = \sup\{\|p_F(x)\| : \|x\| = 1\} \geq \|p_F(x_0)\| = 1$. Portanto de fato $\|p_F\| = 1$.

Note também que $p_F^2 = p_F$.

Observação. Se H é pré-hilbertiano, dado $y \in H$, podemos considerar $\lambda : H \rightarrow \mathbb{C}$ dada por

$$\lambda(x) \doteq \langle x, y \rangle.$$

Então $\lambda \in H'$ e $\|\lambda\| = \|y\|$. De fato,

$$|\lambda(x)| = |\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\| \text{ para todo } x \in H.$$

Logo $\lambda \in H'$ e $\|\lambda\| \leq \|y\|$. Se $y = 0$, temos $\lambda = 0$. Se $y \neq 0$,

$$\left| \lambda \left(\frac{y}{\|y\|} \right) \right| = \left| \left\langle \frac{y}{\|y\|}, y \right\rangle \right| = \|y\|.$$

Como $\|y/\|y\|\| = 1$, segue que $\|\lambda\| = \|y\|$.

Teorema 2.4 (Riesz). *Seja H um espaço de Hilbert. Dado $f \in H'$, existe um único $y \in H$ tal que*

$$f(x) = \langle x, y \rangle \text{ para todo } x \in H$$

e, pelo que vimos acima, $\|f\| = \|y\|$.

Demonstração. Se $f = 0$, tomamos $y = 0$. Suponha $f \neq 0$. Seja $F \doteq \ker f$. Como f é contínua, F é fechado, e como H é de Hilbert, segue que F é completo. Seja $b_0 \in F^\perp$ (como $f \neq 0$, $F \subsetneq H$, e assim o Teorema 2.3 implica que existe tal b_0 ; tome $x \in H \setminus F$, e $b_0 \doteq x - x_F$).

Se definirmos

$$b \doteq \frac{1}{f(b_0)} b_0$$

$(f(b_0) \neq 0 \text{ pois } b_0 \notin F)$, temos $f(b) = 1$, e $b \in F^\perp$. Note que

$$x = f(x)b + (x - f(x)b),$$

com $f(x)b \in F^\perp$ e $x - f(x)b \in F$. Logo

$$\langle x, b \rangle = \langle f(x)b, b \rangle = f(x)\|b\|^2.$$

Então

$$f(x) = \left\langle x, \frac{b}{\|b\|^2} \right\rangle, \text{ para todo } x \in H. \quad \square$$

Assim se H é de Hilbert, a aplicação

$$\begin{aligned} H &\rightarrow H' \\ y &\mapsto \langle \cdot, y \rangle \end{aligned}$$

é bijetora, preserva a norma, e é antilinear ($\alpha y \mapsto \overline{\alpha} \langle \cdot, y \rangle$).

2.1 Adjuntos

H espaço de Hilbert, $A \in L(H)$.

Teorema 2.5. *Existe um único $A^* \in L(H)$ com $\|A\| = \|A^*\|$ e tal que*

$$\langle Ax, y \rangle = \langle x, A^*y \rangle, \text{ para todos } x, y \in H.$$

Ainda mais, $(A^)^* = A$.*

Demonstração. Fixado $y \in H$, considere o funcional

$$\begin{aligned} \lambda_y : H &\rightarrow \mathbb{C} \\ x &\mapsto \langle Ax, y \rangle. \end{aligned}$$

Obviamente λ_y é linear e se $x \in H$,

$$|\lambda_y(x)| = |\langle Ax, y \rangle| \leq \|Ax\| \cdot \|y\| \leq \|A\| \cdot \|x\| \cdot \|y\|.$$

Portanto λ_y é contínuo e $\|\lambda_y\| \leq \|A\| \|y\|$. Pelo Teorema de Riesz, existe $z_y \in H$ com $\|z_y\| = \|\lambda_y\|$ e $\lambda_y(x) = \langle x, z_y \rangle$ para todo $x \in H$.

Assim, obtivemos uma aplicação $y \mapsto z_y$, isto é $A^* : H \rightarrow H$ dada por

$$A^*(y) = z_y.$$

É fácil ver que A^* é linear. Também,

$$\|A^*y\| = \|z_y\| = \|\lambda_y\| \leq \|A\| \|y\|, \text{ para todo } y \in H.$$

Logo A^* é contínua, e $\|A^*\| \leq \|A\|$. Agora,

$$\langle Ax, y \rangle = \lambda_y(x) = \langle x, z_y \rangle = \langle x, A^*y \rangle, \text{ para todos } x, y \in H.$$

Também,

$$\begin{aligned} \|Ax\|^2 &= |\langle Ax, Ax \rangle| = |\langle x, A^*Ax \rangle| \leq \|x\| \cdot \|A^*Ax\| \\ &\leq \|x\| \cdot \|A^*\| \cdot \|Ax\| \end{aligned}$$

logo $\|Ax\| \leq \|A^*\| \cdot \|x\|$ para todo $x \in H$. Portanto $\|A\| \leq \|A^*\|$ e assim $\|A\| = \|A^*\|$.

Note que A^* é único pela unicidade do Teorema de Riesz. (Ou também é fácil provar diretamente que, se $\langle x, A_1y \rangle = \langle x, A_2y \rangle$ para todos $x, y \in H$, então $A_1 = A_2$.)

Finalmente, se $x, y \in H$,

$$\begin{aligned} \langle Ax, y \rangle &= \langle x, A^*y \rangle = \overline{\langle A^*y, x \rangle} = \overline{\langle y, (A^*)^*x \rangle} \\ &= \langle (A^*)^*x, y \rangle \end{aligned}$$

logo $(A^*)^* = A$. □

Definição. H Hilbert, $A \in L(H)$. Dizemos que A é *auto-adjunto* ou *hermitiano* se $A = A^*$. Isto é, se

$$\langle Ax, y \rangle = \langle x, Ay \rangle \text{ para todos } x, y \in H.$$

Podemos estender essa definição para espaços pré-hilbertianos:

Definição. H pré-hilbertiano, $A \in L(H)$. Dizemos que A é *auto-adjunto* ou *hermitiano* se

$$\langle Ax, y \rangle = \langle x, Ay \rangle \text{ para todos } x, y \in H.$$

Exemplo. H pré-hilbertiano, $F \subseteq H$ subespaço completo. Considere $p = p_F \in L(H)$ a projeção ortogonal sobre F . Então p é auto-adjunto. De fato, se $x \in H$, temos $p(x) = x_F \in F$ com $x - x_F \in F^\perp$. Mais, se $y \in H$, temos $y - y_F \in F^\perp$ logo $x - x_F \perp y_F$ e $y - y_F \perp y_F$. Dessa forma,

$$\langle x, y_F \rangle - \langle x_F, y_F \rangle = \langle x - x_F, y_F \rangle = 0$$

e

$$\langle x_F, y \rangle - \langle x_F, y_F \rangle = \langle x_F, y - y_F \rangle = 0.$$

Portanto

$$\langle p(x), y \rangle = \langle x_F, y \rangle = \langle x_F, y_F \rangle = \langle x, y_F \rangle = \langle x, p(y) \rangle.$$

2.2 Bases hilbertianas

H espaço pré-hilbertiano fixado. Uma família $\{e_\alpha : \alpha \in A\} \subseteq H$ é dita *ortonormal* (o.n.) se

$$\|e_\alpha\| = 1 \text{ para todo } \alpha \in A$$

e

$$\langle e_\alpha, e_\beta \rangle = 0 \text{ para todos } \alpha, \beta \in A \text{ distintos.}$$

Se $x \in H$, o número complexo $x_\alpha \doteq \langle x, e_\alpha \rangle$, $\alpha \in A$ é chamado o α -ésimo *coeficiente de Fourier de x com relação a $\{e_\alpha : \alpha \in A\}$* .

Exemplo. $S^1 \subseteq \mathbb{C}$ o círculo unitário. Escrevemos $S^1 = \{e^{i\theta} : 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$. Dizemos que θ é a variável em S^1 . O espaço

$$C_{L^2}(S^1) \doteq \{f : S^1 \rightarrow \mathbb{C} \text{ contínua}\}$$

com o produto interno

$$\langle f, g \rangle \doteq \int_0^{2\pi} f(e^{i\theta}) \overline{g(e^{i\theta})} d\theta$$

é um espaço pré-hilbertiano.

Seja $\{e_n : n \in \mathbb{Z}\} \subseteq C_{L^2}(S^1)$ com

$$e_n \doteq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} p_n \Big|_{S^1}, \quad \text{em que} \quad p_n(z) \doteq z^n.$$

O conjunto $\{e_n : n \in \mathbb{Z}\}$ é ortonormal: se $m, n \in \mathbb{Z}$,

$$\langle e_n, e_m \rangle = \int_0^{2\pi} e^{in\theta} e^{-im\theta} d\theta = \delta_{m,n} = \begin{cases} 1, & \text{se } m = n \\ 0, & \text{se } m \neq n. \end{cases}$$

Desigualdade de Bessel. Para todo $x \in H$, vale

$$\sum_{\alpha \in A} |x_\alpha|^2 \leq \|x\|^2.$$

Mais ainda, vale $\sum_{\alpha \in A} |x_\alpha|^2 = \|x\|^2$ se, e somente se

$$x = \sum_{\alpha \in A} x_\alpha e_\alpha.$$

Demonstração. Seja $B \subseteq A$ finito. Temos

$$\begin{aligned} 0 &\leq \left\| x - \sum_{\alpha \in B} x_\alpha e_\alpha \right\|^2 \\ &\leq \|x\|^2 - \left\langle x, \sum_{\alpha \in B} x_\alpha e_\alpha \right\rangle - \left\langle \sum_{\alpha \in B} x_\alpha e_\alpha, x \right\rangle + \left\langle \sum_{\alpha \in B} x_\alpha e_\alpha, \sum_{\beta \in B} x_\beta e_\beta \right\rangle \\ &\leq \|x\|^2 - \sum_{\alpha \in B} \overline{x_\alpha} \langle x, e_\alpha \rangle - \sum_{\alpha \in B} x_\alpha \langle e_\alpha, x \rangle + \sum_{\alpha, \beta \in B} x_\alpha \overline{x_\beta} \langle e_\alpha, e_\beta \rangle \\ &\leq \|x\|^2 - \sum_{\alpha \in B} |x_\alpha|^2. \end{aligned}$$

Logo

$$\sum_{\alpha \in B} |x_\alpha|^2 \leq \|x\|^2 \text{ para todo } B \subseteq A \text{ finito.}$$

Tomando o supremo sobre B (exercício 1 da Lista 1), segue a desigualdade desejada.

Se $x = \sum_{\alpha \in A} x_\alpha e_\alpha$, temos

$$\begin{aligned} \|x\|^2 &= \left\langle \sum_{\alpha \in A} x_\alpha e_\alpha, \sum_{\beta \in A} x_\beta e_\beta \right\rangle = \sum_{\alpha, \beta \in A} x_\alpha \overline{x_\beta} \langle e_\alpha, e_\beta \rangle \\ &= \sum_{\alpha \in A} |x_\alpha|^2, \end{aligned}$$

em que usamos a continuidade do produto interno e propriedades já vistas da soma infinita.

Se $\|x\|^2 = \sum_{\alpha \in A} |x_\alpha|^2$, dado $B \subseteq A$ finito, temos

$$\left\| x - \sum_{\alpha \in B} x_\alpha e_\alpha \right\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{\alpha \in B} |x_\alpha|^2 \quad (2)$$

pelas contas feitas anteriormente. Seja $\varepsilon > 0$. Como $\sum_{\alpha \in A} |x_\alpha|^2 = \|x\|^2$ existe $B_\varepsilon \subseteq A$ finito tal que se $B \subseteq A$ é finito e $B_\varepsilon \subseteq B$, então

$$\|x\|^2 - \sum_{\alpha \in B} |x_\alpha|^2 \leq \varepsilon.$$

Assim segue de (2) que

$$\text{se } B_\varepsilon \subseteq B \subseteq A \text{ com } B \text{ finito, então } \left\| x - \sum_{\alpha \in B} x_\alpha e_\alpha \right\| \leq \varepsilon,$$

isto é, $x = \sum_{\alpha \in A} x_\alpha e_\alpha$. □

Teorema 2.6 (da Melhor Aproximação). *H pré-hilbertiano, $\{e_\alpha : \alpha \in A\}$ ortonormal em H . Dado $x \in H$, para todo $B \subseteq A$ finito, para todos $\lambda_\beta \in \mathbb{C}$, $\beta \in B$, temos*

$$\left\| x - \sum_{\alpha \in B} x_\alpha e_\alpha \right\| \leq \left\| x - \sum_{\beta \in B} \lambda_\beta e_\beta \right\|.$$

Demonstração. Note que

$$\left(x - \sum_{\alpha \in B} x_\alpha e_\alpha \right) \perp e_\beta \text{ para todo } \beta \in B,$$

logo $x - \sum_{\alpha \in B} x_\alpha e_\alpha$ é ortonormal ao espaço $[e_\beta : \beta \in B]$ sendo então a melhor aproximação. □

Teorema 2.7 (da Base). *H espaço pré-hilbertiano, $\{e_\alpha : \alpha \in A\} \subseteq H$ conjunto ortonormal. São equivalentes:*

1. *para todo $x \in H$, vale $x = \sum_{\alpha \in A} x_\alpha e_\alpha$;*
2. *para todos $x, y \in H$, vale*

$$\langle x, y \rangle = \sum_{\alpha \in A} x_\alpha \overline{y_\alpha}; \quad (\text{Fórmula de Parseval})$$

3. para todo $x \in H$, vale

$$\sum_{\alpha \in A} |x_\alpha|^2 = \|x\|^2; \text{ e} \quad (\text{Bessel})$$

4. $[e_\alpha : \alpha \in A]$ é denso em H .

Definição. Uma família ortonormal $\{e_\alpha : \alpha \in A\}$ é dita *base hilbertiana* de H se valem as propriedades equivalentes do Teorema 2.7.

Demonstração do Teorema 2.7. É fácil ver que 1., 2. e 3., são equivalentes.

1. $\Rightarrow$ 4.: Sejam $x \in H$ e $\varepsilon > 0$. Existe $B_\varepsilon \subseteq A$ finito tal que

$$\left\| x - \sum_{\alpha \in B_\varepsilon} x_\alpha e_\alpha \right\| < \varepsilon,$$

e como $\sum_{\alpha \in B_\varepsilon} x_\alpha e_\alpha \in [e_\alpha : \alpha \in A]$, temos que $[e_\alpha : \alpha \in A]$ é denso em H .

4. $\Rightarrow$ 3. Suponhamos que 3. não vale. Então existe $x \in H$ tal que

$$\|x\|^2 - \sum_{\alpha \in A} |x_\alpha|^2 = d > 0,$$

sendo que d deve ser positivo por Bessel. Logo se $B \subseteq A$ é finito,

$$\|x\|^2 - \sum_{\alpha \in B} |x_\alpha|^2 \geq \|x\|^2 - \sum_{\alpha \in A} |x_\alpha|^2 = d$$

e, como vimos antes,

$$\left\| x - \sum_{\alpha \in B} x_\alpha e_\alpha \right\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{\alpha \in B} |x_\alpha|^2 \geq d.$$

Dessa forma, pelo Teorema da Melhor Aproximação, para todo $B \subseteq A$ finito e para qualquer escolha de $\lambda_\beta \in \mathbb{C}$, $\beta \in B$ tem-se

$$\left\| x - \sum_{\beta \in B} \lambda_\beta e_\beta \right\|^2 \geq d > 0$$

o que contradiz ser $[e_\alpha : \alpha \in A]$ denso em H . □

Lema 2.8 (de Zorn). *Seja X conjunto não-vazio parcialmente ordenado. Suponha que todo $Y \subseteq X$ totalmente ordenado admite limitante superior, isto é; para todo $Y \subseteq X$ existe $z \in X$ tal que*

$$y \leq z \text{ para todo } y \in Y.$$

Então X possui um elemento maximal. (Isto é, existe $x \in X$ tal que se $y \in X$ e $y \geq x$, então $y = x$.)

Corolário 2.9. *Todo espaço pré-hilbertiano (não-nulo) admite um subconjunto ortonormal maximal.*

Teorema 2.10. *Se H é um espaço de Hilbert, então H possui uma base hilbertiana.*

Demonstração. Seja $\{e_\alpha : \alpha \in A\}$ um conjunto ortonormal maximal. Afirmo que esse conjunto é base hilbertiana de H . Se não fosse, teríamos $F \doteq \overline{\{e_\alpha : \alpha \in A\}} \subsetneq H$. Como H é de Hilbert, poderíamos obter $e \in F^\perp$ e com norma 1, o que implicaria que $\{e_\alpha : \alpha \in A\}$ não é maximal. $\square$

Gram-Schmidt. H pré-hilbertiano, $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq H$ linearmente independente. Então existe $\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ ortonormal tal que para todo $N \in \mathbb{N}$,

$$[f_1, \dots, f_N] = [e_1, \dots, e_N].$$

Demonstração. Tomo $e_1 \doteq f_1/\|f_1\|$. Supondo construídos $e_1, \dots, e_N$, definimos

$$e_{N+1}^* \doteq f_{N+1} - \langle f_{N+1}, e_1 \rangle e_1 - \dots - \langle f_{N+1}, e_N \rangle e_N.$$

Seja $e_{N+1} \doteq e_{N+1}^*/\|e_{N+1}^*\|$. Temos que e_{N+1} é ortogonal a e_j para todo $j \leq N$, e também é fácil ver que $[e_1, \dots, e_{N+1}] = [f_1, \dots, f_{N+1}]$. $\square$

Definição. E espaço normado. E é dito *separável* se admite um subconjunto enumerável e denso em E .

Teorema 2.11. H pré-hilbertiano. São equivalentes:

- 1) H é separável;
- 2) H possui base hilbertiana enumerável.

Demonstração. $(\Rightarrow)$: tomo um conjunto linearmente independente dentro do enumerável denso e aplico o processo de Gram-Schmidt; o resultado será a base hilbertiana.

$(\Leftarrow)$: se $\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ é base hilbertiana, então o conjunto

$$[(p + iq)e_n : n \in \mathbb{N}, p, q \in \mathbb{Q}]$$

será enumerável e denso. $\square$

Observação. H Hilbert com base hilbertiana enumerável $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$. Para todo $x \in H$, temos

$$x = \sum_{n \in \mathbb{N}} x_n e_n \quad \text{e} \quad \|x\|^2 = \sum_{n \in \mathbb{N}} |x_n|^2.$$

Assim

$$\begin{aligned} H &\rightarrow l_2(\mathbb{N}) \\ x &\mapsto (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \end{aligned}$$

é um isomorfismo isométrico.

Exemplo. $C_{L^2}(S^1) = \{f : S^1 \rightarrow \mathbb{C} \text{ contínua}\}$ munido da norma

$$\|f\|_{L^2} = \left(\int_0^{2\pi} |f(e^{i\theta})|^2 d\theta \right)^{1/2}$$

é um espaço pré-hilbertiano. A aplicação identidade

$$\text{id} : (C(S^1), \|\cdot\|_\infty) \rightarrow C_{L^2}(S^1)$$

é contínua:

$$\|f\|_{L^2} \leq \sqrt{2\pi} \|f\|_\infty \quad \text{para todo } f \in C(S^1). \quad (3)$$

Teorema 2.12. $\{e^{im\theta}/\sqrt{2\pi}\}_{m \in \mathbb{Z}}$ é uma base hilbertiana para $C_{L^2}(S^1)$.

Para provar esse Teorema, precisaremos usar o Teorema de Stone-Weierstrass:

Teorema 2.13 (Stone-Weierstrass). *K espaço topológico compacto, $\mathcal{A} \subseteq C(K)$ subálgebra de $C(K)$ (isto é, $\mathcal{A}$ é um $\mathbb{C}$ -subespaço vetorial de $C(K)$ fechado algebricamente pela multiplicação de funções ponto-a-ponto). Suponha que*

- a) $\mathcal{A}$ separa pontos de K , isto é; dados $x, y \in K$ distintos, existe $f \in \mathcal{A}$ tal que $f(x) \neq f(y)$;
- b) $\mathcal{A}$ contém todas as funções constantes; e
- c) se $f \in \mathcal{A}$, então o conjugado dessa função, $\bar{f}$, também pertence a $\mathcal{A}$.

Então $\mathcal{A}$ é denso em $C(K)$.

Exemplo. A hipótese c) do Teorema de Stone-Weierstrass é necessária: tome $K \doteq \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$ e

$$\mathcal{A} \doteq \left\{ \sum_{j=0}^m a_j z^j : a_0, \dots, a_m \in \mathbb{C}, m \in \mathbb{Z}_+ \right\}.$$

A subálgebra $\mathcal{A}$ satisfaz a) e b), mas não c) (a função $z \mapsto \bar{z}$ não pertence a $\mathcal{A}$), e de fato $\mathcal{A}$ não é um conjunto denso em $C(K)$, dado que $\bar{\mathcal{A}}$ está contido no conjunto das funções holomorfas em K , pois limite uniforme de funções holomorfas é holomorfo.

Demonstração do Teorema 2.12. Seja

$$\mathcal{A} \doteq \left\{ \sum_{j=-m}^m a_j e^{ij\theta} : a_{-m}, \dots, a_m \in \mathbb{C}, \text{ para todo } m \in \mathbb{Z}_+ \right\}.$$

Note que a função $e^{i\theta}$ separa os pontos de S^1 ($e^{i\theta} = z$ a identidade). De fato, é fácil ver que $\mathcal{A}$ satisfaz todas as hipóteses do Teorema de Stone-Weierstrass e assim é denso em $C(S^1)$ com a norma $\|\cdot\|_\infty$. Mas note que (3) implica que esse conjunto será também denso em $C_{L^2}(S^1)$. Isto é, $\mathcal{A} = [e^{im\theta}\sqrt{2\pi}, m \in \mathbb{Z}]$ é denso em $C_{L^2}(S^1)$. $\square$

Logo, para toda $f \in C(S^1)$, isto é, f é uma função de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{C}$ que é 2π -periódica e contínua, temos

$$f(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{m \in \mathbb{Z}} C_m[f] e^{im\theta} \quad (\text{Série de Fourier de } f)$$

em $C_{L^2}(S^1)$ (isto é, na norma $\|\cdot\|_{L^2}$; em geral não temos convergência pontual), em que

$$C_m[f] \doteq \left\langle f, \frac{e^{im\theta}}{\sqrt{2\pi}} \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} f(\theta) e^{-im\theta} d\theta.$$

Também, por Bessel,

$$\|f\|_{L^2}^2 = \sum_{m \in \mathbb{Z}} |C_m[f]|^2.$$

Teorema 2.14 (Carleson). *A série de Fourier de $f \in C(S^1)$ converge pontualmente para f quase-sempre.*

Teorema 2.15. *Existe $\mathcal{F} \subseteq C(S^1)$ conjunto magro tal que para toda $f \in C(S^1) \setminus \mathcal{F}$, existe $A \subseteq S^1$ magro tal que a série de Fourier de f diverge para todo $\theta \in S^1 \setminus A$.*

Proposição 2.16. *Seja $f \in C^1(\mathbb{R})$ função 2π -periódica. Então a série de Fourier de f converge para f uniformemente em S^1 .*

Demonstração. Basta mostrar que $\sum_{m \in \mathbb{Z}} |C_m[f]|$ converge, pois nesse caso o M-teste de Weierstrass implica que a Série de Fourier de f converge uniformemente para alguma função $g \in C(S^1)$. Mas então ela converge na norma $\|\cdot\|_{L^2}$ para g , mas nessa norma a Série de Fourier de f converge para f , e assim $g = f$ quase-sempre. Como g, f são contínuas, segue que $g = f$.

Provemos então que $\sum_{m \in \mathbb{Z}} |C_m[f]|$ converge. Se $m \neq 0$, temos

$$\begin{aligned} C_m[f] &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} f(\theta) e^{-im\theta} d\theta = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} f(\theta) \cdot \frac{d}{d\theta} \left(\frac{e^{-im\theta}}{-mi} \right) d\theta \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(f(\theta) \frac{e^{-im\theta}}{-im} \right) \Big|_0^{2\pi} + \frac{1}{im} C_m[f'] \\ &= \frac{1}{im} C_m[f'], \end{aligned}$$

sendo que eliminamos um termo usando que f é 2π -periódica. Dessa forma,

$$\begin{aligned} \sum_{m \in \mathbb{Z}} |C_m[f]| &= \sum_{m \in \mathbb{Z}^*} \frac{1}{m} |C_m[f']| + |C_0[f]| \\ &= |C_0[f]| + \left(\sum_{m \in \mathbb{Z}^*} \frac{1}{m^2} \right)^{1/2} \cdot \left(\sum_{m \in \mathbb{Z}^*} |C_m[f']|^2 \right)^{1/2} < \infty \end{aligned}$$

usando a Desigualdade de Cauchy-Schwarz. Temos $\sum_{m \in \mathbb{Z}^*} |C_m[f']|^2 < \infty$ pela Desigualdade de Bessel aplicada a f' . $\square$

3 Operadores Compactos

E, F espaços normados, $k : E \rightarrow F$ linear.

Definição. O operador k é *compacto* (ou absolutamente contínuo) se o conjunto

$$\{k(x) : x \in E, \|x\| < 1\}$$

é relativamente compacto em F .

Definição. Seja (X, d) um espaço métrico. Um conjunto $A \subseteq X$ é dito *relativamente compacto* se o seu fecho $\overline{A}$ é compacto.

Teorema 3.1. *Seja $A \subseteq X$. São equivalentes:*

- 1) A é relativamente compacto;
- 2) toda sequência em A admite subsequência convergente (com limite não necessariamente dentro de A).

Além disso, assumindo 1) ou 2), temos

- 3) A é totalmente limitado, isto é; para todo $\varepsilon > 0$, existem $A_1, \dots, A_n \subseteq X$ tais que $A \subseteq A_1 \cup \dots \cup A_n$ e $\text{diam}(A_j) < \varepsilon$ para todo j .

No caso em que X é completo, 1), 2) e 3) são equivalentes.

É fácil ver que se $f : (X, d) \rightarrow (Y, d')$ é contínua e $A \subseteq X$ é relativamente compacto, então $f(A)$ é relativamente compacto. (É fácil ver por sequências.)

Proposição 3.2. E, F espaços normados, $k : E \rightarrow F$ linear. São equivalentes:

- 1) k é compacto;
- 2) $k(B)$ é relativamente compacto em F para todo $B \subseteq E$ limitado;
- 3) se $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq E$ é limitada, então $(k(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ tem subsequência convergente.

Demonstração. 1) $\Rightarrow$ 2): Seja $B \subseteq E$ limitado. Então existe $r > 0$ tal que $B \subseteq \{x \in E : \|x\| < r\}$. Logo

$$k(B) \subseteq k(\{x \in E : \|x\| < r\}) = r.k(\{x \in E : \|x\| < 1\}).$$

Como $k(\{x \in E : \|x\| < 1\})$ é relativamente compacto, $r.k(\{x \in E : \|x\| < 1\})$ também o é, e assim $k(B)$ é relativamente compacto, pois $\overline{k(B)} \subseteq \overline{r.k(\{x \in E : \|x\| < 1\})}$ compacto.

As outras implicações ficam como exercício. $\square$

Notação. Denotamos por $K(E, F)$ o conjunto das funções lineares compactas de E em F ; temos $K(E, F) \subseteq L(E, F)$. (Toda função compacta é contínua.)

Exemplo. Se $k : E \rightarrow F$ tem posto finito (isto é, $\dim k(E) < \infty$) e $k \in L(E, F)$, então k é compacta.

Observação. Se temos

$$E_0 \xrightarrow{u} E \xrightarrow{k} F \xrightarrow{v} F_0,$$

com $u \in L(E_0, E)$, $k \in K(E, F)$ e $v \in L(F, F_0)$, então $k \circ u \in K(E_0, F)$ e $v \circ k \in K(E, F_0)$. Em particular, $K(E) \subseteq L(E)$ é um *ideal bilateral* de $L(E)$.

Teorema 3.3. Se F é um espaço de Banach, então $K(E, F)$ é fechado em $L(E, F)$.

Demonstração. Seja $(k_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq K(E, F)$ tal que $k_n \rightarrow g$ em $L(E, F)$. Seja $\{x_m\}_{m \in \mathbb{N}} \subseteq E$ limitada. Seja $M > 0$ tal que

$$\|x_m\| \leq M \quad \text{para todo } m \in \mathbb{N}.$$

Queremos mostrar que $(g(x_m))_{m \in \mathbb{N}}$ possui subsequência convergente. Existe $\{m_k\}_{k \in \mathbb{N}}$, $m_k \nearrow +\infty$ tal que $\{k_n(x_{m_k})\}_k$ é convergente para todo $n \in \mathbb{N}$.

(Por um argumento de diagonal de Cantor; tomo uma subsequência para k_1 , uma subsequência dessa subsequência para k_2 , uma subsequência dessa para k_3 , etc., e tomo $\{x_{m_k}\}_k$ a sequência formada pela diagonal.) Seja $y_n \doteq \lim_{k \rightarrow +\infty} k_n(x_{m_k})$; $(y_n)_n$ é uma sequência de Cauchy em F , pois

$$\begin{aligned}\|y_n - y_p\| &\leq \|y_n - k_n(x_{m_k})\| + \|k_n(x_{m_k}) - k_p(x_{m_k})\| + \|k_p(x_{m_k}) - y_p\| \\ &\leq \|y_n - k_n(x_{m_k})\| + \|k_n - k_p\|M + \|y_p - k_p(x_{m_k})\|\end{aligned}$$

Fazendo $k \rightarrow +\infty$, obtemos

$$\|y_n - y_p\| \leq M\|k_n - k_p\|,$$

com $(k_n)_n$ de Cauchy em $L(E, F)$, de modo que $(y_n)_n$ é de fato de Cauchy em F e assim é convergente.

Seja $y \doteq \lim y_n \in F$. Vamos mostrar que $g(x_{m_k}) \rightarrow y$. De fato,

$$\begin{aligned}\|g(x_{m_k}) - y\| &\leq \|g(x_{m_k}) - k_n(x_{m_k})\| + \|k_n(x_{m_k}) - y_n\| + \|y_n - y\| \\ &\leq \|g - k_n\|.M + \|k_n(x_{m_k}) - y_n\| + \|y_n - y\|.\end{aligned}\tag{4}$$

Seja $\varepsilon > 0$. Fixe $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|y_n - y\| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{e} \quad \|k_n - g\| < \frac{\varepsilon}{3M}.$$

Escolho agora k_0 tal que, para o n fixado, temos

$$\text{se } k \geq k_0, \text{ então } \|k_n(x_{m_k}) - y_n\| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Com essas escolhas de n e k_0 , segue de (4) que

$$\text{se } k \geq k_0 \text{ então } \|g(x_{m_k}) - y\| < \varepsilon. \quad \square$$

Exemplo. E normado, F Banach, $\{g_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq E'$, $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq F$ e $\{\lambda_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{C}$ tais que $\{g_n\}_n$ e $\{y_n\}_n$ são sequências limitadas em seus respectivos espaços, e $\sum_{n=1}^{+\infty} |\lambda_n| < \infty$. Então $f : E \rightarrow F$ dada por

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n g_n(x) y_n$$

é uma função linear contínua (exercício da lista 1). De fato f é compacta pois é limite (uniforme) das aplicações

$$f_N(x) \doteq \sum_{n=1}^N \lambda_n g_n(x) y_n,$$

as quais têm posto finito, logo são compactas. Como F é de Banach, o Teorema 3.3 implica que f é também compacta.

Exemplo. Fixe $K \in C([c, d] \times [a, b])$; $K = K(t, s)$. Defina $k : C([a, b]) \rightarrow C([c, d])$ por

$$k(x)(t) = \int_a^b K(t, s)x(s) \, ds.$$

Para $t \in [c, d]$ fixado,

$$|k(x)(t)| \leq \int_a^b |K(t, s)x(s)| \, ds \leq \left(\int_a^b |K(t, s)| \, ds \right) \cdot \|x\|_\infty.$$

Isto é;

$$\|k(x)\|_\infty \leq \left(\sup_{t \in [c, d]} \int_a^b |K(t, s)| \, ds \right) \cdot \|x\|_\infty.$$

Logo $k \in L(C([a, b]), C([c, d]))$ com

$$\|k\| \leq \sup_{t \in [c, d]} \int_a^b |K(t, s)| \, ds.$$

Fato: k é um operador compacto (veremos depois da seguinte digressão).

Digressão (O Teorema de Ascoli). Sejam (E, d) e (F, ρ) espaços métricos, E compacto e F completo. Temos que $C(E, F)$ é um espaço métrico completo com a distância

$$D(f, g) \doteq \sup_{x \in E} \rho(f(x), g(x)),$$

sendo que o supremo existe pois f e g são contínuas e E é compacto.

Teorema 3.4 (Ascoli). *O conjunto $\mathcal{F} \subseteq C(E, F)$ é relativamente compacto em $C(E, F)$ se, e somente se valem as seguintes propriedades:*

- 1) *para todo $x \in E$, tem-se $\{f(x) : f \in \mathcal{F}\} \subseteq F$ relativamente compacto em F ; e*
- 2) *$\mathcal{F}$ é equicontínua, isto é; para todos $x_0 \in E$ e $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que*

$$\text{se } x \in E \text{ e } d(x, x_0) \leq \delta, \text{ então } \rho(f(x), f(x_0)) \leq \varepsilon \text{ para toda } f \in \mathcal{F}.$$

Demonstração do Fato (de antes da digressão). Seja

$$\mathcal{F} \doteq k(\{x \in C([a, b]) : \|x\|_\infty \leq 1\}) \subseteq C([c, d]).$$

Para verificar que $\mathcal{F}$ é relativamente compacto em $C([c, d])$, usaremos o Teorema de Ascoli.

Se $t \in [c, d]$, e $x \in C([a, b])$ é tal que $\|x\|_\infty \leq 1$, temos

$$|k(x)(t)| \leq \int_a^b |K(t, s)| |x(s)| \, ds \leq \int_a^b |K(t, s)| \, ds \doteq R(t).$$

Logo $\{y(t) : y \in \mathcal{F}\}$ está contido na bola de centro 0 e raio $R(t)$, de modo que esse conjunto é relativamente compacto e está satisfeita a condição 1) do Teorema 3.4.

Sejam $t_0 \in [c, d]$ e $\varepsilon > 0$. Se $x \in C([a, b])$ e $\|x\|_\infty \leq 1$, temos

$$\begin{aligned} |k(x)(t) - k(x)(t_0)| &= \left| \int_a^b (K(t, s) - K(t_0, s)) x(s) \, ds \right| \\ &\leq \int_a^b |K(t, s) - K(t_0, s)| \, ds. \end{aligned}$$

Assim a equicontinuidade de $\mathcal{F}$ segue da continuidade uniforme de K . De fato, existe $\delta > 0$ tal que

$$\text{se } \|(t, s) - (t', s')\| \leq \delta, \text{ então } |K(t, s) - K(t', s')| \leq \frac{\varepsilon}{b-a}.$$

Assim, se $t \in [c, d]$ e $|t - t_0| \leq \delta$, temos

$$|k(x)(t) - k(x)(t_0)| \leq \int_a^b |K(t, s) - K(t_0, s)| \, ds \leq \varepsilon \quad \square$$

3.1 Preliminares para o Teorema Espectral

Lema 3.5. *Sejam H pré-hilbertiano, $A \in L(H)$. Então*

$$\|A\| = \sup_{\|x\| \leq 1, \|y\| \leq 1} |\langle Ax, y \rangle|.$$

Demonstração. Seja $\alpha \doteq \sup_{\|x\| \leq 1, \|y\| \leq 1} |\langle Ax, y \rangle|$. Podemos assumir $A \neq 0$. Temos

$$|\langle Ax, y \rangle| \leq \|Ax\| \cdot \|y\| \leq \|A\| \cdot \|x\| \cdot \|y\| \quad \text{para todos } x, y \in H.$$

Logo $\alpha \leq \|A\|$. Por outro lado, se $\|x\| \leq 1$, temos

$$\|Ax\|^2 = \langle Ax, Ax \rangle = \|A\| \cdot \left\langle Ax, \frac{Ax}{\|A\|} \right\rangle \leq \|A\| \alpha,$$

pois $\|Ax/\|A\|\| \leq 1$. Logo segue que

$$\|Ax\| \leq (\|A\| \alpha)^{1/2} \quad \text{para todo } x \in H, \|x\| \leq 1.$$

Tomando o supremo para $\|x\| \leq 1$, temos

$$\|A\| \leq (\|A\|\alpha)^{1/2}$$

e assim $\|A\| \leq \alpha$. □

Teorema 3.6. *Sejam H pré-hilbertiano, $A \in L(H)$ hermitiano. Então*

$$\|A\| = \sup_{\|x\| \leq 1} |\langle Ax, x \rangle|.$$

Demonstração. Seja $q \doteq \sup_{\|x\| \leq 1} |\langle Ax, x \rangle|$. Comparando com o Lema 3.5, temos $q \leq \|A\|$. Resta mostrar que $\|A\| \leq q$. Se $x, y \in H$;

$$\begin{aligned} & \langle A(x+y), x+y \rangle - \langle A(x-y), x-y \rangle \\ &= \langle Ax, x \rangle + \langle Ax, y \rangle + \langle Ay, x \rangle + \langle Ay, y \rangle - \langle Ax, x \rangle + \langle Ax, y \rangle + \langle Ay, x \rangle - \langle Ay, y \rangle \end{aligned}$$

logo

$$\begin{aligned} \langle A(x+y), x+y \rangle - \langle A(x-y), x-y \rangle &= 2 \langle Ax, y \rangle + 2 \langle Ay, x \rangle \\ &= 2(\langle Ax, y \rangle + \langle y, Ax \rangle) \\ &= 4 \operatorname{Re}(\langle Ax, y \rangle). \end{aligned}$$

Logo

$$\operatorname{Re}(\langle Ax, y \rangle) = \frac{1}{4}(\langle A(x+y), x+y \rangle - \langle A(x-y), x-y \rangle). \quad (5)$$

Notemos que se $z \in H$,

$$|\langle Az, z \rangle| \leq q\|z\|^2.$$

Se $z = 0$ é trivial. Se $z \neq 0$, vale

$$\left| \left\langle A \left(\frac{z}{\|z\|} \right), \frac{z}{\|z\|} \right\rangle \right| \leq q.$$

Assim (5) implica

$$\operatorname{Re}(\langle Ax, y \rangle) \leq \frac{q}{4}(\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2) = \frac{q}{2}(\|x\|^2 + \|y\|^2).$$

Logo se $\|x\| \leq 1$ e $\|y\| \leq 1$, temos

$$\operatorname{Re}(\langle Ax, y \rangle) \leq q.$$

Seja então $\theta \in \mathbb{R}$ tal que $\langle Ax, y \rangle = e^{i\theta} |\langle Ax, y \rangle|$. Então

$$|\langle Ax, y \rangle| = e^{-i\theta} \langle Ax, y \rangle = \langle A(e^{-i\theta}x), y \rangle =$$

mas como $|\langle Ax, y \rangle|$ é real, de fato

$$|\langle Ax, y \rangle| = \operatorname{Re}(\langle A(e^{-i\theta}x), y \rangle) \leq q.$$

Portanto $\|A\| \leq q$ pelo Lema 3.5. □

3.2 O Teorema Espectral para operadores compactos hermitianos

E normado, $A \in L(E)$.

Definição. Um número complexo λ é *autovalor* de A se existir $x \in E$, $x \neq 0$ tal que

$$Ax = \lambda x.$$

Notação. Se $\lambda \in \mathbb{C}$,

$$\mathcal{N}(\lambda, A) \doteq \{x \in E : Ax = \lambda x\} = \ker(\lambda I - A).$$

Isto é, λ é autovalor de A se, e somente se $\mathcal{N}(\lambda, A) \neq (0)$.

Um vetor $x \in E$ é dito *autovetor* associado ao autovalor λ se $x \in \mathcal{N}(\lambda, A)$.

Proposição 3.7. *Seja H um espaço pré-hilbertiano, $A \in L(H)$ hermitiano. Então*

- (1) *os autovalores de A são reais;*
- (2) *se λ_1, λ_2 são autovalores de A distintos, então $\mathcal{N}(\lambda_1, A) \perp \mathcal{N}(\lambda_2, A)$; e*
- (3) *se λ é autovalor de A , então $A(\mathcal{N}(\lambda, A)^\perp) \subseteq \mathcal{N}(\lambda, A)^\perp$, isto é; o subespaço $\mathcal{N}(\lambda, A)^\perp$ é A -invariante.*

Observação. A Proposição 3.7 prova que, em dimensão finita, todo operador linear hermitiano A é diagonalizável. De fato, seja (como visto em Álgebra Linear) λ_1 um autovalor de A . Considero depois A restrito ao subespaço A -invariante $\mathcal{N}(\lambda_1, A)^\perp$ e tomo um autovalor λ_2 dessa restrição. Continuando assim, obteremos $\mathcal{N}(\lambda_1, A), \dots, \mathcal{N}(\lambda_k, A)$ autoespaços dos quais o espaço vetorial será soma direta.

Demonstração da Proposição 3.7. (1): Sejam $\lambda \in \mathbb{C}$ autovalor de A e $x \in \mathcal{N}(\lambda, A)$, $x \neq 0$. Então

$$\begin{aligned} \lambda \|x\|^2 &= \lambda \langle x, x \rangle = \langle \lambda x, x \rangle = \langle Ax, x \rangle = \langle x, Ax \rangle = \langle x, \lambda x \rangle \\ &= \bar{\lambda} \|x\|^2, \end{aligned}$$

de modo que $\lambda = \bar{\lambda}$, isto é; $\lambda \in \mathbb{R}$.

(2): Se $x \in \mathcal{N}(\lambda_1, A)$, $y \in \mathcal{N}(\lambda_2, A)$, temos

$$\begin{aligned} \lambda_1 \langle x, y \rangle &= \langle \lambda_1 x, y \rangle = \langle Ax, y \rangle = \langle x, Ay \rangle = \langle x, \lambda_2 y \rangle \\ &= \lambda_2 \langle x, y \rangle. \end{aligned}$$

Logo $(\lambda_1 - \lambda_2) \langle x, y \rangle = 0$, e como $\lambda_1 \neq \lambda_2$ segue que $\langle x, y \rangle = 0$.

(3): Seja $z \in \mathcal{N}(\lambda, A)^\perp$. Precisamos provar que $Az \in \mathcal{N}(\lambda, A)^\perp$. Seja $x \in \mathcal{N}(\lambda, A)$. Então

$$\langle Az, x \rangle = \langle z, Ax \rangle = \langle z, \lambda x \rangle = \lambda \langle z, x \rangle = 0$$

logo $Az \in \mathcal{N}(\lambda, A)^\perp$. □

Exercício. Sejam H um espaço pré-hilbertiano e $A \in L(H)$ hermitiano. Prove que

$$\|A\| = \sup_{\|x\|=1} |\langle Ax, x \rangle|.$$

Digressão. Seja H pré-hilbertiano, $S \doteq \{x \in H : \|x\| = 1\}$. Defina $\gamma : S \rightarrow \mathbb{R}$ por ($A \in L(H)$ hermitiano)

$$\gamma(x) \doteq |\langle Ax, x \rangle|.$$

Suponha que γ assume máximo em $x_0 \in S$. Então teremos que x_0 é autovetor de A associado ao autovetor λ , com $\lambda = \langle Ax_0, x_0 \rangle$. (Como x_0 é máximo, o exercício acima mostra que $|\lambda| = |\langle Ax_0, x_0 \rangle| = \|A\|$.) De fato, se $\lambda \doteq \langle Ax_0, x_0 \rangle \in \mathbb{R}$, como $\|x_0\| = 1$ temos que x_0 é autovalor associado a λ pois

$$\begin{aligned} 0 \leq \|Ax_0 - \lambda x_0\|^2 &= \|Ax_0\|^2 - \lambda \langle Ax_0, x_0 \rangle - \lambda \langle x_0, Ax_0 \rangle + \lambda^2 \|x_0\|^2 \\ &= \|Ax_0\|^2 - 2\lambda \langle Ax_0, x_0 \rangle + \lambda^2 \|x_0\|^2 \\ &= \|Ax_0\|^2 - 2\lambda^2 + \lambda^2 \leq \|A\|^2 - \lambda^2 = 0 \end{aligned}$$

lembrando que, como observado, $\|A\| = |\lambda|$. (Note que usamos que x_0 é máximo para escrever $|\lambda| = \|A\|$.)

Teorema 3.8. Se $k \in K(H)$ é hermitiano, então k possui um autovalor λ com $|\lambda| = \|k\|$.

Demonstração. Suponha $k \neq 0$. Existe uma sequência $(x_n)_n \subseteq H$ com $\|x_n\| = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$ tal que $\|k\| = \lim |\langle Ax_n, x_n \rangle|$ (pois $\|k\| = \sup_{\|x\|=1} |\langle Ax, x \rangle|$). Passando a uma subsequência se necessário, podemos assumir que $(\langle Ax_n, x_n \rangle)_n$ converge para algum $\lambda \in \mathbb{R}$. Obviamente $|\lambda| = \|k\|$. Note que

$$\begin{aligned} \|k(x_n) - \lambda x_n\|^2 &= \|k(x_n)\|^2 - \lambda \langle k(x_n), x_n \rangle - \lambda \langle x_n, k(x_n) \rangle + \lambda^2 \|x_n\|^2 \\ &= \|k(x_n)\|^2 - 2\lambda \langle k(x_n), x_n \rangle + \lambda^2 \\ &\leq \|k\|^2 - 2\lambda \langle k(x_n), x_n \rangle + \lambda^2 \\ &\leq \lambda^2 - 2\lambda \langle k(x_n), x_n \rangle + \lambda^2 \rightarrow 0 \end{aligned}$$

logo $k(x_n) - \lambda x_n \rightarrow 0$. Como k é compacto, existe subsequência $(x_{n_k})_k$ de $(x_n)_n$ tal que $k(x_{n_k}) \rightarrow y$ para algum $y \in H$. Isto é; $\lambda x_{n_k} \rightarrow y$, de modo que tomando $x_0 \doteq y/\lambda$, temos que $x_{n_k} \rightarrow x_0$, e

$$k(x_0) = \lim_{k \rightarrow +\infty} k(x_{n_k}) = y = \lambda x_0.$$

Note também que $x_0 \neq 0$ pois $x_{n_k} \rightarrow x_0$ e $\|x_{n_k}\| = 1$ para todo $k \in \mathbb{N}$. $\square$

Teorema 3.9 (espectral para operadores hermitianos compactos). *Sejam H um espaço pré-hilbertiano e $k \in K(H)$ hermitiano. Então existem seqüências $\{\lambda_n\}_{n \in J} \subseteq \mathbb{R}$ e $\{e_n\}_{n \in J} \subseteq H$ onde ou $J = \{1, 2, \dots, m\}$ para algum $m \in \mathbb{N}$, ou $J = \mathbb{N}$, satisfazendo as seguintes propriedades:*

(1) $\{\lambda_n : n \in J\}$ é o conjunto de todos os autovalores de k diferentes de zero;

(2) $\{e_n\}_{n \in J}$ é ortonormal em H ;

(3) vale

$$\|k\| = |\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq |\lambda_3| \geq \dots;$$

(4) para cada $n \in J$, temos $e_n \in \mathcal{N}(\lambda_n, k)$;

(5) se $J = \mathbb{N}$, então $\lambda_n \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow +\infty$;

(6) se $x \in H$, então

$$k(x) = \sum_{n \in J} \lambda_n \langle x, e_n \rangle e_n; \quad e$$

(7) para cada $p \in \mathbb{N}$, a dimensão de $\mathcal{N}(\lambda_p, k)$ é igual ao número de vezes que λ_p se repete na seqüência $\{\lambda_n\}_{n \in J}$.

Demonstração. Sejam $H_1 \doteq H$ e $k_1 \doteq k$. Pelo Teorema 3.8 existe λ_1 autovalor de k_1 com $|\lambda_1| = \|k_1\|$. Tomo $e_1 \in \mathcal{N}(\lambda_1, k_1)$ com norma 1.

Sejam $H_2 \doteq [e_1]^\perp \subseteq H$ e $k_2 \doteq k_1|_{H_2}$. Temos $k_2 \in K(H_2)$ e k_2 é hermitiano. (Note que $k(H_2) \subseteq H_2$ da mesma forma como provamos (3) da Proposição 3.7, usando que e_1 é autovalor de k .) Assim, pelo Teorema 3.8 existe $\lambda_2 \in \mathbb{R}$ autovalor de k_2 e $|\lambda_2| = \|k_2\|$. Temos

$$|\lambda_2| = \|k_2\| = \|k_1|_{H_2}\| \leq \|k_1\| = |\lambda_1|.$$

Seja $e_2 \in \mathcal{N}(\lambda_2, k_2)$ com norma 1.

Por indução, continuo o processo de modo que $H_{N+1} \doteq [e_1, \dots, e_N]^\perp$, $k_{N+1} = k_N|_{H_N}$, etc. Teremos novamente $|\lambda_{N+1}| = \|k_{N+1}\| \leq |\lambda_N|$.

Suponha que existe m tal que $k_{m+1} = 0$ e suponha que esse m seja o menor natural para o qual isso acontece. Seja $x \in H$ e considere

$$x - \sum_{j=1}^m \langle x, e_j \rangle e_j \in [e_1, \dots, e_m]^\perp = H_{m+1}.$$

Logo (como $k_{m+1} = k|_{H_m} = 0$), temos

$$k \left(x - \sum_{j=1}^m \langle x, e_j \rangle e_j \right) = 0$$

e assim

$$k(x) = \sum_{j=1}^m \langle x, e_j \rangle k(e_j) = \sum_{j=1}^m \lambda_j \langle x, e_j \rangle e_j$$

para todo $x \in H$.

Suponha então que $k_n \neq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Obteremos então sequências infinitas $\{\lambda_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ e $\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$.

Suponha por absurdo que $\lambda_n \not\rightarrow 0$. Como $\{|\lambda_n|\}_n$ é decrescente, isso implica que existe $\varepsilon > 0$ tal que $|\lambda_n| \geq \varepsilon$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Logo se $x_n \doteq e_n/\lambda_n$, temos $\|x_n\| = 1/|\lambda_n| \leq 1/\varepsilon$ para todo $n \in \mathbb{N}$, isto é; $(x_n)_n$ é limitada. Como $k(x_n) = e_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, segue que $(k(x_n))_n$ não possui subsequência convergente, pois se $n, n' \in \mathbb{N}$, $n \neq n'$, temos

$$\|k(x_n) - k(x_{n'})\| = \|e_n - e_{n'}\| = \sqrt{2},$$

o que contradiz a compacidade de k . Portanto de fato $\lambda_n \rightarrow 0$.

Provemos (6): seja $x \in H$.

$$\begin{aligned} \left\| k(x) - \sum_{n=1}^N \lambda_n \langle x, e_n \rangle e_n \right\| &= \left\| k \left(x - \sum_{n=1}^N \langle x, e_n \rangle e_n \right) \right\| \\ &= \left\| k_{N+1} \left(x - \sum_{n=1}^N \langle x, e_n \rangle e_n \right) \right\| \\ &= \|k_{N+1}\| \left\| x - \sum_{n=1}^N \langle x, e_n \rangle e_n \right\| \\ &= |\lambda_{N+1}| \left\| x - \sum_{n=1}^N \langle x, e_n \rangle e_n \right\| \\ &\leq |\lambda_{N+1}| \cdot \|x\| \rightarrow 0 \end{aligned}$$

sendo que usamos o fato de que $x - \sum_{n=1}^N \langle x, e_n \rangle e_n \in H_{N+1}$. Dessa forma

$$k(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \langle x, e_n \rangle e_n.$$

Sejam $\lambda \neq 0$ autovalor de k e $x \neq 0$ autovetor de k associado a λ . Se $\lambda \neq \lambda_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, temos (Proposição 3.7) que $x \perp e_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. De (6) segue que $k(x) = 0$, absurdo.

Provemos (7); fixe $p \in \mathbb{N}$. Suponha que $\{n \in \mathbb{N} : \lambda_n = \lambda_p\} = \{n_1, \dots, n_q\}$. Assim $e_{n_1}, \dots, e_{n_q} \in \mathcal{N}(\lambda_p, k)$. Como esses vetores são linearmente independentes (e são finitos pois $\lambda_n \rightarrow 0$), temos que $\dim \mathcal{N}(\lambda_p, k) \geq q$. Suponha por absurdo $\dim \mathcal{N}(\lambda_p, k) > q$. Então existe $e \in \mathcal{N}(\lambda_p, k)$ ortonormal a $e_{n_1}, \dots, e_{n_q}$. Por (2) da Proposição 3.7 temos $e \perp e_n$ para todo $n \in J$, mas por (6) isso implica $\lambda e = k(e) = 0$, absurdo. $\square$

3.3 Consequências do Teorema Espectral

Corolário 3.10. Para todo $n \in J$,

$$|\lambda_n| = \sup \{ |\langle k(x), x \rangle| : \|x\| = 1 \text{ e } x \in [e_1, \dots, e_n]^\perp \}.$$

Corolário 3.11. Se H é pré-hilbertiano e $k \in K(H)$ é hermitiano, então k é limite em $L(H)$ de uma sequência de operadores de posto finito.

Demonstração. O operador k será limite dos operadores

$$k_N(x) \doteq \sum_{n=1}^N \lambda_n \langle x, e_n \rangle e_n,$$

pois um cálculo anterior mostra que $\|k_N - k\| \leq |\lambda_N| \rightarrow 0$. $\square$

Lema 3.12. Sejam H um espaço pré-hilbertiano e $A \in L(H)$. São equivalentes:

- (1) A é hermitiano; e
- (2) $\langle Ax, x \rangle \in \mathbb{R}$ para todo $x \in H$.

Demonstração. Exercício da lista 1. $\square$

Definição. Um operador $A \in L(H)$ é dito *positivo* se

$$\langle Ax, x \rangle \geq 0 \quad \text{para todo } x \in H.$$

Pelo Lema 3.12, todo operador positivo é hermitiano.

Notação. $A \geq 0$.

É fácil ver que todo autovalor de um operador positivo é não-negativo.

Corolário 3.13. *Seja $k \in K(H)$ hermitiano. Então $k \geq 0$ se, e somente se todo autovalor de k é não-negativo.*

Demonstração. ($\Leftarrow$): Se $\lambda_n \geq 0$ para todo $n \in J$,

$$\langle k(x), x \rangle = \left\langle \sum_{n \in J} \lambda_n \langle x, e_n \rangle e_n, x \right\rangle = \sum_{n \in J} \lambda_n |\langle x, e_n \rangle|^2 \geq 0$$

para todo $x \in H$. □

Corolário 3.14. *Sejam H um espaço de Hilbert e $k \in K(H)$, $k \geq 0$. Então existe $f \in K(H)$ tal que $f^2 = k$ e $f \geq 0$.*

Notação. $f = \sqrt{k}$.

Demonstração. Defina

$$f(x) \doteq \sum_{n \in J} \sqrt{\lambda_n} \langle x, e_n \rangle e_n$$

se $k(x) = \sum_{n \in J} \lambda_n \langle x, e_n \rangle e_n$. A série que define f é convergente usando o Critério de Cauchy e a Desigualdade de Bessel. É fácil ver que f satisfaz as propriedades necessárias. □

Corolário 3.15. *Sejam H um espaço de Hilbert, $k \in K(H)$ hermitiano. Então H possui uma base hilbertiana formada por autovetores de k .*

Demonstração. Temos $\ker k$ fechado em H , logo $\ker k$ é um espaço de Hilbert e portanto possui uma base hilbertiana. Seja $\{\tilde{e}_i\}_{i \in I}$ uma tal base. Então $\mathcal{B} \doteq \{\tilde{e}_i\}_{i \in I} \cup \{e_n\}_{n \in J}$ (em que $\{e_n\}_{n \in J}$ são dados pelo Teorema 3.9) será uma base hilbertiana para H . Provemos esse fato. Se $\overline{[\mathcal{B}]} \subsetneq H$, existe $x \neq 0$, $x \perp \mathcal{B}$, mas então por (6) do Teorema 3.9 temos $k(x) = 0$, logo $x \in \ker k = \overline{[\{\tilde{e}_i\}_{i \in I}]}$ $\subseteq \overline{[\mathcal{B}]}$, absurdo. □

Provaremos agora o seguinte Teorema:

Teorema 3.16. *Seja H um espaço de Hilbert, $A \in K(H)$. Então A é limite de operadores de posto finito.*

Provemos primeiramente o seguinte Lema:

Lema 3.17. *Seja H um espaço de Hilbert. Se $A \in K(H)$, então $A^* \in K(H)$.*

Demonstração. Seja $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência limitada de elementos de H . Temos $AA^* \in K(H)$ (pois $A \in K(H)$ e $A^* \in L(H)$), assim existe uma subsequência $\{x_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ tal que $\{AA^*x_{n_k}\}_k$ é convergente. Provaremos agora que $\{A^*x_{n_k}\}_k$ é uma sequência de Cauchy, o que termina a demonstração.

$$\begin{aligned}\|A^*x_{n_k} - A^*x_{n_p}\|^2 &= \langle A^*(x_{n_k} - x_{n_p}), A^*(x_{n_k} - x_{n_p}) \rangle \\ &= \langle x_{n_k} - x_{n_p}, AA^*(x_{n_k} - x_{n_p}) \rangle \\ &\leq \|x_{n_k} - x_{n_p}\| \cdot \|AA^*x_{n_k} - AA^*x_{n_p}\|\end{aligned}$$

o que termina a demonstração, pois $(x_{n_k})_k$ é limitada e $\{AA^*x_{n_k}\}_k$ é de Cauchy. $\square$

Demonstração do Teorema 3.16. Temos

$$A = \frac{A + A^*}{2} + i \frac{A - A^*}{2i} = A_1 + iA_2$$

com $A_1, A_2 \in K(H)$ pelo Lema 3.17, e é fácil ver que A_1, A_2 são também hermitianos. Pelo Teorema 3.9, todo operador compacto hermitiano é limite de operadores de posto finito, e assim $A = A_1 + iA_2$ também será limite de operadores de posto finito. $\square$

Fixe H um espaço de Hilbert, $\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ ortonormal em H e $\{\mu_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ sequência de números reais limitada. Defina

$$T(x) \doteq \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu_n \langle x, e_n \rangle e_n.$$

Lema 3.18. $T \in L(H)$, é hermitiano e

$$\|T\| \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} |\mu_n|.$$

Demonstração. Seja $M \doteq \sup_{n \in \mathbb{N}} |\mu_n|$. Se $F \subseteq \mathbb{N}$ é finito,

$$\begin{aligned}\left\| \sum_{n \in F} \mu_n \langle x, e_n \rangle e_n \right\|^2 &= \sum_{n \in F} \mu_n^2 |\langle x, e_n \rangle|^2 \leq M^2 \sum_{n \in F} |\langle x, e_n \rangle|^2 \\ &\leq M^2 \sum_{n \geq n_0} |\langle x, e_n \rangle|^2 < \infty\end{aligned}$$

para algum $n_0 \in \mathbb{N}$, sendo que a última série acima converge pela Desigualdade de Bessel. Segue também que

$$\|T(x)\|^2 \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} |\mu_n|^2 |\langle x, e_n \rangle|^2 \leq M^2 \|x\|^2$$

de modo que $\|T\| \leq M$. Além disso, T é hermitiano pois

$$\begin{aligned}\langle Tx, y \rangle &= \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu_n \langle x, e_n \rangle \langle e_n, y \rangle = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu_n \overline{\langle y, e_n \rangle} \langle e_n, x \rangle = \overline{\langle Ty, x \rangle} \\ &= \langle x, Ty \rangle.\end{aligned}\quad \square$$

Na mesma situação, seja $f : \{\mu_n : n \in \mathbb{N}\} \rightarrow \mathbb{C}$ uma função limitada. Definimos então

$$f(T)(x) = \sum_{n \in \mathbb{N}} f(\mu_n) \langle x, e_n \rangle e_n.$$

Temos $f(T) \in L(H)$ e

$$\|f(T)\| \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} |f(\mu_n)|$$

do mesmo modo como provamos o Lema 3.18 (exceto que agora $f(T)$ não é necessariamente hermitiano pois $f(\mu_n) \in \mathbb{C}$).

Se $g : \{\mu_n : n \in \mathbb{N}\} \rightarrow \mathbb{C}$ é também limitada, temos

$$(g \cdot f)(T) = g(T) \circ f(T).$$

De fato,

$$\begin{aligned}(g(T) \circ f(T))(x) &= g(T) \left(\sum_{n \in \mathbb{N}} f(\mu_n) \langle x, e_n \rangle e_n \right) \\ &= \sum_{m \in \mathbb{N}} g(\mu_m) \left\langle \sum_{n \in \mathbb{N}} f(\mu_n) \langle x, e_n \rangle e_n, e_m \right\rangle \\ &= \sum_{m \in \mathbb{N}} g(\mu_m) f(\mu_m) \langle x, e_m \rangle e_m \\ &= (gf)(T).\end{aligned}$$

Corolário 3.19. *Se $\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ é base hilbertiana de H (Hilbert), e μ não é ponto aderente da sequência $\{\mu_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, então $(\mu I - T)^{-1} \in L(H)$.*

Demonstração. Existe $a > 0$ tal que

$$|\mu - \mu_n| \geq a \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Defina $f(t) \doteq 1/(\mu - t)$ e $g(t) \doteq \mu - t$, para $t \in \mathbb{R}$. Então $f(t)g(t) = 1$ para todo $t \in \mathbb{R}$, de modo que

$$Id = (fg)(T) = f(T) \circ g(T) = f(T) \circ (\mu I - T)$$

e assim $(\mu I - T)^{-1} = f(T) \in L(H)$. $\square$

Corolário 3.20. *Sejam H um espaço de Hilbert e $k \in K(H)$ hermitiano, $\{\lambda_n\}_{n \in J}$ os autovalores não-nulos de k . Então se $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $\lambda \neq \lambda_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, então $(\lambda I - k)^{-1} \in L(H)$.*

Demonstração. Sejam $\{e_n\}_{n \in J}$ os autovetores ortonormais de k dados pelo Teorema 3.9 e seja $H_1 \doteq \overline{[e_n : n \in J]}$. Decompomos $H = \ker k \oplus H_1$, $\ker k \perp H_1$, e aplicamos o Corolário 3.19 ao espaço H_1 (em $\ker k$ o resultado é trivial; se $z \in \ker k$, temos $(\lambda I - k)^{-1}(z) = \lambda^{-1}z$). $\square$

Assim vemos que, se H é um espaço de Hilbert e $k \in K(H)$ é hermitiano, segue do Corolário 3.19 que

$$(\lambda I - k)^{-1}(x) = \frac{x}{\lambda} + \frac{1}{\lambda} \sum_{n \in J} \frac{\lambda_n}{\lambda - \lambda_n} \langle x, e_n \rangle e_n. \quad (6)$$

Note que podemos retirar a hipótese de ser H espaço completo se supusermos que a série acima é convergente (só usamos a completude do espaço para provar a *convergência* da série).

3.4 Aplicação

Seja $K = K(t, s) \in C([a, b] \times [a, b])$ com $K(t, s) = \overline{K(s, t)}$. Defina $A : C_{L^2}([a, b]) \rightarrow C_{L^2}([a, b])$ por

$$(Au)(t) \doteq \int_a^b K(t, s)u(s) \, ds, \quad u \in C([a, b]).$$

Temos, usando a Desigualdade de Cauchy-Schwarz,

$$\begin{aligned} |(Au)(t)| &\leq \left(\int_a^b |K(t, s)|^2 \, ds \right)^{1/2} \cdot \|u\|_2 \\ &\leq \sup_{t \in [a, b]} \left(\int_a^b |K(t, s)|^2 \, ds \right)^{1/2} < \infty \end{aligned}$$

se $\|u\|_2 \leq 1$. Logo

$$\begin{aligned} |(Au)(t) - (Au)(t')| &\leq \left(\int_a^b |K(t, s) - K(t', s)|^2 \, ds \right)^{1/2} \cdot \|u\|_2 \\ &\leq \left(\int_a^b |K(t, s) - K(t', s)|^2 \, ds \right)^{1/2} \end{aligned}$$

o que implica a equicontinuidade da família $\{Au : u \in C([a, b]), \|u\|_2 < 1\}$. Assim, pelo Teorema de Ascoli, A é um operador compacto. Além disso, A é hermitiano pois

$$\begin{aligned}\langle Au, v \rangle &= \int_a^b \left(\int_a^b K(t, s) u(s) \, ds \right) \overline{v(t)} \, dt \\ &= \int_a^b u(s) \overline{\left(\int_a^b K(st) v(t) \, ds \right)} \, dt \\ &= \langle u, Av \rangle.\end{aligned}$$

Temos

$$\begin{aligned}\int_a^b |Au(t)|^2 \, dt &\leq \int_a^b \int_a^b |K(t, s)|^2 \, ds \, dt \cdot \|u\|_2^2 \\ &\leq \|K\|_2^2 \|u\|_2^2\end{aligned}$$

logo

$$\|Au\|_2 \leq \|K\|_2 \cdot \|u\|_2 \quad \text{para todo } u \in C([a, b])$$

e assim $\|A\| \leq \|K\|_2$.

Equação integral: dada $f \in C([a, b])$, veremos que

$$\lambda u(t) - \int_a^b K(t, s) u(s) \, ds = f(t) \quad (7)$$

(isto é, $(\lambda I - A)u = f$) tem sempre solução única em $u \in C([a, b])$ se $\lambda \neq 0$ e λ não é autovalor de A . Em particular, isso ocorre se $|\lambda| > \|K\|_2 \geq \|A\| = |\lambda_1|$.

Lema 3.21. (*Na situação acima:*)

$$\sum_n \lambda_n^2 \leq \|K\|_2^2.$$

Demonstração. Sejam $\lambda_n \in \mathbb{R}$ e $e_n \in C([a, b])$ os autovalores e autovetores de A dados pelo Teorema 3.9. Usando a Desigualdade de Bessel, temos

$$\begin{aligned}\sum_{n \in J} \left| \int_a^b K(t, s) e_n(s) \, ds \right|^2 &= \sum_{n \in J} |\langle K(t, \cdot), \overline{e_n} \rangle|^2 \leq \|K(t, \cdot)\|_2^2 \\ &\leq \int_a^b |K(t, s)|^2 \, ds\end{aligned}$$

e por outro lado

$$\sum_{n \in J} \left| \int_a^b K(t, s) e_n(s) \, ds \right|^2 = \sum_{n \in J} |\lambda_n e_n(t)|^2.$$

Integrando com relação a t , temos

$$\sum_{n \in J} \lambda_n^2 = \sum_{n \in J} \int_a^b |\lambda_n e_n(t)|^2 \, dt \leq \int_a^b \int_a^b |K(t, s)|^2 \, ds \, dt \leq \|K\|_2^2 \quad \square$$

Corolário 3.22. (Nas condições acima), se λ é autovalor, temos

$$\dim \mathcal{N}(\lambda, A) \leq \frac{\|K\|_2^2}{\lambda^2}.$$

Demonstração. Pelo Teorema 3.9, a dimensão de $\mathcal{N}(\lambda, A)$ é igual ao número de vezes que λ se repete em $\{\lambda_n\}_n$, e por sua vez

$$\#\{n : \lambda_n = \lambda\} = \frac{\lambda^2 \#\{n : \lambda_n = \lambda\}}{\lambda^2} \leq \frac{1}{\lambda^2} \sum_n \lambda_n^2 \leq \frac{\|K\|_2^2}{\lambda^2} \quad \square$$

Se $\lambda \neq 0$, $\lambda \neq \lambda_n$ para todo $n \in J$, existe um único $u \in C([a, b])$ solução de (7), e segue de (6) que essa solução é dada por

$$u(t) = \frac{1}{\lambda} f(t) + \frac{1}{\lambda} \sum_{n \in J} \frac{\lambda_n}{\lambda - \lambda_n} \langle f, e_n \rangle e_n(t).$$

Precisamos provar que a série é convergente. Provaremos que a convergência é absoluta e uniforme. Seja $a > 0$ tal que

$$|\lambda - \lambda_n| \geq a \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Vimos no Lema 3.21 que

$$\sum_n \lambda_n |e_n(t)|^2 \leq \int_a^b |K(t, s)|^2 \, ds \leq M^2 \quad \text{para todo } t \in [a, b].$$

Se $F \subseteq \mathbb{N}$ é finito, usando a Desigualdade de Cauchy-Schwarz, temos

$$\begin{aligned} \left| \sum_{n \in F} \frac{\lambda_n}{\lambda - \lambda_n} \langle f, e_n \rangle e_n(t) \right| &\leq \frac{1}{a} \left(\sum_{n \in F} \lambda_n^2 |e_n(t)|^2 \right)^{1/2} \cdot \left(\sum_{n \in F} |\langle f, e_n \rangle|^2 \right)^{1/2} \\ &\leq \frac{M}{a} \left(\sum_{n \in F} |\langle f, e_n \rangle|^2 \right)^{1/2} \end{aligned}$$

sendo que a última soma é soma parcial de uma série convergente, pela Desigualdade de Bessel.

3.5 A Alternativa de Fredholm

Resolver, para y fixado, a equação

$$\lambda x - kx = y \quad (8)$$

com $\lambda \neq 0$, para $k \in K(H)$ hermitiano e H um espaço de Hilbert. Seja $\{\lambda_n\}_n$ a sequência dos autovalores não-nulos de k (como dado pelo Teorema 3.9).

Se $\lambda \neq \lambda_n$ para todo n , vimos que a equação (8) possui uma única solução para todo $y \in H$ (é o Corolário 3.20).

Suponha então que $\lambda = \lambda_m$ para algum $m \in J$. Suponha também que (8) possua alguma solução $x \in H$. Se $z \in \mathcal{N}(\lambda_m, k)$, temos

$$\begin{aligned} \langle y, z \rangle &= \langle \lambda_m x - kx, z \rangle = \lambda_m \langle x, z \rangle - \langle kx, z \rangle \\ &= \lambda_m \langle x, z \rangle - \langle x, kz \rangle = \lambda_m \langle x, z \rangle - \lambda_m \langle x, z \rangle \\ &= 0. \end{aligned}$$

Concluimos então que se (8) possui alguma solução, então $y \in \mathcal{N}(\lambda_m, k)^\perp$.

De fato, vale a volta: se $y \in \mathcal{N}(\lambda_m, k)^\perp \doteq H_m$, vimos (Proposição 3.7) que H_m é k -invariante. Consideremos então o operador

$$k_m \doteq k|_{H_m} : H_m \rightarrow H_m.$$

Temos H_m espaço de Hilbert, k_m é hermitiano e compacto, portanto podemos aplicar o caso anterior a k_m (pois λ_m não será mais autovalor de k_m) e assim obtemos uma única solução $x \in \mathcal{N}(\lambda_m, k)^\perp$ para todo $y \in \mathcal{N}(\lambda_m, k)^\perp$ dado.

3.6 Teoria de Riesz-Schauder

Lema 3.23. *Sejam E um espaço de normado e $k \in K(E)$. Se $\lambda \neq 0$, então $\lambda I - k$ tem imagem fechada.*

Demonstração. Dividindo por λ , podemos assumir que $\lambda = 1$. Seja $\{x_n\}_n \subseteq E$ tal que $(I - k)x_n \rightarrow y$ para algum $y \in E$.

Se $\{x_n\}_n$ é uma sequência limitada, ela possui subsequência $\{x_{n_k}\}_k$ tal que $kx_{n_k} \rightarrow z$ para algum $z \in E$, mas com $(I - k)x_n \rightarrow y$ segue que $x_{n_k} \rightarrow y + z$, e assim $y = (I - k)(y + z)$ pertence à imagem de $I - k$.

Se $\{x_n\}_n$ não é limitada, defina

$$\alpha_n \doteq d(x_n, \ker(I - k)) \quad \text{para cada } n \in \mathbb{N}.$$

Então para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $z_n \in \ker(I - k)$ tal que

$$\alpha_n \leq \|x - z_n\| \leq \alpha_n + \frac{1}{n}. \quad (9)$$

Assim

$$(I - k)(x_n + z_n) = (I - k)x_n \rightarrow y.$$

Se $\{\alpha_n\}_n$ for limitada, teremos $\{x_n - z_n\}_n$ limitada, e tudo corre como no caso anterior.

Suponha então que $\{\alpha_n\}_n$ não é limitada. Então essa sequência possui uma subsequência que converge para $+\infty$, assim podemos assumir que $\alpha_n \rightarrow +\infty$. Para $n \in \mathbb{N}$ tal que $\alpha_n \neq 0$, defina

$$w_n = \frac{x_n - z_n}{\|x_n - z_n\|}; \quad \|w_n\| = 1.$$

Temos

$$(I - k)w_n = \frac{(I - k)(x_n - z_n)}{\|x_n - z_n\|} = \frac{(I - k)(x_n)}{\|x_n - z_n\|} \rightarrow 0 \quad (10)$$

pois $(I - k)x_n \rightarrow y$, logo essa sequência é limitada, e $\|x_n - z_n\| \geq \alpha_n \rightarrow +\infty$. Passando a uma subsequência se necessário, podemos assumir que $kw_n \rightarrow v$. Por (10) temos que $w_n - kw_n \rightarrow 0$, logo $w_n \rightarrow v$, e $kw_n \rightarrow kv$ ao mesmo tempo em que $kw_n \rightarrow v$. Portanto $v = kv$ e $v \in \ker(I - k)$.

Temos

$$x_n - z_n - v\|x_n - z_n\| = (w_n - v)\|x_n - z_n\|$$

e $z_n + v\|x_n - z_n\| \in \ker(I - k)$, logo

$$\begin{aligned} \alpha_n &\leq \|x_n - z_n - v\|x_n - z_n\|\| = \|w_n - v\| \cdot \|x_n - z_n\| \\ &\leq \|w_n - v\| \left(\alpha_n + \frac{1}{n} \right), \end{aligned}$$

usando (9), e assim

$$\|w_n - v\| \geq \frac{\alpha_n}{\alpha_n + \frac{1}{n}} \rightarrow 1,$$

o que contradiz $w_n \rightarrow v$. □

Teorema 3.24. *Sejam E um espaço de Banach e $k \in K(E)$. Se $\lambda \neq 0$ não é um autovalor de k , então $\lambda I - k$ é inversível, e $(\lambda I - k)^{-1} \in L(E)$.*

Demonstração. Seja $F \doteq (\lambda I - k)(E)$. Pelo Lema 3.23, F é um espaço de Banach. Podemos considerar então $\lambda I - k : E \rightarrow F$ bijetora (é injetora pois λ não é autovalor). Pelo Teorema da Aplicação Aberta, $\lambda I - k$ é um isomorfismo de espaços normados (é linear, contínuo, com inverso contínuo). Basta então mostrar que $F = E$.

Suponha $F \neq E$. Sejam

$$F_0 \doteq E, \quad F_1 \doteq (\lambda I - k)F_0 = F, \quad F_2 \doteq (\lambda I - k)F_1 = (\lambda I - k)^2 F_0, \quad \dots$$

Temos

$$F_{n+1} \subseteq F_n \quad \text{para todo } n \geq 0.$$

Suponha que exista n_0 tal que $F_{n_0} = F_{n_0+1}$. Seja $y \in E$. Temos $(\lambda I - k)^{n_0} y = (\lambda I - k)^{n_0+1} x$ para algum $x \in E$. Como $\lambda I - k$ é injetor, segue que $y = (\lambda I - k)x \in F$, e assim $E = F$.

Suponha por absurdo que

$$F_{n+1} \subsetneq F_n \quad \text{para todo } n \geq 0.$$

Seja então $x_n \in F_n$ com $\|x_n\| = 1$ tal que $d(x_n, F_{n+1}) \geq 1/2$ (dado pelo Teorema 1.2), Sejam $n < m$. Temos

$$kx_n - kx_m = (\lambda I - k)x_m - (\lambda I - k)x_n + \lambda x_m - \lambda x_n.$$

Logo

$$\frac{1}{\lambda}(kx_n - kx_m) = x_n - x_m + \frac{1}{\lambda}(\lambda I - k)x_m - \frac{1}{\lambda}(\lambda I - k)x_n = x_n - z$$

temos $x_m \in F_m \subseteq F_{n+1}$ e $(\lambda I - k)x_m \in F_{m+1} \subseteq F_{n+1}$, logo $z \in F_{n+1}$. Portanto

$$\left\| \frac{1}{\lambda}(kx_n - kx_m) \right\| = \|x_n - z\| \geq d(x_n, F_{n+1}) \geq \frac{1}{2}$$

isto é;

$$\|kx_n - kx_m\| \geq \frac{|\lambda|}{2} > 0$$

para $n < m$ e assim $\{kx_n\}_n$ não possui subsequência convergente, o que contradiz a compacidade de k . $\square$

Teorema 3.25. *O conjunto dos autovalores de k é no máximo enumerável, tendo em 0 seu único possível ponto de acumulação (isto é, sempre que o conjunto é infinito, tem-se que 0 é ponto de acumulação). Além disso, para todo $\lambda \in \mathbb{C}^*$, o autoespaço $N(\lambda; k)$ tem sempre dimensão finita.*

Demonstração. Se B é a bola unitária fechada de E de centro 0, $N(\lambda, k) \cap B \subseteq k(\frac{1}{\lambda}B)$ (relativamente compacto) é a bola unitária do espaço $N(\lambda, k)$. Se $x \in N(\lambda, k) \cap B$, então $x = k(x/\lambda)$ e $\|x\| \leq 1$. Logo a bola unitária desse espaço é compacta (ela é fechada e está dentro de um relativamente compacto) e assim $\dim N(\lambda, k) < \infty$.

Seja σ o conjunto dos autovalores de k . Se $r > 0$, vamos mostrar que $\sigma \cap \{\lambda : |\lambda| \geq r\}$ é finito. Isso implica que σ é enumerável, e também que o único possível ponto de acumulação é 0. De fato, teremos

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} \left\{ \lambda : \frac{1}{n} \leq |\lambda| \leq \|k\| \right\} = \sigma \setminus \{0\}.$$

Suponha que existe $r > 0$ tal que $\sigma \cap \{\lambda : |\lambda| \geq r\}$ é infinito. Então existe $\{\lambda_n\}_n$ sequência de elementos distintos contida nesse conjunto. Para cada $n \in \mathbb{N}$, tomo $x_n \in N(\lambda_n, k)$, $x_n \neq 0$. Como os x_n estão associados a autovalores distintos, temos que $\{x_n\}_n$ é um conjunto linearmente independente (segue de Álgebra Linear). Defina $E_n \doteq [x_1, \dots, x_n]$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Note que $k(E_n) \subseteq E_n$ (pois é gerado por autovalores). Temos $E_n \subsetneq E_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e assim existe $y_n \in E_n$ com $\|y_n\| = 1$ e $d(y_n, E_{n-1}) \geq 1/2$ para todo $n \geq 2$.

Sejam $n > m$. Escreva

$$\frac{1}{\lambda_n}k(y_n) - \frac{1}{\lambda_n}k(y_m) = y_n - \left[y_n - \frac{1}{\lambda_n}k(y_n) \right] - \frac{1}{\lambda_n}k(y_m).$$

Note que se $y_n = \sum_{j=1}^n \beta_j x_j$, temos

$$y_n - \frac{1}{\lambda_n}k(y_n) = y_n - \sum_{j=1}^n \beta_j \frac{\lambda_j}{\lambda_n} x_j \in E_{n-1}.$$

Assim

$$\left[y_n - \frac{1}{\lambda_n}k(y_n) \right] - \frac{1}{\lambda_n}k(y_m) \in E_{n-1},$$

logo, como $d(y_n, E_{n-1}) \geq 1/2$, temos

$$\frac{1}{|\lambda_n|} \|k(y_n) - k(y_m)\| \geq \frac{1}{2}$$

e assim

$$\|k(y_n) - k(y_m)\| \geq \frac{r}{2}, \text{ para todos } n, m \in \mathbb{N},$$

absurdo, pois como k é compacto, $\{k(y_n)\}_n$ deveria ter uma subsequência convergente. $\square$

4 Produto tensorial de espaços de Hilbert

Observação. Esta seção foi escrita pelo prof. Dr. Paulo D. Cordaro, e somente reformatada por mim para manter o estilo do resto das notas.

Dados $\mathbb{C}$ -espaços vetoriais V_1, V_2 , denotaremos por $\bar{\mathcal{B}}(V_1, V_2)$ o espaço dos funcionais bi-antilineares sobre $V_1 \times V_2$. Assim $f \in \bar{\mathcal{B}}(V_1, V_2)$ se, e somente se, f é uma transformação definida sobre $V_1 \times V_2$ e a valores em $\mathbb{C}$ satisfazendo as seguintes propriedades:

$$\begin{aligned} f(\alpha x_1 + x'_1, x_2) &= \bar{\alpha} f(x_1, x_2) + f(x'_1, x_2), \text{ e} \\ f(x_1, \alpha x_2 + x'_2) &= \bar{\alpha} f(x_1, x_2) + f(x_1, x'_2), \end{aligned}$$

para todos $x_1, x'_1 \in V_1$, $x_2, x'_2 \in V_2$, $\alpha \in \mathbb{C}$. Com operações definidas ponto a ponto é fácil ver que $\bar{\mathcal{B}}(H_1, H_2)$ é um $\mathbb{C}$ -espaço vetorial.

Suponha agora que H_1 e H_2 são espaços de Hilbert. Dados $x_j \in H_j$, $j = 1, 2$, definimos $x_1 \otimes x_2 \in \bar{\mathcal{B}}(H_1, H_2)$ pela regra

$$(x_1 \otimes x_2)(y_1, y_2) = \langle x_1, y_1 \rangle \langle x_2, y_2 \rangle, \quad y_j \in H_j, j = 1, 2.$$

Denotaremos por $\mathcal{E}(H_1, H_2)$ o subespaço de $\bar{\mathcal{B}}(H_1, H_2)$ gerado pelos elementos da forma $x_1 \otimes x_2$, quando $x_j \in H_j$, $j = 1, 2$. Observando que

$$\begin{aligned} H_1 \times H_2 &\rightarrow \bar{\mathcal{B}}(H_1, H_2) \\ (x_1, x_2) &\mapsto x_1 \otimes x_2 \end{aligned}$$

é bilinear (e, portanto, $\alpha(x_1 \otimes x_2) = (\alpha x_1) \otimes x_2 = x_1 \otimes (\alpha x_2)$, $\alpha \in \mathbb{C}$), concluímos que todo elemento $\vartheta \in \mathcal{E}(H_1, H_2)$ se escreve, entretanto não de modo único, na forma $\vartheta = \sum_p x_{1p} \otimes x_{2p}$, com $x_{1p} \in H_1$, $x_{2p} \in H_2$ e a soma é finita. Se tomarmos também $\vartheta' = \sum_q x'_{1q} \otimes x'_{2q} \in \mathcal{E}(H_1, H_2)$ definimos

$$\langle \vartheta, \vartheta' \rangle = \sum_{p,q} \langle x_{1p}, x'_{1q} \rangle \langle x_{2p}, x'_{2q} \rangle \quad (11)$$

Proposição 4.1. *A função (11) está bem definida e induz sobre $\mathcal{E}(H_1, H_2)$ uma estrutura de espaço pré-hilbertiano.*

Demonstração. Devemos primeiramente mostrar que (11) independe das escolhas das representações de ϑ e ϑ' respectivamente. Para isto basta mostrar que se $\vartheta = \sum_p x_{1p} \otimes x_{2p} = 0 \in \mathcal{E}(H_1, H_2)$ então $\langle \vartheta, \vartheta' \rangle = 0$ para todos $\vartheta' \in \mathcal{E}(H_1, H_2)$. De fato, com a notação como acima,

$$\begin{aligned} \langle \vartheta, \vartheta' \rangle &= \sum_{p,q} \langle x_{1p}, x'_{1q} \rangle \langle x_{2p}, x'_{2q} \rangle \\ &= \sum_q \left\{ \sum_p (x_{1p} \otimes x_{2p})(x'_{1q}, x'_{2q}) \right\} \\ &= \sum_q \vartheta(x'_{1q}, x'_{2q}) = 0. \end{aligned}$$

É muito fácil mostrar que (11) é linear na primeira variável, anti-linear na segunda e que $\langle \vartheta, \vartheta' \rangle = \overline{\langle \vartheta', \vartheta \rangle}$, para todos $\vartheta, \vartheta' \in \mathcal{E}(H_1, H_2)$. Resta então mostrar que $\vartheta \mapsto \langle \vartheta, \vartheta \rangle$ é definida positiva. Escrevendo novamente, $\vartheta = \sum_{p \in A} x_{1p} \otimes x_{2p}$, tomamos $\{e_1, \dots, e_M\}$ (resp. $\{f_1, \dots, f_N\}$) base ortonormal de $[x_{1p} : p \in A]$ (resp. $[x_{2p} : p \in A]$). Podemos escrever

$$\vartheta = \sum_{j=1}^M \sum_{k=1}^N a_{jk} (e_j \otimes f_k)$$

e portanto

$$\begin{aligned}\langle \vartheta, \vartheta \rangle &= \sum_{j,j'=1}^M \sum_{k,k'=1}^N a_{jk} \bar{a}_{j'k'} \langle e_j, e_{j'} \rangle \langle f_k, f_{k'} \rangle \\ &= \sum_{j=1}^M \sum_{k=1}^N |a_{jk}|^2,\end{aligned}$$

o que demonstra o que queríamos. $\square$

Observação. Note que $\|x_1 \otimes x_2\| = \|x_1\| \|x_2\|$, $x_j \in H_j$, $j = 1, 2$.

Definição. Dados espaços de Hilbert H_1 e H_2 , o *produto tensorial de H_1 por H_2* é o espaço de Hilbert $H_1 \otimes H_2$ obtido pelo completamento do espaço pré-hilbertiano $\mathcal{E}(H_1, H_2)$.

Proposição 4.2. Se $\{e_i\}_{i \in I}$ (resp. $\{f_j\}_{j \in J}$) é base hilbertiana de H_1 (resp. H_2) então $\{e_i \otimes f_j\}_{(i,j) \in I \times J}$ é base hilbertiana de $H_1 \otimes H_2$.

Demonstração. Devemos mostrar que o espaço das combinações lineares (finitas) dos elementos $e_i \otimes f_j$ é denso em $H_1 \otimes H_2$ ou, equivalentemente, em $\mathcal{E}(H_1, H_2)$, uma vez que este último é denso em $H_1 \otimes H_2$. Assim será suficiente mostrar que dados $x_1 \otimes x_2 \in \mathcal{E}(H_1, H_2)$ e $\varepsilon > 0$ existe uma combinação linear ϑ dos elementos $e_i \otimes f_j$ tal que $\|x_1 \otimes x_2 - \vartheta\| \leq \varepsilon$. Podemos assumir $x_1 \otimes x_2 \neq 0$.

Por hipótese temos as representações

$$x_1 = \sum_{i \in I} a_i e_i, \quad x_2 = \sum_{j \in J} b_j f_j,$$

onde $\|x_1\|^2 = \sum_{i \in I} |a_i|^2$, $\|x_2\|^2 = \sum_{j \in J} |b_j|^2$. Logo existirão $A \subset I$, $B \subset J$ finitos tais que

$$\left\| x_1 - \sum_{i \in A} a_i e_i \right\| \leq \frac{\varepsilon}{2\|x_2\|}, \quad \left\| x_2 - \sum_{j \in B} b_j f_j \right\| \leq \frac{\varepsilon}{2\|x_1\|}.$$

Dado que

$$\begin{aligned}x_1 \otimes x_2 - \sum_{(i,j) \in A \times B} a_i b_j (e_i \otimes f_j) \\ = x_1 \otimes \left(x_2 - \sum_{j \in B} b_j f_j \right) + \left(x_1 - \sum_{i \in A} a_i e_i \right) \otimes \left(\sum_{j \in B} b_j f_j \right)\end{aligned}$$

a observação anterior implica

$$\begin{aligned}
& \left\| x_1 \otimes x_2 - \sum_{(i,j) \in A \times B} a_i b_j (e_i \otimes f_j) \right\| \\
& \leq \|x_1\| \cdot \left\| x_2 - \sum_{j \in B} b_j f_j \right\| + \left\| x_1 - \sum_{i \in A} a_i e_i \right\| \cdot \left\| \sum_{j \in B} b_j f_j \right\| \\
& \leq \|x_1\| \cdot \left\| x_2 - \sum_{j \in B} b_j f_j \right\| + \|x_2\| \cdot \left\| x_1 - \sum_{i \in A} a_i e_i \right\| \leq \varepsilon,
\end{aligned}$$

o que conclui a demonstração. $\square$

Sejam $(X, \mathcal{A}, \mu)$, $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ espaços de medida tais que os correspondentes espaços de Hilbert $L^2(X, \mathcal{A}, \mu)$, $L^2(Y, \mathcal{B}, \nu)$ são separáveis. Tomemos $\{\phi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, $\{\psi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ bases hilbertianas de $L^2(X, \mathcal{A}, \mu)$ e $L^2(Y, \mathcal{B}, \nu)$ respectivamente e definamos $f_{m,n}(x, y) = \phi_m(x)\psi_n(y)$, $(x, y) \in X \times Y$.

Proposição 4.3. *A família $\{f_{m,n}\}_{(m,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}}$ é base hilbertiana de $L^2(X \times Y, \mathcal{A} \times \mathcal{B}, \mu \times \nu)$.*

Demonstração. É fácil ver que $\{f_{m,n}\}_{(m,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}}$ é ortonormal em $L^2(X \times Y, \mathcal{A} \times \mathcal{B}, \mu \times \nu)$. Para concluir então a demonstração bastará verificar que $\{f_{m,n} : (m, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}\}^\perp = 0$. Seja então $F \in L^2(X \times Y, \mathcal{A} \times \mathcal{B}, \mu \times \nu)$ tal que

$$\int_{X \times Y} F(x, y) \overline{f_{m,n}(x, y)} d(\mu \times \nu)(x, y) = 0, \quad (m, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}.$$

Pelo teorema de Fubini-Tonelli,

$$\int_X \left\{ \int_Y F(x, y) \overline{\psi_n(y)} d\nu(y) \right\} \overline{\phi_m(x)} d\mu(x) = 0, \quad (m, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}.$$

Como $\{\phi_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ é base hilbertiana de $L^2(X, \mathcal{A}, \mu)$ para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $S_n \in \mathcal{A}$, com $\mu(S_n) = 0$, tal que

$$\int_Y F(x, y) \overline{\psi_n(y)} d\nu(y) = 0, \quad x \notin S_n.$$

Seja $S = \bigcup_n S_n$. Então $S \in \mathcal{A}$, $\mu(S) = 0$ e também

$$\int_Y F(x, y) \overline{\psi_n(y)} d\nu(y) = 0, \quad x \notin S, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Novamente, como agora $\{\psi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ é base hilbertiana de $L^2(Y, \mathcal{B}, \nu)$, para cada $x \notin S$ existe $R_x \in \mathcal{B}$, com $\nu(R_x) = 0$, tal que $F(x, y) = 0$ se $y \notin R_x$. Assim o conjunto dos pontos onde $F \neq 0$ está contido no conjunto

$$C = (S \times Y) \cup \{(x, y) \in X \times Y : x \notin S, y \in R_x\}.$$

Uma vez que $(\mu \times \nu)(S) = 0$ o resultado fica demonstrado. $\square$

Corolário 4.4. *O subespaço $\mathcal{F}$ de $L^2(X \times Y, \mathcal{A} \times \mathcal{B}, \mu \times \nu)$ gerado pelos elementos da forma $f(x)g(y)$, com $f \in L^2(X, \mathcal{A}, \mu)$, $g \in L^2(Y, \mathcal{B}, \nu)$ é denso em $L^2(X \times Y, \mathcal{A} \times \mathcal{B}, \mu \times \nu)$.*

Vemos então que existe um isomorfismo natural de espaços pré-hilbertianos

$$\mathcal{E}(L^2(X, \mathcal{A}, \mu), L^2(Y, \mathcal{B}, \nu)) \simeq \mathcal{F}$$

que leva $f \otimes g$ em $f(x)g(y)$ (conforme a observação anterior). Por densidade obtemos então um isomorfismo entre espaços de Hilbert

$$L^2(X, \mathcal{A}, \mu) \otimes L^2(Y, \mathcal{B}, \nu) \simeq L^2(X \times Y, \mathcal{A} \times \mathcal{B}, \mu \times \nu). \quad (12)$$

Sejam $(X, \mathcal{A}, \mu)$ um espaço de medida, H um espaço de Hilbert separável e considere o espaço de Hilbert $L^2(X, \mathcal{A}, \mu; H)$ como definido no exercício 9 da Lista 2. Fixados $f \in L^2(X, \mathcal{A}, \mu)$ e $v \in H$ vemos facilmente que $\tilde{f}_v : X \rightarrow H$ definida por $\tilde{f}_v(x) = f(x)v$ define um elemento $\tilde{f}_v \in L^2(X, \mathcal{A}, \mu; H)$ que satisfaz

$$\|\tilde{f}_v\| = \|f\| \|v\|.$$

Seja, então $\mathcal{G}$ o subespaço de $L^2(X, \mathcal{A}, \mu; H)$ gerado pelos elementos da forma $\tilde{f}_v$, com $f \in L^2(X, \mathcal{A}, \mu)$ e $v \in H$. Novamente é fácil então de ver que existe um isomorfismo de espaços pré-hilbertianos

$$\mathcal{E}(L^2(X, \mathcal{A}, \mu), H) \simeq \mathcal{G}$$

que associa a $f \otimes v$ o elemento $\tilde{f}_v$. Como, pelo exercício 9(iii) da lista 2, $\mathcal{G}$ é denso em $L^2(X, \mathcal{A}, \mu; H)$, obtemos um isomorfismo entre espaços de Hilbert

$$L^2(X, \mathcal{A}, \mu) \otimes H \simeq L^2(X, \mathcal{A}, \mu; H). \quad (13)$$

Concluimos obtendo a seguinte consequência de (12) e (13):

Corolário 4.5. *Se $(X, \mathcal{A}, \mu)$, $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ são espaços de medida tais que os correspondentes espaços de Hilbert $L^2(X, \mathcal{A}, \mu)$, $L^2(Y, \mathcal{B}, \nu)$ são separáveis então existe um isomorfismo*

$$L^2(X, \mathcal{A}, \mu; L^2(Y, \mathcal{B}, \nu)) \simeq L^2(X \times Y, \mathcal{A} \times \mathcal{B}, \mu \times \nu).$$

Definição. E, F normados, $T \in L(E, F)$ é uma *isometria* se

$$\|Tx\| = \|x\| \text{ para todo } x \in E.$$

Um *isomorfismo* (entre espaços normados) é uma isometria bijetora (note que toda isometria já é injetora).

Se E, F são pré-hilbertianos, toda isometria entre E e F preserva o produto interno (basta usar a Fórmula de Polarização do produto interno).

Se H_1, H_2 são espaços de Hilbert, um isomorfismo entre H_1 e H_2 denomina-se uma transformação *unitária*. Isto é, uma transformação unitária é uma aplicação $U \in L(H_1, H_2)$ tal que

$$\langle Ux, Uy \rangle = \langle x, y \rangle \text{ para todos } x, y \in H_1.$$

Note que se $U : H \rightarrow H$ é unitária, segue que $\langle x, U^*Uy \rangle = \langle x, y \rangle$ e assim temos que $\langle x, (U^*U - I)y \rangle = 0$. Portanto $U^*U = UU^* = I$.

Digressão (Completamento de espaços). E espaço normado. Temos uma injeção

$$\begin{aligned} E &\rightarrow E'' \\ x &\mapsto \hat{x} \end{aligned}$$

em que $\hat{x}(f) \doteq f(x)$. Temos

$$\|\hat{x}\| = \sup_{\|f\|=1} |f(x)| \leq \|x\|.$$

Como existe (por um exercício da lista 1; basta usar o Teorema de Hahn-Banach) $g \in E'$ com $\|g\| = 1$ e $|g(x)| = \|x\|$, segue que o sup acima é igual a $\|x\|$. Isto é; $\|\hat{x}\| = \|x\|$.

Definição. Um *completamento* de um espaço normado E é um espaço de Banach $\hat{E}$, junto com uma isometria $j : E \rightarrow \hat{E}$ com imagem densa em $\hat{E}$.

Se temos um outro completamento $j_1 : E_1 \rightarrow \hat{E}_1$ de E , temos que os completamentos $\hat{E}$ e $\hat{E}_1$ são isomorfos; basta tomar a isometria $j_1 \circ j^{-1} : j(E) \rightarrow j_1(E)$, e estendendo essa isometria a continuamente um isomorfismo entre $\hat{E}$ e $\hat{E}_1$.

Dado um espaço normado E qualquer, um completamento de E é dado por

$$\overline{\{\hat{x} : x \in E\}} \subseteq E''.$$

Se E é pré-hilbertiano, temos que $\overline{\{\hat{x} : x \in E\}}$ é um espaço de Hilbert, pois como a norma é a mesma de E , ela também satisfaz a regra do paralelogramo sendo assim também induzida por um produto interno. Como a

imagem de E será densa nesse completamento, a norma no completamento também satisfará a regra do paralelogramo (pois será limite de elementos da imagem de E).

Teorema 4.6 (von Neumann). H espaço de Hilbert, $U \in L(H)$ unitária. Seja $p : H \rightarrow H$ a projeção ortogonal sobre $N(1, U)$. Então

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} U^n x = p(x) \quad \text{para todo } x \in H.$$

(Note que $N(1, U) \neq \{0\}$ pois $\|U\| = 1$.)

Corolário 4.7. Seja $(X, \mathcal{B}, \mu)$ um espaço de medida, $S : X \rightarrow X$ bijeção satisfazendo:

- i) $S(B) \in \mathcal{B}$ para todo $B \in \mathcal{B}$; e
- ii) $\mu(S(B)) = \mu(B)$ para todo $B \in \mathcal{B}$.

Seja $T : L^2(X, \mathcal{B}, \mu) \rightarrow L^2(X, \mathcal{B}, \mu)$ dada por

$$T(f) \doteq f \circ S.$$

Note que

$$\|Tf\|_{L^2}^2 = \int_X |f(S(x))|^2 d\mu(x) = \int_X |f(x)|^2 d\mu(x) = \|f\|_{L^2}^2$$

isto é, T é um operador unitário em $L^2(X, \mathcal{B}, \mu)$. Então para toda $f \in L^2(X, \mathcal{B}, \mu)$, temos $f_0 \in L^2(X, \mathcal{B}, \mu)$ tal que

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f \circ S^n = f_0$$

e $f_0 \circ S = f_0$.

Observação. H Hilbert, $A \in L(H)$. Então

$$\ker A = (\operatorname{Im} A^*)^\perp.$$

(Segue diretamente de: se $x, y \in H$, temos $\langle Ax, y \rangle = \langle x, A^*y \rangle$, colocando $x \in \ker A$ ou $x \in (\operatorname{Im} A^*)^\perp$.) Portanto

$$(\ker A)^\perp = \overline{(\operatorname{Im} A^*)}.$$

Demonstração do Teorema 4.6. A demonstração é fácil, o “achado” do Teorema é o enunciado!

Temos (aplicando a fórmula anterior para a aplicação $A = I - U$)

$$(\ker(I - U^*))^\perp = \overline{(\operatorname{Im}(I - U))}.$$

Agora

$$\begin{aligned} x \in \ker(I - U^*) &\iff x = U^*x \iff Ux = UU^*x \\ &\iff Ux = x \iff x \in \ker(I - U). \end{aligned}$$

Dessa forma,

$$H = \overline{(\operatorname{Im}(I - U))} \oplus \ker(I - U).$$

Se $x \in H$, temos $x = x_1 + x_2$ com $x_1 \in \overline{\operatorname{Im}(I - U)}$ e $x_2 \in \ker(I - U)$. Logo

$$\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} U^n x = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} U^n x_1 + \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} U^n x_2$$

e concluiremos a demonstração quando provaremos que

$$\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} U^n x_1 \rightarrow 0 \quad \text{e} \quad \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} U^n x_2 \rightarrow x_2 = p(x).$$

De fato temos que $Ux_2 = x_2$, logo

$$\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} U^n x_2 = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x_2 = x_2.$$

Resta mostrar que

$$\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} U^n x \rightarrow 0 \quad \text{para todo } x \in \overline{\operatorname{Im}(I - U)}.$$

Suponha primeiramente que $x \in \operatorname{Im}(I - U)$, isto é; $x = y - Uy$ para algum $y \in H$. Então

$$U^n x = U^n y - U^{n+1} y$$

e então somando sobre n , temos

$$\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} U^n x = \frac{1}{N} \left\{ \sum_{n=0}^{N-1} U^n y - \sum_{n=1}^N U^n y \right\} = \frac{1}{N} (y - U^N y).$$

Assim

$$\left\| \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} U^n x \right\| \leq \frac{1}{N} \{ \|y\| + \|U^N y\| \} \leq \frac{1}{N} (1 + \|U^N\|) \|y\| \leq \frac{2}{N} \|y\| \rightarrow 0$$

sendo que $\|U^N\| = 1$ pois U^N também é isometria.

Em geral, se $x \in \overline{\text{Im}(I - U)}$ e se $\varepsilon > 0$, existe $x_0 \in \text{Im}(I - U)$ tal que $\|x - x_0\| \leq \varepsilon/2$. Tomando também N_0 tal que

$$\left\| \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} U^n x_0 \right\| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

(usando o caso anterior), temos

$$\begin{aligned} \left\| \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} U^n x \right\| &\leq \left\| \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} U^n x_0 \right\| + \left\| \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} U^n (x - x_0) \right\| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \|U^n (x - x_0)\| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \|x - x_0\| \\ &\leq \varepsilon. \end{aligned} \quad \square$$

5 Funções holomorfas a valores em espaços de Banach

E espaço de Banach. Se $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ é um aberto, denotamos por $\mathcal{O}(\Omega)$ o conjunto das funções $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ holomorfas.

Teorema 5.1. *Sejam $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ aberto e $f : \Omega \rightarrow E$. São equivalentes:*

- a) $\lambda \circ f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ é holomorfa para toda $\lambda \in E'$. Isto é; f é fracamente holomorfa.
- b) Para todo $z_0 \in \Omega$, existe o limite

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h}$$

(limite de elementos em E). Isto é; f é fortemente holomorfa.

Notação. $\mathcal{O}(\Omega, E)$ é o conjunto das funções $f : \Omega \rightarrow E$ que satisfazem as condições equivalentes do Teorema 5.1.

Demonstração do Teorema 5.1. b) $\Rightarrow$ a): Fácil (basta aplicar λ sobre o limite do item b).

a) $\Rightarrow$ b): fixemos $z_0 \in \Omega$. Vamos mostrar que

$$\lim_{h \rightarrow 0, h' \rightarrow 0} \left\{ \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} - \frac{f(z_0 + h') - f(z_0)}{h'} \right\} = 0,$$

e isto basta pois E é completo.

Tomo $r > 0$ tal que $\{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| \leq 2r\} \subseteq \Omega$. Vou mostrar que existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\left\| \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} - \frac{f(z_0 + h') - f(z_0)}{h'} \right\| \leq C|h - h'|$$

para todos $h, h' \in \mathbb{C}$ com $0 < |h|, |h'| \leq r$. Isto é, vamos mostrar que

$$A = \left\{ \frac{1}{h - h'} \left[\frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} - \frac{f(z_0 + h') - f(z_0)}{h'} \right] : 0 < |h|, |h'| \leq r \right\}$$

($h \neq h'$) é limitado em E .

Lembremos que (exercício da lista 1) um conjunto $A \subseteq E$ é limitado se, e somente se $\lambda(A)$ é limitado, para todo $\lambda \in E'$. Se A é limitado, trivialmente $\lambda(A)$ é limitado, para todo $\lambda \in E'$. Se $\lambda(A)$ é limitado para todo $\lambda \in E'$, defina

$$\hat{A} = \{\hat{x} \in E'' : x \in A\}.$$

Basta verificar que $\hat{A}$ é limitado (pois $\|x\| = \|\hat{x}\|$). Agora, para cada $\lambda \in E'$, existe C_λ tal que se $y \in \lambda(A)$ então $|y| \leq C_\lambda$. Assim

$$|\hat{x}(\lambda)| = |\lambda(x)| \leq C_\lambda$$

e pelo Princípio da Limitação Uniforme, segue que $\hat{A}$ é limitado.

Seja $\lambda \in E'$. Mostremos que $\lambda(A)$ é limitado. Basta mostrar que existe uma constante $C_\lambda > 0$ tal que

$$\frac{1}{|h - h'|} \left\{ \frac{(\lambda \circ f)(z_0 + h) - (\lambda \circ f)(z_0)}{h} - \frac{(\lambda \circ f)(z_0 + h') - (\lambda \circ f)(z_0)}{h'} \right\} \leq C_\lambda$$

para $h \neq h'$, $0 < |h|, |h'| \leq r$. Temos

$$(\lambda \circ f)(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|w - z_0| = 2r} \frac{(\lambda \circ f)(w)}{w - z} dw \quad \text{para todo } z, |z - z_0| < 2r.$$

Dessa forma

$$\begin{aligned} & \frac{1}{h} \{(\lambda \circ f)(z_0 + h) - (\lambda \circ f)(z_0)\} \\ &= \frac{1}{2\pi i h} \int_{|w-z_0|=2r} (\lambda \circ f)(w) \left\{ \frac{1}{w-z_0-h} - \frac{1}{w-z_0} \right\} dw \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|w-z_0|=2r} \frac{(\lambda \circ f)(w)}{(w-z_0-h)(w-z_0)} dw \end{aligned}$$

e analogamente

$$\begin{aligned} & \frac{1}{h'} \{(\lambda \circ f)(z_0 + h') - (\lambda \circ f)(z_0)\} \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|w-z_0|=2r} \frac{(\lambda \circ f)(w)}{(w-z_0-h')(w-z_0)} dw. \end{aligned}$$

Agora

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(w-z_0-h)(w-z_0)} - \frac{1}{(w-z_0-h')(w-z_0)} \\ &= \frac{1}{w-z_0} \frac{h-h'}{(w-z_0-h)(w-z_0-h')} \end{aligned}$$

e assim

$$\begin{aligned} & \frac{1}{h-h'} \left\{ \frac{(\lambda \circ f)(z_0 + h) - (\lambda \circ f)(z_0)}{h} - \frac{(\lambda \circ f)(z_0 + h') - (\lambda \circ f)(z_0)}{h'} \right\} \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|w-z_0|=2r} \frac{(\lambda \circ f)(w)}{(w-z_0)(w-z_0-h)(w-z_0-h')} dw. \end{aligned}$$

Estimando o valor absoluto temos (usando que $|w-z_0-h| \geq r$)

$$\dots \leq \frac{1}{2\pi} \sup_{|w-z_0|=2r} |(\lambda \circ f)(w)| \frac{1}{2r^3} 4\pi r = \frac{1}{r^2} \sup_{|w-z_0|=2r} |(\lambda \circ f)(w)| \doteq C_\lambda$$

lembrando que $\lambda \circ f$ é contínua, pois é holomorfa. □

Corolário 5.2. Se $f \in \mathcal{O}(\Omega, E)$, então $f \in C(\Omega, E)$.

Observação. Se $\sigma : [a, b] \rightarrow E$ definimos (se o limite existir)

$$\int_a^b \sigma(t) dt \doteq \lim_{\mathcal{P} \rightarrow 0} \sum_{j=1}^N \sigma(\bar{t}_j)(t_j - t_{j-1})$$

em que o limite é tomado sobre as partições $\mathcal{P}$ com diâmetro tendendo a 0 e $\bar{t}_j \in [t_{j-1}, t_j]$ são pontos arbitrários.

Se σ é contínua, a sua integral como definida acima existe pois E é completo. Temos também

$$\left\| \int_a^b \sigma(t) dt \right\| \leq \int_a^b \|\sigma(t)\| dt;$$

e se $\lambda \in E'$, vale

$$\lambda \left(\int_a^b \sigma(t) dt \right) = \int_a^b (\lambda \circ \sigma)(t) dt.$$

Aplicação: Seja $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ aberto, $f \in \mathcal{O}(\Omega, E)$. Se $\gamma : [a, b] \rightarrow \Omega$ é C^1 por partes, fica definida a integral

$$\int_{\gamma} f(z) dz \doteq \int_a^b f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt \in E.$$

Teorema 5.3. *Seja γ uma curva C^1 por partes, Jordan, de tal forma que a componente conexa limitada U_{γ} de $\mathbb{C} \setminus \{\gamma\}$ (em que $\{\gamma\}$ é o traço de γ) esteja contida em Ω . Então*

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0.$$

Demonstração. Seja $\lambda \in E'$. Temos

$$\lambda \left(\int_{\gamma} f(z) dz \right) = \int_{\gamma} (\lambda \circ f)(z) dz = 0$$

pois $\lambda \circ f$ é holomorfa. Isto é, provamos que $\int_{\gamma} f(z) dz$ é igual a 0, pois vale 0 em todo funcional de E' . $\square$

Corolário 5.4. *Com as mesmas hipóteses do Teorema anterior, se $z_0 \in U_{\gamma}$, temos*

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z - z_0} dz.$$

Demonstração. Basta tomar um círculo de raio $\varepsilon > 0$ contido em U_{γ} e integrar sobre o círculo. A integral acima sobre γ será igual àquela sobre círculo (pois isso vale compondo com toda função $\lambda \in E'$), e fazendo $\varepsilon \rightarrow 0$ obtemos o resultado. $\square$

Corolário 5.5. *Sejam $f \in \mathcal{O}(\Omega, E)$, $z_0 \in \Omega$, $r \doteq d(z_0, \partial\Omega)$. Para $|z - z_0| < r$, podemos expandir*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n$$

onde

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-z_0|=\rho} \frac{f(w)}{(w - z_0)^{n+1}} dw, \quad 0 < \rho < r$$

com convergência uniforme em qualquer disco $\{|z - z_0| \leq r'\}$ com $0 < r' < r$.
Segue daí que $f^{(k)} \in \mathcal{O}(\Omega, E)$, para todo $k \geq 1$, e

$$a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Demonstração. Segue como no caso clássico de funções a valores em $\mathbb{C}$. $\square$

Teorema 5.6 (Liouville). *Se $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C}, E)$ e existe $M > 0$ tal que $\|f(z)\| \leq M$ para todo $z \in \mathbb{C}$, então f é constante.*

Demonstração. Considero a expansão de f em torno de 0:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n$$

e para todos $\rho > 0$, $n \geq 0$,

$$f^{(n)}(0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{|w|=\rho} \frac{f(w)}{w^{n+1}} dw.$$

Majorando então pelo módulo, temos

$$\|f^{(n)}(0)\| \leq \frac{n!M}{\rho^n} \rightarrow 0$$

quando $\rho \rightarrow +\infty$, se $n \geq 1$. Portanto $f(z) = f(0)$ para todo $z \in \mathbb{C}$. $\square$

6 Álgebras de Banach

Definição. Uma $\mathbb{C}$ -álgebra é um $\mathbb{C}$ -espaço vetorial A , munido de um produto $(x, y) \mapsto xy$ satisfazendo as seguintes condições:

- $(xy)z = x(yz)$ para todos $x, y, z \in A$;
- $(x + y)z = xz + yz$ para todos $x, y, z \in A$;

- $x(y + z) = xy + xz$ para todos $x, y, z \in A$;
- $\lambda(xy) = (\lambda x)y = x(\lambda y)$ para todos $\lambda \in \mathbb{C}$ e $x, y \in A$.

Uma $\mathbb{C}$ -álgebra é uma $\mathbb{C}$ -álgebra normada se A for um $\mathbb{C}$ -espaço vetorial normado, com norma $\|\cdot\|$ tal que

$$\|xy\| \leq \|x\| \cdot \|y\| \quad \text{para todos } x, y \in A.$$

Observação. Se A é uma $\mathbb{C}$ -álgebra normada, temos que a operação produto de $A \times A$ em A é contínua; se $x_n \rightarrow x$ e $y_n \rightarrow y$, temos

$$\begin{aligned} \|x_n y_n - xy\| &= \|(x_n - x)y_n - x(y_n - y)\| \leq \|(x_n - x)y_n\| + \|x(y_n - y)\| \\ &\leq \|x_n - x\| \cdot \|y_n\| + \|x\| \cdot \|y_n - y\| \end{aligned}$$

Definição. Uma *álgebra de Banach* é uma $\mathbb{C}$ -álgebra normada completa na qual existe $e \in A$ (unidade) tal que

$$xe = ex = x \quad \text{para todo } x \in A$$

e $\|e\| = 1$.

Note que nem todos os autores definem álgebras de Banach como tendo unidade.

Observação. Suponha que A_0 seja uma $\mathbb{C}$ -álgebra normada completa sem unidade. Seja $A \doteq A_0 \oplus \mathbb{C}$ e defina

$$(x, \alpha) \cdot (y, \beta) = (xy + \alpha y + \beta x, \alpha\beta), \quad \text{para todos } x, y \in A_0, \alpha, \beta \in \mathbb{C}.$$

Defina também

$$\|(x, \alpha)\| \doteq \|x\| + |\alpha|, \quad \text{para todos } x \in A_0, \alpha \in \mathbb{C}.$$

Então A será uma $\mathbb{C}$ -álgebra normada completa (verifique) e terá unidade $e \doteq (0, 1)$. Além disso, A_0 está incluída em A , pela aplicação $x \mapsto (x, 0)$.

Dada uma $\mathbb{C}$ -álgebra, uma $\mathbb{C}$ -subálgebra é um subespaço vetorial fechado pelo produto. (Se a álgebra tem a unidade, toda subálgebra também deverá ter a unidade.)

Se A é uma álgebra de Banach, e $B \subseteq A$ é uma subálgebra fechada, então B é uma álgebra de Banach.

Exemplo. Se K é um compacto Hausdorff e $A \doteq C(K)$, então A , com o produto ponto-a-ponto de funções, é uma $\mathbb{C}$ -álgebra de Banach.

Em particular, se $K \doteq \{1, 2, \dots, N\}$, temos $C(K) = \mathbb{C}^N$ álgebra de Banach com o produto coordenada-a-coordenada e a norma $\|\cdot\|_\infty$. Em particular $\mathbb{C}$ é uma álgebra de Banach.

Exemplo. Sejam $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ aberto limitado e $A \doteq \mathcal{O}(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ o conjunto das funções holomorfas em Ω que possuem extensão contínua a $\overline{\Omega}$, é uma álgebra de Banach com a norma do sup.

Se $\Omega \doteq \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$, A é chamada a “álgebra do disco”.

Exemplo. Se E é um espaço de Banach, $L(E)$ é uma álgebra de Banach, sendo que o produto é a composição e a unidade é a aplicação identidade.

Observação. Se A é uma álgebra de Banach e $x \in A$, podemos definir

$$\begin{aligned} M_x : A &\rightarrow A \\ y &\rightarrow xy. \end{aligned}$$

Temos

$$\|M_x(y)\| = \|xy\| \leq \|x\| \cdot \|y\|,$$

logo $\|M_x\| \leq \|x\|$, mas também $\|M_x(e)\| = \|x\|$, logo $\|M_x\| = \|x\|$.

Assim, pela aplicação

$$\begin{aligned} A &\hookrightarrow L(A) \\ x &\mapsto M_x \end{aligned}$$

podemos identificar isometricamente A com uma subálgebra fechada (topologicamente) de $L(A)$. (É fechada pois A é completo.)

Dessa forma, toda álgebra é uma subálgebra de algum $L(E)$, para algum E espaço de Banach.

Exemplo. Seja $A \doteq L^1(\mathbb{R}^N)$. Se $f, g \in L^1(\mathbb{R}^N)$, defina o produto de convolução

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^N} f(x - y)g(y) \, dy.$$

De fato $f * g \in L^1(\mathbb{R}^N)$, pois

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} \left| \int_{\mathbb{R}^N} f(x - y)g(y) \, dy \right| dx &\leq \int_{\mathbb{R}^N} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |f(x - y)g(y)| \, dy \right) dx \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^N} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |f(x - y)g(y)| \, dx \right) dy \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^N} |g(y)| \left(\int_{\mathbb{R}^N} |f(x - y)| \, dx \right) dy \\ &\leq \|f\|_1 \|g\|_1. \end{aligned}$$

Assim provamos também que

$$\|f * g\| \leq \|f\|_1 \|g\|_1.$$

Temos que $A = L^1(\mathbb{R}^N)$ é uma $\mathbb{C}$ -álgebra normada comutativa ($f * g = g * f$), completa, mas não tem unidade!

Definição. Seja A uma álgebra de Banach. Um $x \in A$ é dito *invertível* se existe um elemento $x^{-1} \in A$, chamado o *inverso* de x , tal que

$$xx^{-1} = x^{-1}x = e.$$

Temos que o inverso de x é único.

Notação. $G(A)$ é o conjunto dos elementos invertíveis de A ; é o grupo das unidades de A como anel.

Proposição 6.1. *Seja A uma álgebra de Banach.*

(1) *Se $x \in A$ e $\|x\| < 1$, então $e + x \in G(A)$.*

(2) *Se $x \in A$ e $\|x\| < 1$, então*

$$\|(e - x)^{-1} - e - x\| \leq \frac{\|x\|^2}{1 - \|x\|}.$$

(3) *Se $x \in G(A)$, e se $h \in A$ e $\|h\| \leq 1/2\|x^{-1}\|$, então $x + h \in G(A)$ (o que implica que $G(A)$ é aberto; a bola centrada em x com raio $1/2\|x^{-1}\|$ está contida em $G(A)$). Além disso,*

$$\|(x + h)^{-1} - x^{-1} + x^{-1}hx^{-1}\| \leq 2\|x^{-1}\|^3\|h\|^2$$

(logo “tomar o inverso” é uma função contínua, somando e subtraindo de $(x + h)^{-1} - x^{-1}$ o elemento $x^{-1}hx^{-1}$ e majorando).

Demonstração. (1): Seja $S_N \doteq e + x + \cdots + x^N$. Temos

$$\|S_{N+1} - S_N\| = \|x^{N+1}\| \leq \|x\|^{N+1}$$

e $\sum_{N=0}^{\infty} \|x\|^N < \infty$, logo $\sum_{N=0}^{\infty} \|S_{N+1} - S_N\| < \infty$ e assim S_N é convergente (A é de Banach). Seja $z = \lim S_N (= \sum_{n=0}^{\infty} x^n)$. Agora,

$$(e - x)S_N = S_N - (x + x^2 + \cdots + x^{N+1}) = e - x^{N+1}.$$

Fazendo $N \rightarrow +\infty$, obtemos

$$(e - x)z = e,$$

e analogamente temos $z(e - x) = e$.

(2): Temos

$$\|z - e - x\| \leq \sum_{n=2}^{\infty} \|x\|^n = \frac{\|x\|^2}{1 - \|x\|}$$

(pois $\|x\| < 1$; é a série geométrica).

(3): Temos $x+h = x(e+x^{-1}h) \in G(A)$, pois $x \in G(A)$ e $e+x^{-1}h \in G(A)$ pelo item (1) e

$$\|x^{-1}h\| \leq \|x^{-1}\| \cdot \|h\| \leq \frac{1}{2}.$$

Finalmente, usando o item (2),

$$\begin{aligned} \|(x+h)^{-1} - x^{-1}x^{-1}hx^{-1}\| &= \|(e+x^{-1}h) - e+x^{-1}h\|x^{-1}\| \\ &\leq \frac{\|x^{-1}h\|^2}{1-\|x^{-1}h\|}\|x^{-1}\| \\ &\leq 2\|x^{-1}\|^3\|h\|^2 \end{aligned}$$

usando $\|x^{-1}h\| \leq \|x^{-1}\|\|h\| \leq 1/2$ para minorar o denominador □

Corolário 6.2. $G(A)$ é aberto e $x \mapsto x^{-1}$ é um homeomorfismo de $G(A)$ sobre $G(A)$.

Definição. Seja A uma álgebra de Banach e $\phi : A \rightarrow \mathbb{C}$ linear. Dizemos que ϕ é um *homomorfismo* (complexo) se $\phi \neq 0$ e

$$\phi(xy) = \phi(x)\phi(y), \quad \text{para todos } x, y \in A.$$

Se ϕ é um homomorfismo, então $\phi(e) = 1$, e $\phi(x) \neq 0$ se $x \in G(A)$.

Corolário 6.3. Se ϕ é um homomorfismo, então $\phi \in A'$. Mais precisamente,

$$|\phi(x)| \leq 1 \quad \text{se} \quad \|x\| \leq 1.$$

Demonstração. Seja $\lambda \in \mathbb{C}$, $|\lambda| > 1$. Se $\|x\| \leq 1$, então $\|x/\lambda\| < 1$, logo $e - x/\lambda \in G(A)$ e assim $\phi(e - x/\lambda) \neq 0$, isto é; $1 - \frac{1}{\lambda}\phi(x) \neq 0$. Isto é, $\phi(x) \neq \lambda$. □

Definição. Dado $x \in A$, defino o *espectro* de x como sendo

$$\sigma(x) \doteq \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda e - x \notin G(A)\}.$$

Exemplo. No caso em que $A = L(E)$ com E um $\mathbb{C}$ -espaço vetorial de dimensão finita, dado $T \in A$ temos

$$\sigma(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda I - T \text{ não é inversível}\}$$

isto é;

$$\sigma(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \ker(\lambda I - T) \neq (0)\} = \{\lambda \in \mathbb{C} : \det(\lambda I - T) = 0\},$$

logo $\sigma(T)$ é o conjunto das raízes do polinômio característico de T , e assim $\sigma(T)$ é finito e não-vazio. (Note que é essencial que o espaço seja sobre $\mathbb{C}$, para que as raízes do polinômio existam todas.)

Notação. O raio espectral de x :

$$\rho(x) \doteq \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(x)\}.$$

Teorema 6.4. *Se A é uma álgebra de Banach e $x \in A$, valem:*

1) $\sigma(x)$ é compacto e não-vazio; e

2) $\rho(x)$ é dado por

$$\rho(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \|x^n\|^{1/n} = \inf_{n \geq 1} \|x^n\|^{1/n}.$$

Demonstração. 1) Se $\lambda \in \mathbb{C}$ e $|\lambda| > \|x\|$, então $\lambda e - x = \lambda(e - \frac{x}{\lambda})$, e $\|x/\lambda\| < 1$, de modo que $e - \frac{x}{\lambda} \in G(A)$, mas como $\lambda \neq 0$, segue que $\lambda e - x \in G(A)$. Portanto $\lambda \notin \sigma(x)$, isto é; $\sigma(x) \subseteq \{\lambda : |\lambda| \leq \|x\|\}$. Isto é, $\sigma(x)$ é um conjunto limitado.

Por outro lado, definindo

$$\begin{aligned} f : \mathbb{C} &\rightarrow A \\ \lambda &\mapsto \lambda e - x, \end{aligned}$$

temos que a função f é contínua, de modo que $f^{-1}(G(A)) = \mathbb{C} \setminus \sigma(x)$ é aberto, isto é; $\sigma(x)$ é fechado.

Seja

$$\begin{aligned} g : \mathbb{C} \setminus \sigma(x) &\rightarrow A \\ \lambda &\mapsto (\lambda e - x)^{-1}. \end{aligned}$$

Provemos que $g \in \mathcal{O}(\mathbb{C} \setminus \sigma(x); A)$. Sejam $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \sigma(x)$ e $h \in \mathbb{C}$ com $|h| \leq 1/2\|(\lambda e - x)^{-1}\|$. Pela Proposição 6.1, temos

$$\|g(\lambda + h) - g(\lambda) + h(\lambda e - x)^{-2}\| \leq 2\|(\lambda e - x)^{-1}\|^3|h|^2$$

Dividindo por h , temos

$$\left\| \frac{g(\lambda + h) - g(\lambda)}{h} + g(\lambda)^2 \right\| \leq 2\|f(\lambda)\|^3|h| \rightarrow 0.$$

Portanto $g'(\lambda) = -g(\lambda)^2 \neq 0$.

Se $|\lambda| > \|x\|$, temos

$$g(\lambda) = \frac{1}{\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{\lambda^n}.$$

Logo

$$\|g(\lambda)\| \leq \frac{1}{|\lambda|} \frac{1}{1 - \frac{\|x\|}{|\lambda|}} = \frac{1}{|\lambda| - \|x\|}.$$

Se $|\lambda| \geq 2\|x\|$, segue que

$$\|g(\lambda)\| \leq \frac{1}{\|x\|}$$

e g é limitada.

Se $\sigma(x) = \emptyset$, teríamos $g \in \mathcal{O}(\mathbb{C}; A)$ e, pelo Teorema de Liouville, g seria constante, absurdo, pois vimos que a derivada é não-nula.

2) Seja $r > \rho(x)$. Temos

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda|=r} \lambda^n g(\lambda) d\lambda = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda|=R} \lambda^n g(\lambda) d\lambda$$

em que tomamos $R > \|x\|$ (podemos trocar o raio pois g é holomorfa em um aberto contendo o $r \leq |\lambda| \leq R$, e usamos a fórmula de Cauchy). Nesse caso, podemos usar a expansão em série de $g(\lambda)$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda|=r} \lambda^n g(\lambda) d\lambda &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda|=R} \lambda^n g(\lambda) d\lambda \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda|=R} \left(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^m}{\lambda^{m-n+1}} \right) d\lambda \\ &= \frac{1}{2\pi i} \sum_{m=0}^{\infty} x^m \int_{|\lambda|=R} \frac{1}{\lambda^{m-n+1}} d\lambda \\ &= x^n \end{aligned}$$

(variando o m na soma, a integral só é diferente de zero quando $m = n$). Dessa forma,

$$\begin{aligned} \|x^n\| &= \left\| \frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda|=r} \lambda^n g(\lambda) d\lambda \right\| \\ &\leq (M(r)r)r^n \end{aligned}$$

em que $M(r) \doteq \max_{|\lambda|=r} \|g(\lambda)\|$. Logo

$$\|x^n\|^{1/n} \leq (M(r)r)^{1/n} r$$

e fazendo $n \rightarrow +\infty$, temos

$$\limsup \|x^n\|^{1/n} \leq r \quad \text{para todo } r > \rho(x),$$

de modo que

$$\limsup \|x^n\|^{1/n} \leq \rho(x).$$

Provaremos momentaneamente que se $\lambda \in \sigma(x)$, então $\lambda^n \in \sigma(\lambda^n)$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Seguirá então que $|\lambda|^n = |\lambda^n| \leq \|x\|$. Portanto

$$|\lambda| \leq \|x^n\|^{1/n}, \quad \text{para todos } n \in \mathbb{N}, \lambda \in \sigma(x).$$

Tomando o supremo dos $\lambda \in \sigma(x)$, temos

$$\rho(x) \leq \inf_{n \geq 1} \|x^n\|^{1/n} \leq \liminf \|x^n\|^{1/n} \leq \limsup \|x^n\|^{1/n} \leq \rho(x),$$

isto é;

$$\rho(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \|x^n\|^{1/n}.$$

Provemos então que se $\lambda \in \sigma(x)$, então $\lambda^n \in \sigma(\lambda^n)$. Temos

$$\begin{aligned} \lambda^n e - x^n &= (\lambda e - x)(\lambda^{n-1}e + \lambda^{n-2}x + \cdots + x^{n-1}) \\ &= (\lambda^{n-1}e + \lambda^{n-2}x + \cdots + x^{n-1})(\lambda e - x). \end{aligned}$$

Dessa forma, se $\lambda^n e - x^n \in G(A)$, segue que $\lambda e - x \in G(A)$, pois se $y = (\lambda^n e - x^n)^{-1}$, teremos $(\lambda^{n-1}e + \lambda^{n-2}x + \cdots + x^{n-1})y = (\lambda e - x)^{-1}$. $\square$

Corolário 6.5 (Teorema de Gelfand-Mazur). *Seja A uma álgebra de Banach tal que $G(A) = A \setminus \{0\}$. Então A é isometricamente isomorfo a $\mathbb{C}$.*

Demonstração. Seja $x \in A$. Tome $\lambda \in \sigma(x)$. Então $\lambda e - x \notin G(A)$, e assim $x = \lambda e$. $\square$

Lema 6.6. *Seja A uma álgebra de Banach. Sejam $x \in \partial G(A)$ e $x_n \in G(A)$ tais que $x_n \rightarrow x$. Então $\|x_n^{-1}\| \rightarrow \infty$.*

Demonstração. Suponha que não valha $\|x_n^{-1}\| \rightarrow \infty$. Então x_n^{-1} possui uma subsequência limitada; existem $C > 0$ e infinitos $n \in \mathbb{N}$ tais que

$$\|x_n^{-1}\| \leq C.$$

Assim existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\|x_{n_0}^{-1}\| \leq C$ e $\|x_{n_0} - x\| < 1/C$. Logo

$$\|e - x_{n_0}^{-1}x\| = \|x_{n_0}^{-1}(x_{n_0} - x)\| \leq \|x_{n_0}^{-1}\|\|x_{n_0} - x\| < 1.$$

Portanto $x_{n_0}^{-1}x = e - (e - x_{n_0}^{-1}x) \in G(A)$, o que implica $x \in G(A)$, absurdo. $\square$

Corolário 6.7. *Seja A uma álgebra de Banach e suponha que exista $M > 0$ tal que*

$$\|x\|\|y\| \leq M\|xy\| \quad \text{para todos } x, y \in A.$$

Então A é (isometricamente isomorfo a) $\mathbb{C}$.

Demonstração. Seja $y \in \partial G(A)$. Existe uma sequência de vetores $x_n \in G(A)$ tal que $x_n \rightarrow y$. Então

$$\|x_n\|\|x_n^{-1}\| \leq M\|x_n x_n^{-1}\| = M.$$

Como $\|x_n^{-1}\| \rightarrow +\infty$, segue que $\|x_n\| \rightarrow 0$, isto é, $y = 0$.

Se $x \in A$, tomando $\lambda \in \partial\sigma(x)$, existe $\lambda_n \in \mathbb{C} \setminus \sigma(x)$ tal que $\lambda_n \rightarrow \lambda$. Assim $\lambda_n e - x \rightarrow \lambda e - x \in \partial G(A)$ (pois $\lambda_n e - x \in G(A)$). Portanto $\lambda e = x$. $\square$

Teorema 6.8. *Seja A uma álgebra de Banach. Sejam $x \in A$ e $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ aberto tal que $\sigma(x) \subseteq \Omega$. Então existe $\delta > 0$ tal que, se $y \in A$, $\|y\| < \delta$, então $\sigma(x + y) \subseteq \Omega$. (“Continuidade” do espectro em relação a x .)*

Demonstração. Seja

$$\begin{aligned} h : \mathbb{C} \setminus \sigma(x) &\rightarrow \mathbb{R} \\ \lambda &\mapsto \|(\lambda e - x)^{-1}\|. \end{aligned}$$

Se $|\lambda| > \|x\|$, vimos que

$$h(\lambda) \leq \frac{1}{|\lambda| - \|x\|} \rightarrow 0$$

quando $\lambda \rightarrow +\infty$. Assim, a função $h|_{\mathbb{C} \setminus \Omega}$ é limitada (pois h é contínua, Ω é aberto e h tende a 0 no infinito). Portanto existe $\delta > 0$ tal que $h(\lambda) \leq 1/\delta$ para todo $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \Omega$.

Se $\|y\| < \delta$ e se $\lambda \notin \Omega$,

$$\lambda e - (x + y) = (\lambda e - x)(e - (\lambda e - x)^{-1}y) = (\lambda e - x)(e - z)$$

se $z \doteq (\lambda e - x)^{-1}y$. Temos $\|z\| \leq h(\lambda)\|y\| < 1$, de modo que $e - z \in G(A)$. Como $\lambda e - x \in G(A)$, segue que $\lambda e - (x + y) \in G(A)$, isto é; $\lambda \notin \sigma(x + y)$. $\square$

6.1 Álgebras de Banach comutativas

Seja A uma álgebra de Banach comutativa.

Definição. Um conjunto $J \subseteq A$ é um *ideal* de A se J é um $\mathbb{C}$ -subespaço vetorial de A satisfazendo:

$$\text{se } x \in A, \text{ e } y \in J, \text{ então } xy \in J.$$

Temos que

- J é um *ideal próprio* se $J \neq A$.
- J é um *ideal maximal* se J é um ideal próprio de A e satisfaz a seguinte condição de maximalidade:

$$\text{se } J' \subseteq A \text{ é um ideal próprio, e } J \subseteq J', \text{ então } J = J'.$$

Observação. (i) Se J é um ideal maximal, então $J \cap G(A) = \emptyset$.

(ii) Se J é um ideal, então seu fecho, $\overline{J}$, também é um ideal.

Proposição 6.9. *Seja A uma álgebra de Banach comutativa.*

(1) *Todo ideal próprio de A está contido em um ideal maximal.*

(2) *Todo ideal maximal é fechado.*

Demonstração. (1) Seja $J \subseteq A$ um ideal próprio. Seja

$$\mathcal{F} \doteq \{M : M \text{ é ideal próprio de } A \text{ e } J \subseteq M\}.$$

A família $\mathcal{F}$ é parcialmente ordenada pela inclusão. Seja $\mathcal{F}_0 \subseteq \mathcal{F}$ totalmente ordenado. Então

$$N \doteq \bigcup_{M \in \mathcal{F}_0} M$$

é um ideal, e N é um ideal próprio, dado que $e \notin M$ para todo $M \in \mathcal{F}$. Assim $N \in \mathcal{F}$ e $M \subseteq N$ para todo $M \in \mathcal{F}_0$. Pelo Lema de Zorn, segue que $\mathcal{F}$ tem um elemento maximal, se será um ideal maximal de A que contém J .

(2) Se $J \subseteq A$ é um ideal maximal, temos que $J \subseteq A \setminus G(A)$. Como $G(A)$ é aberto, segue que $\overline{J} \subseteq A \setminus G(A)$ e assim $\overline{J}$ é um ideal próprio. Portanto $\overline{J} = J$. $\square$

Exemplo. Sejam A, B álgebras de Banach comutativas e $T : A \rightarrow B$ linear. T é um *homomorfismo de álgebras* se

$$T(xy) = T(x)T(y) \quad \text{para todos } x, y \in A.$$

Nesse caso $\ker T$ é um ideal de A , que é fechado quando T é contínuo.

Em particular, se $\phi : A \rightarrow \mathbb{C}$ é um homomorfismo complexo sobre A , então $\ker \phi$ será um ideal *maximal* de A (pois a codimensão de $\ker \phi$ será 1, logo não existe $\mathbb{C}$ -subespaço próprio de A que contém propriamente $\ker \phi$).

Digressão. Sejam E um espaço de Banach e F um subespaço *fechado* de E . Definimos o *espaço quociente* E/F como sendo o quociente de E pela relação de equivalência

$$x_1 \sim x_2 \iff x_1 - x_2 \in F.$$

Denotamos por $[x]$ a classe de equivalência de x . Escrevendo $\dot{x} \doteq x + F$, definimos em E/F a norma

$$\|\dot{x}\| = \inf_{x \in \dot{x}} \|x\| = \inf_{y \in F} \|x + y\|.$$

Com essa norma, E/F será um espaço de Banach (exercício).

Temos a projeção canônica

$$\begin{aligned} \pi : E &\rightarrow E/F \\ x &\mapsto \pi(x) = \dot{x}, \end{aligned}$$

que é contínua, dado que $\|\dot{x}\| \leq \|x\|$.

Sejam agora A uma álgebra de Banach comutativa e $J \subseteq A$ um ideal fechado próprio de A . Temos então que A/J é um espaço de Banach. Podemos colocar, sobre esse espaço, uma estrutura de álgebra de Banach comutativa: para $\dot{x}, \dot{y} \in A/J$, definimos $\dot{x}\dot{y} \doteq \widehat{x\dot{y}}$. De fato, se $x, y, x', y' \in A$ e $x - x' \in J$ e $y - y' \in J$, temos

$$xy - x'y' = xy - x'y + x'y - x'y' = (x - x')y + x'(y - y') \in J$$

pois J é um ideal. Dessa forma, $\widehat{x\dot{y}} = \widehat{x'y'}$, e o produto está bem-definido.

Se $x, y \in A$, então

$$\|\dot{x}\dot{y}\| = \inf_{z \in J} \|xy + z\| \leq \inf_{z_1, z_2 \in J} \|xy - xz_2 - yz_1 + z_1z_2\|$$

dado que se $z_1, z_2 \in J$, temos $xz_2 + yz_1 - z_1z_2 \in J$. Portanto

$$\|\dot{x}\dot{y}\| \leq \inf_{z_1, z_2 \in J} \|(x - z_1)(y - z_2)\| \leq \inf_{z_1, z_2 \in J} \|x - z_1\| \|y - z_2\| \leq \|\dot{x}\| \|\dot{y}\|.$$

A identidade de A/J é $\dot{e}$, e

$$\|\dot{e}\| = \inf\{\|e + y\| : y \in J\} \leq \|e\| = 1.$$

Como $\|\dot{x}\dot{y}\| \leq \|\dot{x}\| \|\dot{y}\|$, colocando $\dot{x} = \dot{y} = \dot{e}$, segue que $\|\dot{e}\| = 1$.

Teorema 6.10. *Se J é maximal, então $A/J = \mathbb{C}$.*

Demonstração. Vamos usar o Teorema de Gelfand-Mazur, de modo que basta mostrar que $G(A/J) = (A/J) \setminus \{0\}$.

Se $x \notin J$, seja

$$M \doteq \{ax + y : a \in A, y \in J\}.$$

Então M é um ideal, e $J \subsetneq M$ (pois $x \in M \setminus J$). Como J é maximal, segue então que $M = A$. Assim $e \in M$, e existem $a_0 \in A$ e $y_0 \in J$, de modo que $e = a_0x + y_0$. Logo $e = a_0x$, e assim $G(A/J) = (A/J) \setminus \{0\}$. $\square$

Notação. $\Delta = \Delta_A$ o conjunto dos homomorfismos complexos de A .

Teorema 6.11. *Seja A uma álgebra de Banach comutativa.*

- (1) *Se $\phi \in \Delta$, então $\ker \phi$ é um ideal maximal.*
- (2) *Se J é um ideal maximal, então existe $\phi \in \Delta$ tal que $\ker \phi = J$.*
- (3) *Temos*

$$G(A) = \{x \in A : \phi(x) \neq 0 \text{ para todo } \phi \in \Delta\}.$$

Assim, temos uma bijeção

$$\begin{aligned} \Delta &\rightarrow \{\text{ideais maximais de } A\} \\ \phi &\mapsto \ker \phi. \end{aligned}$$

Demonstração. (1): Já vimos.

(2): Seja J um ideal maximal de A . Considere a projeção

$$\begin{aligned} \phi : A &\rightarrow A/J (\simeq \mathbb{C}) \\ x &\mapsto \dot{x} \end{aligned}$$

Como $A/J \simeq \mathbb{C}$ pelo Teorema anterior, temos que ϕ é de fato um homomorfismo complexo, e $\ker \phi = J$.

(3): Se $x \in G(A)$, então dado $\phi \in \Delta$, temos

$$1 = \phi(e) = \phi(xx^{-1}) = \phi(x)\phi(x^{-1})$$

e assim $\phi(x) \neq 0$.

Suponha agora que $x \notin G(A)$. Então $J \doteq \{ax : a \in A\}$ é um ideal próprio de A (pois $e \notin J$). Portanto existe um ideal maximal M que contém J , e assim existe $\phi \in \Delta$ tal que $\ker \phi = M$. Mas $x \in M = \ker \phi$ e assim $\phi(x) = 0$. $\square$

6.2 Aplicações

Teorema 6.12 (Lema de Wiener). *Seja*

$$f(x) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} a_m e^{imx}$$

com $\sum_{m \in \mathbb{Z}} |a_m| < \infty$ (a série de f converge absolutamente). Suponha que $f(x) \neq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Então

$$\frac{1}{f(x)} = \sum_{m \in \mathbb{Z}} b_m e^{imx}$$

com $\sum_{m \in \mathbb{Z}} |b_m| < \infty$.

Demonstração. Considere

$$A \doteq \left\{ f \in C(\mathbb{R}) : f(x) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} a_m e^{imx}, \quad \sum_{m \in \mathbb{Z}} |a_m| < \infty \right\}$$

com a norma

$$\|f\| \doteq \sum_{m \in \mathbb{Z}} |a_m|.$$

Então, como espaço de Banach, $A \simeq l_1(\mathbb{Z})$.

Temos que A é uma álgebra de Banach comutativa, com o produto ponto-a-ponto de funções; dadas $f(x) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} a_m e^{imx}$ e $g(x) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} c_m e^{imx}$ em A , temos

$$f(x) \cdot g(x) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} d_m e^{imx}, \quad \text{onde} \quad d_m = \sum_{j \in \mathbb{Z}} a_j c_{m-j}.$$

Vendo como seqüências em $l_1(\mathbb{Z})$, temos

$$(a_m)_{m \in \mathbb{Z}} \cdot (b_m)_{m \in \mathbb{Z}} = (d_m)_{m \in \mathbb{Z}}.$$

Nesses termos, a tese do Teorema é:

$$\text{se } f(x) \neq 0 \text{ para todo } x \in \mathbb{R}, \text{ então } f \in G(A).$$

Usando o Teorema anterior, basta mostrar que $\phi(f) \neq 0$ para todo $\phi \in \Delta$.

Como é o conjunto Δ dos homomorfismos de A em $\mathbb{C}$?

Para $x \in \mathbb{R}$, defina $\delta_x \in \Delta$ por

$$\delta_x(g) \doteq g(x).$$

Vamos mostrar que $\Delta = \{\delta_x : x \in \mathbb{R}\}$.

Seja $\phi \in \Delta$. Como ϕ é homomorfismo complexo, temos $\|\phi\| \leq 1$. Assim,

$$|\phi(e^{ix})| \leq \|e^{ix}\| = 1 \quad \text{e} \quad |\phi(e^{-ix})| \leq \|e^{-ix}\| = 1.$$

Como também

$$1 = |\phi(1)| = |\phi(e^{ix})\phi(e^{-ix})| = |\phi(e^{ix})| \cdot |\phi(e^{-ix})|,$$

segue que $|\phi(e^{ix})| = 1$. Assim existe $\theta \in \mathbb{R}$ tal que $\phi(e^{ix}) = e^{i\theta}$. Portanto $\phi(e^{imx}) = \phi(e^{ix})^m = e^{im\theta}$, e assim se $g(x) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} a_m e^{imx}$, temos

$$\phi(g) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} a_m e^{im\theta} = g(\theta),$$

de modo que $g = \delta_\theta$. □

Sejam $D \doteq \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ e $A \doteq C(\overline{D} \cap \mathcal{O}(D))$.

Lema 6.13. *O conjunto*

$$\{P(z) : |z| \leq 1, \text{ e } P \text{ é polinômio holomorfo}\},$$

dos polinômios com coeficientes complexos restritos a D , é denso em A .

Teorema 6.14. *Seja $f_1, \dots, f_n \in A$ tais que, para todo $z \in \overline{D}$, existe $j \in \{1, \dots, n\}$ tais que $f_j(z) \neq 0$. Então existem $\phi_1, \dots, \phi_n \in A$ tais que*

$$\phi_1 f_1 + \phi_2 f_2 + \dots + \phi_n f_n = 1.$$

Essa é uma “versão pobre” do seguinte Teorema (que não demonstraremos):

Teorema 6.15 (Carleson, 1962). *Sejam $f_1, \dots, f_n \in \mathcal{O}_\infty(D)$ tais que existe $\delta > 0$ satisfazendo*

$$\sum_{j=1}^n |f_j(z)| \geq \delta, \quad \text{para todo } z \in D.$$

Então existem $\phi_1, \dots, \phi_n \in \mathcal{O}_\infty(D)$ tais que

$$\phi_1 f_1 + \phi_2 f_2 + \dots + \phi_n f_n = 1.$$

Voltemos à demonstração do Teorema 6.14:

Demonstração do Teorema 6.14. Suponha que a conclusão seja falsa. Seja

$$J \doteq \{g_1 f_1 + \cdots + g_n f_n : g_j \in A, j = 1, \dots, n\}$$

o ideal de A gerado por $f_1, \dots, f_n$. Se a conclusão do Teorema for falsa, então $1 \notin J$, e assim J é um ideal próprio de A . Logo J está contido em um ideal maximal, e usando o Teorema 6.11 vemos que existe $h \in \Delta_A$ tal que $h|_J = 0$.

Seja $\mu \in A$ dado por $\mu(z) = z$. Temos $\|\mu\| = 1$. Então

$$|h(\mu)| \leq \|\mu\| = 1$$

isto é; $w \doteq h(\mu) \in \overline{D}$. Logo $h(\mu^m) = w^m$, o que implica que $h(P) = P(w)$ para todo $P(z) \in \mathbb{C}[z]$. Pelo Lema 6.13, temos que $h(g) = g(w)$ para todo $g \in A$. Em particular, $h(f_j) = f_j(w)$, mas como $h|_J = 0$, segue que $0 = h(f_j) = f_j(w)$ para todo $j \in \{1, \dots, n\}$, o que contradiz a hipótese do Teorema. $\square$

Precisamos ainda demonstrar o Lema usado:

Demonstração do Lema 6.13. Seja $f \in C(\overline{D}) \cap \mathcal{O}(D)$. Para $r < 1$, defino $f_r(z) \doteq f(rz)$ (definida se $|z| < 1/r$). Seja $\varepsilon > 0$. Da continuidade uniforme de $f_r(z)$ em $\{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$, vemos que existe $r_0 \in]0, 1[$ tal que

$$|f(r_0 z) - f(z)| \leq \frac{\varepsilon}{2}, \quad \text{para todo } z \text{ com } |z| \leq 1. \quad (14)$$

Agora desenvolvo f_{r_0} em série de Talyor em torno de $z = 0$. Esta série converge uniformemente para f_{r_0} em $|z| \leq 1$. Truncando a Série de Taylor, obtemos um polinômio que aproxima f_{r_0} e, por (14), temos que esse polinômio aproxima f . $\square$

7 Topologia fraca

7.1 Nets

Definição. Um *conjunto dirigido* I é um conjunto parcialmente ordenado, com ordem $\preceq$ tal que

para todos $\alpha, \beta \in I$, existe $\gamma \in I$ tal que $\alpha \preceq \gamma$, e $\beta \preceq \gamma$.

Exemplos. i) $\mathbb{N}$.

ii) X espaço topológico, $x \in X$ fixado, e

$$I \doteq \{V : V \text{ é vizinhança de } x \text{ em } X\}.$$

Definição. Um *net* em um conjunto S é uma função $g : I \rightarrow S$, onde I é um conjunto dirigido.

Notação. Para $g(\alpha) = s_\alpha$, escrevemos $g = (s_\alpha)_{\alpha \in I}$.

Definição. Sejam X um espaço topológico, $(x_\alpha)_{\alpha \in I}$ um net em X . Dizemos que $(x_\alpha)_{\alpha \in I}$ converge para $x \in X$ se para toda vizinhança V de x em X , existe $\alpha \in I$ tal que $x_\beta \in V$ para todo $\beta \in I$ com $\alpha \preceq \beta$.

Exemplo. Seja $X \doteq [0, 1]$ com a topologia

$$\tau \doteq \{Y \subseteq X : Y = \emptyset \text{ ou } X \setminus Y \text{ é no máximo enumerável}\}.$$

Se $A = [0, 1[$, temos $1 \in \overline{A}$. Por outro lado, se $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq A$, e $\Omega \doteq [0, 1] \setminus \{x_n\}_n \subseteq [0, 1]$, temos que $1 \in \Omega$, e também Ω é aberto e $x_n \notin \Omega$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Teorema 7.1. *Sejam X um espaço topológico, $A \subseteq X$. Então $x \in \overline{A}$ se, e somente se existe $(x_\alpha)_{\alpha \in I}$ net tal que $x_\alpha \in A$ para todo $\alpha \in I$, e $x_\alpha \rightarrow x$.*

Demonstração. $(\Leftarrow)$: Se $x_\alpha \in A$, $x_\alpha \rightarrow x$, seja V vizinhança de x em X . Existe $\alpha \in I$ tal que $x_\beta \in V$ para todo $\beta \in I$ tal que $\alpha \preceq \beta$. Em particular $x_\alpha \in V \cap A$. Logo $x \in \overline{A}$.

$(\Rightarrow)$: Dada V vizinhança de x em X , tome $x_V \in V \cap A$. Seja

$$I \doteq \{V : V \text{ é vizinhança de } x \text{ em } X\}.$$

Então $(x_V)_{V \in I}$ é um net de elementos de A . Se W é vizinhança de x e se $V \subseteq W$, então $x_V \in V \subseteq W$, de modo que $x_V \rightarrow x$. $\square$

Teorema 7.2. a) *Seja X um espaço topológico Hausdorff. Se $(x_\alpha)_{\alpha \in I}$ é net em X , e $x_\alpha \rightarrow x$ ao mesmo tempo em que $x_\alpha \rightarrow y$, então $x = y$.*

b) *Se X, Y são espaços topológicos e $f : X \rightarrow Y$, dado $x \in X$, temos que f é contínua em x se, e somente se, dado um net $(x_\alpha)_\alpha$ que converge para x , então $f(x_\alpha) \rightarrow f(x)$.*

7.2 Topologia inicial

Sejam X um conjunto não-vazio qualquer, e

$$\mathcal{F} \doteq \{f : X \rightarrow Y_f : Y_f \text{ é espaço topológico}\}.$$

Quero colocar uma topologia sobre X que seja a menos fina possível tal que toda função de $\mathcal{F}$ é contínua. Defino essa topologia, $\tau_{\mathcal{F}}$, como sendo a topologia com base $\bigcap_{i \in F} f_i^{-1}(V_i)$, com $f_i \in \mathcal{F}$, $V_i \subseteq Y_{f_i}$ e F finito.

Se $Y = Y_f$ para todo $f \in \mathcal{F}$, se Y é Hausdorff e se

para todos $x_1, x_2 \in X$, existe $f \in \mathcal{F}$ tal que $f(x_1) \neq f(x_2)$,

então $\tau_{\mathcal{F}}$ é também Hausdorff.

Exemplo (a topologia produto). Seja $(X_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$ uma família de espaços topológicos. Considere

$$\prod_{\alpha \in \Lambda} X_\alpha \doteq \{(x_\alpha)_{\alpha \in \Lambda} : x_\alpha \in X_\alpha\},$$

e sejam $p_\beta : \prod_{\alpha \in \Lambda} X_\alpha \rightarrow X_\beta$ as projeções;

$$p_\beta(x_\alpha)_{\alpha \in \Lambda} = x_\beta.$$

Então a topologia produto sobre $\prod_{\alpha \in \Lambda} X_\alpha$ é a topologia $\tau_{\mathcal{F}}$, gerada por $\mathcal{F} \doteq \{p_\alpha : \alpha \in \Lambda\}$.

Teorema 7.3 (Tychonoff). *O produto $\prod_{\alpha \in \Lambda} X_\alpha$ é compacto se, e somente se X_α é compacto para todo $\alpha \in \Lambda$.*

7.3 Topologia fraca no dual de um espaço de Banach

Seja E um espaço de Banach, e seja

$$\mathcal{F} \doteq \{T_x : E' \rightarrow \mathbb{C} : x \in E\}$$

em que, para todo $x \in E$,

$$T_x(f) \doteq f(x), \quad \text{para todo } f \in E'.$$

Tomo $\tau_{\mathcal{F}}$ a topologia em E' menos fina que torna todas as aplicações T_x , para $x \in E$, contínuas. A topologia $\tau_{\mathcal{F}} \doteq \sigma(E', E)$ é chamada a *topologia fraca-** em E' .

Propriedades:

- 1) A topologia $\sigma(E', E)$ é Hausdorff.
- 2) $\sigma(E', E)$ é menos fina do que a topologia da norma. (Provaremos logo que ela é estritamente menos fina no caso em que E tem dimensão infinita, pois a bola unitária será compacta.)
- 3) As aplicações soma e produto por um escalar

$$+ : E' \times E' \rightarrow E' \quad \text{e} \quad \cdot : \mathbb{C} \times E' \rightarrow E'$$

são contínuas com relação à topologia $\sigma(E', E)$.

- 4) Um sistema fundamental de vizinhanças da origem em E' é dada pelos conjuntos

$$\begin{aligned} \bigcap_{x_1, \dots, x_n \in E} T_{x_i}^{-1}(\{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| < \varepsilon\}) \\ = \{f \in E' : |f(x_i)| < \varepsilon \text{ para todo } i = 1, 2, \dots, n\} \\ \doteq \mathcal{N}(x_1, \dots, x_n; \varepsilon). \end{aligned}$$

Note que isso dá um sistema fundamental de vizinhanças em qualquer ponto, pela translação dos conjuntos na origem para os outros pontos de E' .

- 5) Um net $(f_\alpha)_{\alpha \in I}$ em E' converge para f em $\sigma(E', E)$ se, e somente se $f_\alpha(x) \rightarrow f(x)$, para todo $x \in E$.

Demonstração de 5). ($\Rightarrow$): Sejam $\varepsilon > 0$ e $x \in E$. Existe $\alpha \in I$ tal que $f_\beta - f \in \mathcal{N}(x, \varepsilon)$, para todo $\beta \in I$ tal que $\alpha \preceq \beta$. Isto é;

$$|f_\beta(x) - f(x)| < \varepsilon \quad \text{para todo } \beta \in I \text{ tal que } \alpha \preceq \beta.$$

Logo $f_\alpha(x) \rightarrow f(x)$.

($\Leftarrow$): Suponha $f_\alpha(x) - f(x) \rightarrow 0$ para todo $x \in E$. Precisamos provar que $f_\alpha - f \rightarrow 0$ em $\sigma(E', E)$. Sejam $\varepsilon > 0$ e $x_1, \dots, x_n \in E$. Para cada $j \in \{1, \dots, n\}$, existe $\alpha_j \in I$ tal que

$$|f_\beta(x_j) - f(x_j)| < \varepsilon \quad \text{para todo } \beta \in I \text{ tal que } \alpha_j \preceq \beta.$$

Tomo então α_* tal que $\alpha_j \preceq \alpha_*$ para todo $j \in \{1, \dots, n\}$.

Se $\beta \in I$ é tal que $\alpha_* \preceq \beta$, temos então

$$|f_\beta(x_j) - f(x_j)| < \varepsilon \quad \text{para todo } j = 1, 2, \dots, n.$$

Isto é; $f_\beta - f \in \mathcal{N}(x_1, \dots, x_n; \varepsilon)$ se $\alpha_* \preceq \beta$. □

Teorema 7.4 (Alaoglu-Bourbaki). *O conjunto*

$$B_0 \doteq \{f \in E' : \|f\| \leq 1\}$$

é compacto na topologia $\sigma(E', E)$.

Demonstração. Para cada $x \in E$, defino

$$D_x \doteq \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leq \|x\|\}.$$

Temos que D_x é um compacto de $\mathbb{C}$, o que implica que

$$\prod_{x \in E} D_x$$

é compacto com a topologia produto (pelo Teorema de Tychonoff). Um elemento de $\prod_{x \in E} D_x$ é uma função $b : E \rightarrow \mathbb{C}$ tal que $|b(x)| \leq \|x\|$ para todo $x \in E$, e a topologia produto é a topologia menos fina em $\prod_{x \in E} D_x$ que torna as aplicações projeção

$$\begin{aligned} \prod_{x \in E} D_x &\rightarrow D_x \\ b &\mapsto b(x) \end{aligned}$$

contínuas. (Note que essas projeções são extensões das funções T_x .)

Podemos também escrever B_0 como

$$B_0 = \{f : E \rightarrow \mathbb{C} : f \text{ é linear, e } |f(x)| \leq \|x\|, \text{ para todo } x \in E\},$$

pois então $B_0 \subseteq \prod_{x \in E} D_x$, e a topologia produto coincide com $\sigma(E', E)$ em B_0 . Para provar que B_0 é compacto na topologia $\sigma(E', E)$, basta mostrar então que B_0 é fechado em $\prod_{x \in E} D_x$. Isto é, temos que mostrar que se $(f_\alpha)_{\alpha \in I}$ é um net em B_0 , e $f_\alpha \rightarrow f$ pontualmente, então $f \in B_0$.

Se $x \in E$, temos

$$|f_\alpha(x)| \leq \|x\|, \quad \text{para todo } \alpha \in I$$

mas como $f_\alpha(x) \rightarrow f(x)$, segue que (pois a bola unitária D_x é fechada, logo o limite do net estará dentro de D_x)

$$|f(x)| \leq \|x\| \quad \text{para todo } x \in E.$$

Resta provar que f é linear. De fato, se $x, y \in E$ e $\lambda \in \mathbb{C}$, temos

$$f_\alpha(\lambda x + y) = \lambda f_\alpha(x) + f_\alpha(y).$$

Usando a continuidade da soma e do produto, segue que

$$f(\lambda x + y) = \lambda f(x) + f(y). \quad \square$$

8 Álgebras de Banach comutativas

Definição. Seja A uma álgebra de Banach comutativa. Definimos o *radical* de A como sendo

$$\text{rad}(A) \doteq \bigcap_{J \text{ ideal de } A} J = \bigcap_{h \in \Delta} \ker h.$$

A é *semi-simples* se $\text{rad } A = (0)$.

Teorema 8.1. *Sejam A, B álgebras de Banach comutativas, com B semi-simples. Então todo homomorfismo de álgebras $\phi : A \rightarrow B$ é contínuo.*

Demonstração. Pelo Teorema do Gráfico Fechado, basta mostrar que, dada uma sequência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tal que $x_n \rightarrow 0$ e $\phi(x_n) \rightarrow y \in B$, então $y = 0$.

Denotaremos por Δ_A os homomorfismos em A , e Δ_B os homomorfismos em B . Se $h \in \Delta_B$, temos $h \circ \phi$ contínuo (pois ou $h \circ \phi = 0$, ou $h \circ \phi \in \Delta_A$, e todo homomorfismo complexo é contínuo). Logo $(h \circ \phi)(x_n) \rightarrow 0$, mas $(h \circ \phi)(x_n) \rightarrow h(y)$, logo $y \in \ker h$, para todo $h \in \Delta_A$, isto é; $y \in \text{rad } A = (0)$. $\square$

8.1 A transformada de Gelfand

Seja A uma álgebra de Banach comutativa. Temos

$$\Delta \subseteq B_0 \doteq \{f \in A' : \|f\| \leq 1\} \quad \sigma(A', A)\text{-compacto Hausdorff}.$$

Lema 8.2. *O conjunto Δ é $\sigma(A', A)$ -fechado em B_0 , logo Δ é compacto.*

Demonstração. Seja $(h_\alpha)_{\alpha \in I}$ net em Δ tal que $h_\alpha \rightarrow h \in B_0$ em $\sigma(A', A)$. Temos que mostrar que $h \in \Delta$.

Temos que $h_\alpha(x) \rightarrow h(x)$ para todos $\alpha \in I$, $x \in A$ e como $h_\alpha(xy) = h_\alpha(x)h_\alpha(y)$, tomando o limite temos que $h(xy) = h(x)h(y)$, para todos $x, y \in A$. Além disso $h_\alpha(e) = 1$ para todo $\alpha \in I$, de modo que $h(e) = 1$ e assim $h \neq 0$. Portanto $h \in \Delta$. $\square$

Dado $x \in A$, defino $\hat{x} : \Delta \rightarrow \mathbb{C}$ por

$$\hat{x}(h) = h(x), \quad \text{para todo } h \in \Delta.$$

Se $(h_\alpha)_{\alpha \in I}$ é um net em Δ tal que $h_\alpha \rightarrow h$ em Δ , então

$$\hat{x}(h_\alpha) = h_\alpha(x) \rightarrow h(x) = \hat{x}(h),$$

logo $\hat{x} \in C(\Delta)$. Portanto obtivemos uma aplicação

$$\begin{aligned} \bullet : A &\rightarrow C(\Delta) \\ x &\mapsto \hat{x} \end{aligned}$$

que é um homomorfismo de álgebras.

A aplicação $\bullet$ denomina-se *transformada de Gelfand*. A sua imagem, $\hat{A} \subseteq C(\Delta)$, é uma subálgebra de $C(\Delta)$.

- i) O kernel da transformada de Gelfand é $\text{rad } A$. Logo a transformada de Gelfand é injetora se, e somente se A é semi-simples.

ii) Se $x \in A$, temos que $\hat{x}(\Delta) = \sigma(x)$, o espectro de x .

Demonstração de ii). Temos $\lambda \in \hat{x}(\Delta)$ se, e somente se existe $h \in \Delta$ tal que $\hat{x}(h) = \lambda$, isto é; $h(x) = \lambda = \lambda h(e)$, o que é equivalente a $h(\lambda e - x) = 0$, isto é; $\lambda e - x \in \ker h$ (para algum $h \in \Delta$). Portanto $\lambda \in \hat{x}(\Delta)$ se, e somente se $\lambda e - x \notin G(A)$. $\square$

iii) $\|\hat{x}\|_\infty = \rho(x) \leq \|x\|$.

Lema 8.3. *Seja A uma álgebra de Banach comutativa. Sejam*

$$r \doteq \inf_{x \in A, x \neq 0} \frac{\|x^2\|}{\|x\|^2}, \quad e \quad s \doteq \inf_{x \in A, x \neq 0} \frac{\|\hat{x}\|_\infty}{\|x\|}.$$

Então

$$s^2 \leq r \leq s \leq 1.$$

Corolário 8.4. *Seja A uma álgebra de Banach comutativa. A transformada de Gelfand é uma isometria se, e somente se*

$$\|x^2\| = \|x\|^2 \quad \text{para todo } x \in A.$$

Demonstração. A condição acima é equivalente a termos $r = 1$, o que é equivalente a ser $s = 1$ (pelo Lema 8.3), isto é;

$$\|\hat{x}\|_\infty = \|x\| \quad \text{para todo } x \in A. \quad \square$$

Corolário 8.5. *Seja A uma álgebra de Banach comutativa. Então são equivalentes:*

- a) A é semi-simples e $\hat{A}$ é fechado em $C(\Delta)$; e
- b) existe $K > 0$ tal que

$$\|x\|^2 \leq K\|x^2\| \quad \text{para todo } x \in A.$$

Demonstração. b) é equivalente a ser $r > 0$ isto é, pelo Lema 8.3, termos $s > 0$. Agora, $s > 0$ é equivalente a existir $c > 0$ tal que

$$\|x\| \leq c\|\hat{x}\|_\infty \quad \text{para todo } x \in A. \quad (15)$$

Mas (15) é equivalente a termos

$$x \mapsto \hat{x} \text{ é injetora} \quad e \quad \hat{x} \mapsto x \text{ é contínua}, \quad (16)$$

o que implica a), mas também a) implica (16) pelo Teorema da Aplicação Aberta. $\square$

Demonstração do Lema 8.3. Note que

$$s\|x\| \leq \|\hat{x}\| \leq \rho(x) \leq \|x\|, \quad \text{para todo } x \in A$$

Assim

$$\|x^2\| \geq \left\| \hat{x}^2 \right\|_\infty = \|\hat{x}^2\|_\infty = \|\hat{x}\|_\infty^2 \geq s^2\|x\|^2,$$

logo

$$\frac{\|x^2\|}{\|x\|^2} \geq s^2 \quad \text{para todo } x \in A, x \neq 0,$$

de modo que $s^2 \leq r$.

Por outro lado,

$$\|x^2\| \geq r\|x\|^2, \quad \text{para todo } x \in A.$$

Iterando essa desigualdade, vemos que $\|x^{2^n}\| \geq r^{2^n-1}\|x\|^{2^n}$ para todos $x \in A$, $n \in \mathbb{N}$. Assim

$$\|x^{2^n}\|^{1/2^n} \geq r^{1-2^{-n}}\|x\| \quad \text{para todos } x \in A, n \in \mathbb{N}.$$

Fazendo $n \rightarrow +\infty$, vemos que

$$\rho(x) \geq r\|x\|,$$

e como $\|\hat{x}\|_\infty = \rho(x)$, segue que

$$\frac{\|\hat{x}\|_\infty}{\|x\|} \geq r \quad \text{para todo } x \in A, x \neq 0. \quad \square$$

8.2 Aplicações

O espaço das funções contínuas sobre um compacto. Seja $A \doteq C(K)$ com K um espaço compacto Hausdorff. Se $x \in K$, defina

$$M_x \doteq \{f \in C(K) : f(x) = 0\}.$$

Temos que M_x é um ideal maximal de A . De fato, é fácil ver que M_x é ideal de A , e esse ideal é maximal pois $M_x = \ker \delta_x$ em que $\delta_x : C(K) \rightarrow \mathbb{C}$ é o homomorfismo

$$\delta_x(f) = f(x).$$

Lema 8.6. *Se J é um ideal maximal de A , então $J = M_x$ para algum $x \in K$.*

Demonstração. Seja I um ideal de A tal que $I \not\subseteq M_x$ para todo $x \in K$. Provaremos que $I = A$. Por hipótese, para cada $x \in K$ existe $f \in I$ tal que $f(x) \neq 0$. Por continuidade, existe uma vizinhança $U_x \subseteq K$ aberto, $x \in U_x$, tal que $f \neq 0$ em U_x . Por compacidade, existem $U_1, \dots, U_n \in K$ tais que $K = \bigcup_{j=1}^n U_j$ e funções $f_1, \dots, f_n \in I$ tais que $f_j \neq 0$ em U_j . Logo

$$F \doteq \sum_{j=1}^n |f_j|^2 > 0 \quad \text{em } K,$$

mas $F = \sum_{j=1}^n \overline{f_j} f_j \in I$, e como $F > 0$ em K , temos que $F \in G(A)$, de modo que $I = A$. $\square$

Considere então a seguinte aplicação:

$$\begin{aligned} \theta : K &\rightarrow \Delta \\ x &\mapsto \delta_x. \end{aligned}$$

Provemos que θ é contínua: se $(x_\alpha)_{\alpha \in I}$ é um net em K , e $x_\alpha \rightarrow x \in K$, então $f(x_\alpha) \rightarrow f(x)$ para todo $f \in C(K)$, isto é;

$$\delta_{x_\alpha}(f) \rightarrow \delta_x(f) \quad \text{para todo } f \in C(K).$$

Assim $\delta_{x_\alpha} \rightarrow \delta_x$ fracamente, e essa é a convergência em Δ .

É fácil ver que θ é injetora, pois dados $x, y \in K$ distintos, basta tomar $f \in C(K)$ tal que $f(x) \neq f(y)$ que teremos $\theta(x)(f) \neq \theta(y)(f)$. Além disso, θ é sobrejetora pelo Lema 8.6. Dessa forma, θ é um homeomorfismo (pois K e Δ são compactos), e assim $A = C(K) \simeq C(\Delta)$.

Exemplo. Seja

$$A \doteq \left\{ f \in C(\mathbb{R}) : f(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n e^{inx}, \text{ com } \sum_{n \in \mathbb{Z}} |a_n| < \infty \right\}.$$

A álgebra A pode ser vista como uma subálgebra de $C(S^1)$, e podemos repetir a demonstração do Lema 8.6 para provar que $\Delta = \{\delta_x : x \in \mathbb{R}\}$. Como as funções em questão são 2π -periódicas, é fácil ver que

$$\Delta = \{\delta_x : 0 \leq x < 2\pi\} \simeq S^1$$

(exercício).

Nesse caso, temos que $\hat{A} \subsetneq C(S^1)$, pois (intuitivamente) A é formado pelas funções cuja série de Fourier tem coeficientes somáveis, mas isso nem sempre acontece em $C(S^1)$, pois $C(S^1)$ é formado por todas as funções 2π -periódicas contínuas.

O espaço $L^1(\mathbb{R}) \oplus \mathbb{C}$. Seja $A \doteq L^1(\mathbb{R}) \oplus \mathbb{C}$, em que

$$(f, \alpha) \cdot (g, \beta) = (f * g + \beta f + \alpha g, \alpha\beta).$$

Com esse produto, A é uma álgebra de Banach comutativa.

Se $f \in L^1(\mathbb{R})$,

$$\hat{f}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-itx} f(x) \, dx.$$

Temos $\hat{f} \in L^\infty(\mathbb{R})$, $\hat{f}$ é contínua, e $\hat{f}(t) \rightarrow 0$ quando $|t| \rightarrow +\infty$.

Dadas $f, g \in L^1(\mathbb{R})$, temos

$$\widehat{(f * g)}(t) = \hat{f}(t)\hat{g}(t).$$

De fato,

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} (f * g)(x) e^{-itx} \, dx &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-y)g(y) \, dy \right\} e^{-itx} \, dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-y) e^{-it(x-y)} \, dx \right\} e^{-ity} g(y) \, dy \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(t) g(y) e^{-ity} \, dy = \hat{f}(t)\hat{g}(t). \end{aligned}$$

Dado $t \in \mathbb{R}$, defina

$$\mu_t(f, \alpha) \doteq \hat{f}(t) + \alpha;$$

temos $\mu_t \in \Delta$. Falta ainda

$$\mu_\infty(f, \alpha) \doteq \alpha,$$

e $\mu_\infty \in \Delta$.

Teorema 8.7. *Temos*

$$\Delta = \{\mu_t : t \in \mathbb{R}\} \cup \{\mu_\infty\}$$

e portanto, topologicamente, Δ é a compactificação por um ponto (o ponto ∞) de $\mathbb{R}$ (exercício).

Note que basta mostrar a seguinte:

Proposição 8.8. *Se $\phi : L^1(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{C}$ é linear e satisfaz $\phi(f * g) = \phi(f)\phi(g)$, então ou $\phi = 0$, ou existe $t \in \mathbb{R}$ tal que $\phi(f) = \hat{f}(t)$.*

Na demonstração, usaremos os seguintes fatos:

i) $L^1(\mathbb{R})' = L^\infty(\mathbb{R})$, isto é; a aplicação

$$\begin{aligned} L^\infty(\mathbb{R}) &\rightarrow L^1(\mathbb{R})' \\ b &\mapsto T_b \end{aligned}$$

onde

$$T_b(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)b(x) \, dx$$

é uma isometria bijetora.

ii) Se $h \in \mathbb{R}$ e se $(\tau_h f)(x) = f(x - h)$, então $\tau_h f \rightarrow f$ quando $h \rightarrow 0$ em $L^1(\mathbb{R})$, se $f \in L^1(\mathbb{R})$.

Demonstração da Proposição 8.8. Temos $\phi \in L^1(\mathbb{R})'$, pois ϕ pode ser estendido a um homomorfismo de A , que será então contínua, mas ϕ é projeção dessa extensão, de modo que ϕ é também contínua. Logo podemos escrever

$$\phi(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)b(x) \, dx, \quad \text{para todo } f \in L^1(\mathbb{R})$$

para algum $b \in L^\infty(\mathbb{R})$. Se $f, g \in L^1(\mathbb{R})$, temos

$$\begin{aligned} \phi(f * g) &= \int_{-\infty}^{+\infty} (f * g)(x)b(x) \, dx, \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} f(x - y)g(y) \, dy \right\} b(x) \, dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} f(x - y)b(x) \, dx \right\} g(y) \, dy \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} g(y)\phi(\tau_y f) \, dy. \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\phi(f)\phi(g) = \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(f)g(y)b(y) \, dy,$$

logo

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(y)\phi(\tau_y f) \, dy = \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(f)g(y)b(y) \, dy, \quad \text{para todo } g \in L^1(\mathbb{R}),$$

de modo que

$$\phi(f)b(y) = \phi(\tau_y f), \quad \text{para todo } f \in L^1(\mathbb{R}).$$

Supondo $\phi \neq 0$, fixe $f \in L^1(\mathbb{R})$ tal que $\phi(f) \neq 0$. Por ii), a aplicação $y \mapsto \phi(\tau_y f)$ é uma função de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{C}$ contínua. Como $\phi(f) \neq 0$, segue que b é contínua ($b(y) = \phi(\tau_y f)/\phi(f)$). Agora,

$$\phi(f)b(x+y) = \phi(\tau_{x+y}f) = \phi(\tau_x(\tau_y f)) = \phi(\tau_x f)b(y) = \phi(f)b(x)b(y),$$

logo

$$b(x+y) = b(x)b(y) \quad \text{para todos } x, y \in \mathbb{R}. \quad (17)$$

Como $\phi \neq 0$, temos $b \neq 0$, logo $b(0) \neq 0$ (pela equação (17)), e portanto $b(0) = 1$. Escolho $\delta > 0$ tal que

$$\int_0^\delta b(y) dy \neq 0.$$

Então

$$b(x) \int_0^\delta b(y) dy = \int_0^\delta b(x+y) dy = \int_x^{\delta+x} b(y) dy.$$

Logo $b \in C^1(\mathbb{R})$, e

$$b'(x) = Ab(x), \quad A = b'(0).$$

Como também $b(0) = 1$, segue que $b(x) = e^{Ax}$. Como $b \in L^\infty(\mathbb{R})$, temos que $b(x) = e^{-itx}$ para algum $t \in \mathbb{R}$, e portanto

$$\phi(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-itx} dx = \hat{f}(t). \quad \square$$

8.3 Álgebras com involução

Definição. Seja A uma álgebra de Banach. Uma *involução* em A é uma aplicação

$$\begin{aligned} A &\rightarrow A \\ x &\mapsto x^* \end{aligned}$$

que satisfaz:

- 1) $(x+y)^* = x^* + y^*$ para todos $x, y \in A$;
- 2) $(\lambda x)^* = \bar{\lambda}x^*$ para todos $\lambda \in \mathbb{C}$, $x \in A$;
- 3) $(xy)^* = y^*x^*$ para todos $x, y \in A$; e
- 4) $(x^*)^* = x$ para todo $x \in A$.

Dizemos que $x \in A$ é *hermitiano* (ou *auto-adjunto*) se $x^* = x$.

Exemplo. Se $A \doteq C(K)$ com K compacto Hausdorff, temos a involução $f \mapsto \bar{f}$.

Exemplo. Se $A \doteq L(H)$ com H espaço de Hilbert, temos a involução $T \mapsto T^*$ (o adjunto de T).

Alguns fatos elementares:

- (1) Se $x \in A$, então $x + x^*$, $i(x - x^*)$ e xx^* são hermitianos.
- (2) Todo elemento $x \in A$ se escreve na forma $x = u + iv$ com u e v hermitianos de modo único. De fato,

$$x = \frac{x + x^*}{2} + i \left[\frac{i(x^* - x)}{2} \right]$$

com $(x + x^*)/2$ e $i(x^* - x)/2$ hermitianos.

Suponha que $x = u + iv = u' + iv'$ com $u, u', v, v' \in A$ hermitianos. Seja $w \doteq v - v'$; temos também $iw = u' - u$. Logo w e iw são hermitianos, e

$$iw = (iw)^* = -iw^* = -iw,$$

de modo que $w = 0$, e assim $v = v'$ e $u = u'$.

- (3) O elemento e é hermitiano. De fato, se $x \in A$,

$$x = (ex^*)^* = xe^*, \quad \text{e} \quad x = (x^*e)^* = e^*x,$$

portanto $e^* = e$.

- (4) $x \in G(A)$ se, e somente se $x^* \in G(A)$, pois

$$(x^*)^{-1} = (x^{-1})^*.$$

- (5) $\lambda \in \sigma(x)$ se, e somente se $\bar{\lambda} \in \sigma(x^*)$.

- (6) É a seguinte:

Proposição 8.9. *Se A é uma álgebra de Banach comutativa e semi-simples, então toda involução em A é contínua.*

Demonstração. Pelo Teorema do Gráfico Fechado (para operadores anti-lineares...), basta mostrar que se $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência tal que $x_n \rightarrow x$ e $x_n^* \rightarrow y$, então $x^* = y$.

Dado $h \in \Delta$, defino $\varphi \in \Delta$ por

$$\varphi(z) = \overline{h(z^*)}.$$

Como φ é homomorfismo, temos que é contínua, e assim $\varphi(x_n) \rightarrow \varphi(x) = \overline{h(x^*)}$. Por outro lado, $\varphi(x_n) = \overline{h(x_n^*)} \rightarrow \overline{h(y)}$. Portanto $y - x^* \in \ker h$, para todo $h \in \Delta$. Como A é semi-simples, segue que $y = x^*$. $\square$

Definição. Uma álgebra de Banach com involução é uma C^* -álgebra se

$$\|xx^*\| = \|x\|^2 \quad \text{para todo } x \in A.$$

Observação. Termos $\|xx^*\| = \|x\|^2$ para todo $x \in A$ é equivalente a termos ao mesmo tempo

$$\|x^*\| = \|x\| \quad \text{e} \quad \|xx^*\| = \|x\| \cdot \|x^*\| \quad \text{para todo } x \in A.$$

($\Leftarrow$): É imediato.

($\Rightarrow$): Temos $\|x\|^2 = \|xx^*\| \leq \|x\| \cdot \|x^*\|$, logo $\|x\| \leq \|x^*\|$. Por outro lado, temos então $\|x^*\| \leq \|(x^*)^*\| = \|x\|$.

Teorema 8.10 (Gelfand-Naimark). *Se A é uma C^* -álgebra comutativa, então a transformada de Gelfand é uma isometria sobrejetora de A em $C(\Delta)$ que satisfaz*

$$\widehat{x^*} = \overline{\widehat{x}}, \quad \text{para todo } x \in A.$$

Em particular, $x \in A$ é hermitiano se, e somente se $\widehat{x}$ é real (isto é, se e somente se $\widehat{x}(\Delta) = \sigma(x)$ é real).

Demonstração. 1) Mostremos que se $u \in A$ é hermitiano e se $h \in \Delta$, então $\widehat{u}(h) = h(u) \in \mathbb{R}$.

Escreva $h(u) = \alpha + i\beta$, com $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Seja $z \doteq u + ite$ com $t \in \mathbb{R}$. Então $z^* = u - ite$, e assim $z^*z = u^2 + t^2e$. Agora,

$$h(z) = h(u) + it = \alpha + i(\beta + t).$$

Logo

$$\alpha^2 + (\beta + t)^2 = |h(z)|^2 \leq \|z\|^2 = \|z^*z\| \leq \|u\|^2 + t^2$$

e assim

$$\alpha^2 + \beta^2 + 2\beta t \leq \|u\|^2 \quad \text{para todo } t \in \mathbb{R}.$$

Fazendo $t \rightarrow +\infty$, vemos que isso só é possível se $\beta = 0$, portanto $h(u) \in \mathbb{R}$.

Conclusão: se $x \in A$, temos $x = u + iv$ com $u, v \in A$ hermitianos. Assim

$$\widehat{x} = \widehat{u} + i\widehat{v},$$

com $\widehat{u}, \widehat{v}$ a valores reais. Por outro lado, $x^* = u^* - iv^* = u - iv$, de modo que

$$\widehat{x^*} = \widehat{u} - i\widehat{v} = \overline{\widehat{x}}.$$

2) Mostremos agora que a transformada de Gelfand é uma isometria. Isto é, que dado $x \in A$, vale $\|x\| = \|\widehat{x}\|_\infty$.

Defino $y \doteq x^*x$. Então $y^* = y$, e portanto $\|y^2\| = \|yy^*\| = \|y\|^2$. Por iteração, temos que $\|y^{2^n}\| = \|y\|^{2^n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Logo

$$\|y^{2^n}\|^{1/2^n} = \|y\| \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Fazendo $n \rightarrow +\infty$, temos $\rho(y) = \|\hat{y}\|_\infty$. Agora,

$$\hat{y} = \widehat{x^*x} = \overline{\hat{x}\hat{x}} = |\hat{x}|^2,$$

de modo que

$$\|\hat{x}\|_\infty^2 = \sup |\hat{x}|^2 = \sup |\hat{y}| = \|\hat{y}\|_\infty = \rho(y) = \|y\| = \|x^*x\| = \|x\|^2.$$

Assim provamos que a transformada de Gelfand é uma isometria de A sobre $\hat{A} \subseteq C(\Delta)$.

3) Como temos uma isometria entre A e $\hat{A}$, e também A é completo, segue que $\hat{A}$ é completo, portanto fechado em $C(\Delta)$. Basta então mostrar que $\hat{A}$ é denso em $C(\Delta)$.

Agora, $\hat{A}$ é uma álgebra. Pelo Teorema de Stone-Weierstrass, basta que verificar que:

- i) $\hat{A}$ contém a função constante igual a 1 (mas $1 = \hat{e}$);
- ii) $\hat{A}$ separa pontos (se $h_1, h_2 \in \Delta$ e $h_1 \neq h_2$, então existe $x \in A$ tal que $h_1(x) \neq h_2(x)$, isto é; $\hat{x}(h_1) \neq \hat{x}(h_2)$); e
- iii) Se $\hat{x} \in \hat{A}$, então $\overline{\hat{x}} \in \hat{A}$, pois $\overline{\hat{x}} = \widehat{x^*}$. □

8.4 Aplicação

Seja A uma C^* -álgebra comutativa. Suponha que $x \in A$ seja tal que o conjunto

$$\{p(x, x^*) : p \in \mathbb{C}[X, Y]\}$$

é denso em A . Nesta situação, dado $f \in C(\sigma(x))$, é possível definir de modo canônico um elemento “ $f(x) \in A$ ”. Essa definição tem a propriedade que, no caso em que $f = p \in \mathbb{C}[X]$, temos $f(x) = p(x)$. De fato, temos $\hat{x} : \Delta \rightarrow \sigma(x)$ sobrejetora, e

Lema 8.11. *A função $\hat{x}$ é injetora.*

Demonstração. Sejam $h_1, h_2 \in \Delta$ tais que $\hat{x}(h_1) = \hat{x}(h_2)$. Então $\overline{\hat{x}(h_1)} = \overline{\hat{x}(h_2)}$, isto é; $\widehat{x^*}(h_1) = \widehat{x^*}(h_2)$. Logo $h_1(x^*) = h_2(x^*)$. Como também $h_1(x) = \hat{x}(h_1) = \hat{x}(h_2) = h_2(x)$, segue que

$$h_1(p(x, x^*)) = h_2(p(x, x^*)) \quad \text{para todo } p \in \mathbb{C}[X, Y].$$

Como $\{p(x, x^*) : p \in \mathbb{C}[X, Y]\}$ é denso em A por hipótese, segue que $h_1 = h_2$. □

Como Δ e $\sigma(x)$ são compactos, e $\hat{x}$ é contínua, segue que $\hat{x}$ é um homeomorfismo. Temos então

$$\begin{aligned}\theta : C(\sigma(x)) &\rightarrow C(\Delta) \\ f &\mapsto f \circ \hat{x}.\end{aligned}$$

A função θ é um isomorfismo isométrico entre as álgebras de Banach $C(\sigma(x))$ e $C(\Delta)$. Temos também o isomorfismo isométrico $C(\Delta) \rightarrow A$ a inversa da transformada de Gelfand. Dada $f \in C(\sigma(x))$, existe $y \in A$ tal que $\hat{y} = f \circ \hat{x}$. Definimos então $f(x) = y$.

9 Teorema da Aplicação Espectral

Lembrar: se γ é uma cadeia (soma de curvas) fechada C^1 por partes em $\mathbb{C}$ e $\zeta \in \mathbb{C} \setminus \{\gamma\}$, o *índice* de γ com relação a ζ é o número

$$\text{Ind}_\gamma(\zeta) \doteq \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{1}{z - \zeta} dz$$

Com esse conceito, o Teorema de Cauchy se enuncia:

Teorema 9.1 (Cauchy). *Seja $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ aberto e $f \in \mathcal{O}(\Omega)$. Então*

$$\int_{\gamma_0} f(z) dz = \int_{\gamma_1} f(z) dz$$

para todos γ_0, γ_1 com

$$\text{Ind}_{\gamma_0}(\zeta) = \text{Ind}_{\gamma_1}(\zeta) \quad \text{para todo } \zeta \notin \Omega.$$

Note que esse Teorema de Cauchy também vale para funções holomorfas a espaços de Banach (aplicando qualquer funcional obtemos sempre a mesma igualdade).

Teorema 9.2 (Runge). *Sejam $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ aberto e $A \subseteq S^2 \setminus \Omega$ (em que $S^2 = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$) tal que A contém pelo menos um ponto de cada componente conexa de $S^2 \setminus \Omega$. Então dada $f \in \mathcal{O}(\Omega)$, existe $\{Q_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ em que cada Q_n é uma função racional com polos em A e tal que $Q_n \rightarrow f$ uniformemente sobre os compactos de Ω .*

Sejam A uma álgebra de Banach e $x \in A$ fixado.

Lema 9.3. *Seja γ uma cadeia como antes em $\mathbb{C} \setminus \sigma(x)$ tal que*

$$\text{Ind}_\gamma(\lambda) = 1 \quad \text{para todo } \lambda \in \sigma(x)$$

(ingenuamente γ envolve o espectro de x). Seja $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{\gamma\}$ tal que $\text{Ind}_\gamma(\alpha) = 0$ (isto é, α está fora da cadeia). Então valem

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \lambda^m (\lambda e - x)^{-1} d\lambda = x^m, \quad \text{para todo } m \geq 0, \quad (18)$$

e

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma (\lambda - \alpha)^{-m} (\lambda e - x)^{-1} d\lambda = (x - \alpha e)^{-m} \quad \text{para todo } m \geq 0. \quad (19)$$

Demonstração. Para (18), seja $r > \|x\|$ e seja

$$\gamma_r = \{re^{i\theta} : 0 \leq \theta \leq 2\pi\}.$$

Tome r suficientemente grande para termos

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \lambda^m (\lambda e - x)^{-1} d\lambda = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r} \lambda^m (\lambda e - x)^{-1} d\lambda = x^m,$$

pois já calculamos essa integral (basta expandir em série o termo $(\lambda e - x)^{-1}$).

Para (19), se $z \notin \sigma(x)$ defina

$$R(z) \doteq (ze - x)^{-1}.$$

Vale a equação do resolvente:

$$R(z) - R(w) = (w - z)R(z)R(w) \quad \text{para todos } z, w \notin \sigma(x).$$

De fato, se $z, w \notin \sigma(x)$ temos

$$\begin{aligned} R(z) &= R(z)(we - x)R(w) = R(z)[(w - z + z)e - x]R(w) \\ &= R(z)(w - z)eR(w) + R(z)(ze - x)R(w) \\ &= (w - z)R(z)R(w) + R(w). \end{aligned}$$

Seja

$$\begin{aligned} y_m &\doteq \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma (\lambda - \alpha)^{-m} (\lambda e - x)^{-1} d\lambda = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma (\lambda - \alpha)^{-m} R(\lambda) d\lambda \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma (\lambda - \alpha)^{-m} R(\alpha) d\lambda - \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma (\lambda - \alpha)^{-m+1} R(\lambda) R(\alpha) d\lambda \\ &= \frac{-R(\alpha)}{2\pi i} \int_\gamma (\lambda - \alpha)^{-m+1} R(\lambda) d\lambda. \end{aligned}$$

sendo que

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} (\lambda - \alpha)^{-m} R(\alpha) d\lambda = 0$$

que é claro se $m \geq 2$, e se $m = 1$ isso ocorre pois por hipótese $\text{Ind}_{\gamma}(\alpha) = 0$. Assim obtivemos

$$y_m = -y_{m-1}(\alpha e - x)^{-1} = y_{m-1}(x - \alpha e)^{-1}.$$

Como $y_0 = e$, segue que $y_m = (x - \alpha e)^{-m}$. □

Corolário 9.4. *Sejam A uma álgebra de Banach e $x \in A$ fixado. Seja*

$$Q(\lambda) = P(\lambda) + \sum_{m,k} \frac{c_{mk}}{(\lambda - a_m)^k}$$

uma função racional (isto é, a soma acima é finita) com os polos $a_j \notin \sigma(x)$ para todo j . Seja γ uma cadeia como antes:

$$\text{Ind}_{\gamma}(\zeta) = 1 \quad \text{para todo } \zeta \in \sigma(x) \quad \text{e} \quad \text{Ind}_{\gamma}(a_j) = 0 \quad \text{para todo } j$$

(supomos que $a_j \notin \{\gamma\}$ para todo j). Então

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} Q(\lambda)(\lambda e - x)^{-1} d\lambda = Q(x) = P(x) + \sum_{m,k} c_{mk}(x - a_m e)^{-k}.$$

Definição. Sejam A uma álgebra de Banach e $x \in A$ fixado. Seja $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ aberto com $\sigma(x) \subseteq \Omega$ e seja $f \in \mathcal{O}(\Omega)$. Então

$$f(x) \doteq \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(\lambda)(\lambda e - x)^{-1} d\lambda$$

onde γ é qualquer cadeia em Ω tal que

$$\text{Ind}_{\gamma}(\zeta) = 1 \quad \text{para todo } \zeta \in \sigma(x) \quad \text{e} \quad \text{Ind}_{\gamma}(\alpha) = 0 \quad \text{para todo } \alpha \in \Omega.$$

Pelo Corolário anterior, para qualquer função racional (como naquele Corolário) a definição acima é a trivial.

Sejam f, g funções holomorfas em um mesmo aberto Ω que contém $\sigma(x)$. Então dado $\zeta \in \mathbb{C}$, é fácil ver que

$$f(x) + g(x) = (f + g)(x) \quad \text{e} \quad \zeta f(x) = (\zeta f)(x).$$

Também vale que

$$f(x)g(x) = (fg)(x),$$

que é uma passagem não-trivial, mas basta usar o Teorema de Runge, e que a igualdade acima vale para funções racionais (exercício). Note que segue daí que

$$f(x)g(x) = (fg)(x) = (gf)(x) = g(x)f(x).$$

Teorema 9.5. *Sejam A uma álgebra de Banach e $x \in A$ fixado. Sejam $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ aberto com $\sigma(x) \subseteq \Omega$ e seja $f \in \mathcal{O}(\Omega)$. Então*

- (1) $f(x) \in G(A)$ se, e somente se $f(\lambda) \neq 0$, para todo $\lambda \in \sigma(x)$; e
- (2) $\sigma(f(x)) = f(\sigma(x))$ (Teorema da Aplicação Espectral).

Demonstração. (1): ($\Leftarrow$): Se $f(\lambda) \neq 0$ para todo $\lambda \in \sigma(x)$, então $1/f$ é holomorfa em um aberto que contém $\sigma(x)$. Então

$$f(x) \cdot \left(\frac{1}{f}\right)(x) = \left(f \cdot \frac{1}{f}\right)(x) = 1(x) = e.$$

($\Rightarrow$): Suponha que exista $\lambda_0 \in \sigma(x)$ tal que $f(\lambda_0) = 0$. Então $f(\lambda) = (\lambda - \lambda_0)g(\lambda)$ para algum $g \in \mathcal{O}(\Omega)$. Então

$$f(x) = (x - \lambda_0 e)g(x) = g(x)(x - \lambda_0 e),$$

e como $\lambda_0 \in \sigma(x)$, não podemos ter $f(x) \in G(A)$.

(2): Seja $\beta \in \mathbb{C}$ e defina $h(\lambda) \doteq \beta - f(\lambda)$. Temos $\beta \in \sigma(f(x))$ se, e somente se $\beta e - f(x) \notin G(A)$, o que é equivalente por (1) a dizer que h se anula em algum ponto de $\sigma(x)$, isto é, existe $\lambda_0 \in \sigma(x)$ tal que $\beta = f(\lambda_0) \in f(\sigma(x))$. $\square$

9.1 De volta às álgebras com involução

Definição. Seja A uma álgebra com involução.

- (a) Um elemento $x \in A$ é dito *normal* se

$$xx^* = x^*x.$$

- (b) $S \subseteq A$ é *normal* se S comuta e, se $x \in S$ então $x^* \in S$.

Teorema 9.6. *Seja A uma álgebra com involução e seja $B \subseteq A$ normal e maximal com relação a esta propriedade (isto é, não existe nenhum subconjunto de A normal que contém propriamente B). Então*

- (1) B é uma subálgebra fechada de A ; e
- (2) para todo $x \in B$, temos $\sigma_B(x) = \sigma_A(x)$ (em que $\sigma_C(x)$ é o espectro de x com relação à álgebra C).

(Na definição de maximalidade, permitimos o caso $B = A$, que ocorre quando A é comutativo.)

Demonstração. Mostraremos primeiramente a propriedade (P): se $x \in A$ é tal que $xy = yx$ para todo $y \in B$, e $xx^* = x^*x$, então $x \in B$.

De fato, se $x \in A$, e vale $xy = yx$ para todo $y \in B$, e também $xx^* = x^*x$, então

$$x^*y = (y^*x)^* = (xy^*)^* = yx^* \quad \text{para todo } y \in B.$$

Isto é, x^* também comuta com todo elemento de B . Portanto $B \cup \{x^*, x\}$ comuta e é fechado por involução, isto é; esse conjunto é normal. Como B é maximal, segue que $B \cup \{x^*, x\} = B$ e assim $x \in B$.

(P) implica que B é uma álgebra, pois se $z_1, z_2 \in B$, temos que

$$(z_1 + z_2)y = y(z_1 + z_2) \quad \text{e} \quad (z_1 + z_2)^*(z_1 + z_2) = (z_1 + z_2)(z_1 + z_2)^*,$$

para todo $y \in B$. Por (P), segue que $z_1 + z_2 \in B$. Tudo segue analogamente para as outras operações.

B é fechada: seja $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência em B tal que $x_n \rightarrow x \in A$. Como

$$x_n y = y x_n, \quad \text{para todos } y \in B, n \in \mathbb{N},$$

fazendo $n \rightarrow +\infty$ segue que $xy = yx$ para todo $y \in B$. Como B é fechado por involução, segue que $xy^* = y^*x$ e tomando o adjunto temos que $x^*y = yx^*$ para todo $y \in B$. Em particular

$$x^*x_n = x_n x^* \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Fazendo $n \rightarrow +\infty$, segue que $x^*x = xx^*$. Por (P), temos então que $x \in B$, e assim B é fechado.

Finalmente, provemos a igualdade dos espectros. Basta mostrar que $G(B) = G(A) \cap B$. É fácil ver que $G(B) \subseteq G(A) \cap B$. Precisamos mostrar então que se $x \in B$ é inversível em A , então $x^{-1} \in B$.

Note que $(x^{-1})^* = (x^*)^{-1}$. Como $xx^* = x^*x$, temos

$$(x^{-1})(x^{-1})^* = x^{-1}(x^*)^{-1} = (x^*x)^{-1} = (xx^*)^{-1} = (x^*)^{-1}x^{-1} = (x^{-1})^*x^{-1}.$$

Além disso, se $y \in B$, como $xy = yx$ então $yx^{-1} = x^{-1}y$. Portanto segue da propriedade (P) que $x^{-1} \in B$. $\square$

Corolário 9.7. *Sejam A uma álgebra de Banach com involução e $x \in A$ normal. Então existe $B \subseteq A$ subálgebra fechada e comutativa com $x \in B$ e tal que se $y \in B$, então $y^* \in B$. Além disso, $\sigma_B(x) = \sigma_A(x)$.*

Demonstração. Temos que

$$S \doteq \overline{\{p(x, x^*) : p \in \mathbb{C}[X, Y]\}}$$

é uma subálgebra fechada, comutativa e normal. Pelo Lema de Zorn, existe $B \subseteq A$ subálgebra fechada, normal e maximal e que contém S . $\square$

Definição. Seja A uma álgebra com involução. Dizemos que $x \in A$ é *positivo*, e escrevemos $x \geq 0$, se

$$x = x^* \quad \text{e} \quad \sigma(x) \subseteq [0, +\infty[\subseteq \mathbb{R}.$$

Teorema 9.8. *Seja A uma C^* -álgebra. Então*

- (a) *Se $x \in A$ é hermitiano, então $\sigma(x) \subseteq \mathbb{R}$.*
- (b) *Se $x \in A$ é normal, então $\rho(x) = \|x\|$.*
- (c) *Se $y \in A$, então $\rho(y^*y) = \|y\|^2$.*
- (d) *Se $u, v \in A$ são positivos, então $u + v \geq 0$.*
- (e) *Se $y \in A$, então $yy^* \geq 0$.*
- (f) *Se $y \in A$, então $e + yy^* \in G(A)$.*

Demonstração. (a): Temos $x \in B$, onde $B \subseteq A$ é uma subálgebra fechada, comutativa e C^* . Logo $B \simeq C(\Delta_B)$ (pelo Teorema de Gelfand-Naimark). Como x é hermitiano, a função $\hat{x}$ é a valores reais, logo $\sigma(x) = \sigma_B(x) = \hat{x}(\Delta_B) \subseteq \mathbb{R}$.

(b): Temos $x \in B$, com B como em (a). Como $\hat{x}(\Delta_B) = \sigma(x)$, temos que $\rho(x) = \|\hat{x}\|_\infty = \|x\|$.

(c): Temos que y^*y é hermitiano, e $\|y^*y\| = \|y\|^2$, logo (c) segue de (b).

(d): Sejam $\alpha \doteq \|u\|$, $\beta = \|v\|$ e $\gamma \doteq \alpha + \beta$. Temos assim $\sigma(u) \subseteq [0, \alpha]$ e $\sigma(v) \subseteq [0, \beta]$. Se $f(\lambda) \doteq \alpha - \lambda$ com $\lambda \in \mathbb{C}$, temos

$$\sigma(\alpha e - u) = \sigma(f(u)) = f(\sigma(u)) \subseteq f([0, \alpha]) = [0, \alpha].$$

Pelo item (b), temos $\|\alpha e - u\| = \rho(\alpha e - u) \leq \alpha$. Analogamente $\|\beta e - v\| \leq \beta$. Então

$$\rho(\gamma e - (u + v)) \leq \|\gamma e - (u + v)\| \leq \|\alpha e - u\| + \|\beta e - v\| \leq \alpha + \beta = \gamma.$$

Dessa forma $\sigma(\gamma e - (u + v)) \subseteq [-\gamma, \gamma]$, mas se $g(\lambda) \doteq \gamma - \lambda$ temos

$$\sigma(u + v) = \sigma(g(\gamma e - (u + v))) = g(\sigma(\gamma e - (u + v))) \subseteq g([-\gamma, \gamma]) = [0, 2\gamma].$$

(e): $x = yy^*$ (hermitiano). Tomo B subálgebra com $x \in B$ como no item (a). Quero então mostrar que $\hat{x} \geq 0$. Será que $|\hat{x}| - \hat{x} = 0$? Como essa função é contínua, existe $z \in B$ tal que $\hat{z} = |\hat{x}| - \hat{x}$. Temos $z = z^*$ pois $\hat{z}$ é real. Seja $w \doteq zy = u + iv$ com u, v hermitianos. Temos

$$ww^* = zy(zy)^* = zyy^*z = xz = z^2x.$$

Também

$$ww^* + w^*w = (u + iv)(u - iv) + (u - iv)(u + iv) = 2u^2 + 2v^2,$$

logo $ww^* = 2u^2 - 2v^2 - z^2x$.

Como u é hermitiano, temos $\sigma(u) \subseteq \mathbb{R}$. Pelo Teorema Espectral, segue que $\sigma(u^2) = (\sigma(u))^2 \subseteq [0, +\infty[$ e assim $u^2 \geq 0$. Analogamente $v^2 \geq 0$. Provemos que $-z^2x \geq 0$. De fato,

$$\begin{aligned} \widehat{z^2x} &= \hat{z}^2\hat{x} = (|\hat{x}| - \hat{x})^2\hat{x} = (\hat{x}^2 - 2|\hat{x}|\hat{x} + \hat{x}^2)\hat{x} = (2\hat{x}^2 - 2\hat{x}|\hat{x}|)\hat{x} \\ &= 2\hat{x}^2(\hat{x} - |\hat{x}|) \leq 0. \end{aligned}$$

Por (d), segue que $w^*w \geq 0$.

Exercício. Seja A uma álgebra de Banach, $x, y \in A$. Então se $\lambda \in \sigma(xy)$ e $\lambda \neq 0$, temos $\lambda \in \sigma(yx)$.

Pelo exercício, $\sigma(ww^*) \subseteq \sigma(w^*w) \cup \{0\} \subseteq [0, +\infty[$ de modo que $ww^* \geq 0$, isto é; $z^2x \geq 0$. Como também $-z^2x \geq 0$, segue que $\hat{x}(\hat{x} - |\hat{x}|) = 0$, de modo que $\hat{x} \geq 0$ e assim $x \geq 0$.

(f): Segue de (e), notando que $-1 \notin \sigma(yy^*)$. $\square$

Teorema 9.9. *Seja A uma C^* -álgebra, $B \subseteq A$ uma subálgebra fechada tal que se $x \in B$, então $x^* \in B$. Então $G(B) = G(A) \cap B$. Em particular*

$$\sigma_B(x) = \sigma_A(x) \quad \text{para todo } x \in B.$$

Vamos usar o seguinte Lema, que provaremos a seguir:

Lema 9.10. *Seja A um álgebra de Banach, $B \subseteq A$ subálgebra fechada de A . Então se $x \in B$ é tal que $\mathbb{C} \setminus \sigma_A(x)$ é conexo, então $\sigma_B(x) = \sigma_A(x)$.*

Demonstração do Teorema 9.9. Seja $x \in G(A) \cap B$. Então $x^* \in G(A)$, logo $xx^* \in G(A)$. Como $xx^* \geq 0$, temos que $\sigma_A(xx^*) \subseteq]0, +\infty[$ (temos $0 \notin \sigma_A(xx^*)$ pois $xx^* \in G(A)$). Assim sendo $\mathbb{C} \setminus \sigma_A(xx^*)$ não pode ser desconexo, de modo que segue do Lema 9.10 que $\sigma_B(xx^*) = \sigma_A(xx^*)$. Em particular $(xx^*)^{-1} \in B$. Portanto $x^{-1} = x^*(xx^*)^{-1} \in B$. $\square$

Observação. Se X é um espaço topológico e V, W são abertos tais que $V \subseteq W$ e $\partial V \cap W = \emptyset$, então V é uma reunião de componentes (conexas) de W .

De fato, seja $x \in V$ e seja Ω a componente de W que contém x . Temos que mostrar que $\Omega \subseteq V$. Mas

$$\Omega = (\Omega \cap V) \cup [\Omega \cap (X \setminus V)] = (\Omega \cap V) \cup [\Omega \cap (X \setminus \overline{V})].$$

Assim Ω é união de dois abertos disjuntos, e como Ω é conexo, temos $\Omega \cap (X \setminus \overline{V}) = \emptyset$, e portanto $\Omega = \Omega \cap V$.

Demonstração do Lema 9.10. Sejam $\mathcal{O}_A \doteq \mathbb{C} \setminus \sigma_A(x)$ e $\mathcal{O}_B \doteq \mathbb{C} \setminus \sigma_B(x)$. Temos que $\mathcal{O}_B \subseteq \mathcal{O}_A$. Vou mostrar que $\partial\mathcal{O}_B \cap \mathcal{O}_A = \emptyset$. Assim segue da observação que $\mathcal{O}_B = \mathcal{O}_A$.

Seja $\lambda \in \partial\mathcal{O}_B \cap \mathcal{O}_A$. Então $\lambda e - x \in G(A)$. Existe uma sequência $\{\lambda_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ em $\mathcal{O}_B$ tal que $\lambda_n \rightarrow \lambda$. Assim $\lambda_n e - x \in G(B)$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e $\lambda e - x \in \sigma_B(x)$. Assim $(\lambda_n e - x)^{-1} \rightarrow (\lambda e - x)^{-1}$, mas pelo Lema 6.6 temos $\|(\lambda_n e - x)^{-1}\| \rightarrow +\infty$, absurdo. $\square$

10 Teorema Espectral para operadores normais

Sejam H um espaço de Hilbert, e $T \in L(H)$ normal, isto é, tal que

$$T^*T = TT^*.$$

Logo

$$\|Tx\| = \|T^*x\| \quad \text{para todo } x \in H.$$

Em particular, $\ker T = \ker T^* = (\operatorname{Im} T)^\perp$. Se $\alpha \in \mathbb{C}$ então $T - \alpha I$ é também normal, pois $(T - \alpha I)^* = T^* - \bar{\alpha}I$. Logo

$$\|(T - \alpha I)x\| = \|(T^* - \bar{\alpha}I)x\| \quad \text{para todo } x \in H.$$

Assim α é autovalor de T se, e somente se $\bar{\alpha}$ é autovalor de T^* , e $\mathcal{N}(\alpha, T) = \mathcal{N}(\bar{\alpha}, T^*)$.

Lema 10.1. *Se T é normal e α, β são autovalores distintos de T , então $\mathcal{N}(\alpha, T) \perp \mathcal{N}(\beta, T)$.*

Demonstração. Se $x \in \mathcal{N}(\alpha, T)$ e $y \in \mathcal{N}(\beta, T)$, temos

$$\alpha \langle x, y \rangle = \langle \alpha x, y \rangle = \langle Tx, y \rangle = \langle x, T^*y \rangle = \langle x, \bar{\beta}y \rangle = \bar{\beta} \langle x, y \rangle$$

e como $\alpha \neq \beta$, segue que $\langle x, y \rangle = 0$. $\square$

Corolário 10.2. *Se $T \in L(H)$ é normal e H é de dimensão finita, então H possui uma base ortonormal formada por autovetores de T .*

Demonstração. Pelo Teorema Fundamental da Álgebra, obtemos uma raiz λ_1 do polinômio característico de T , isto é; λ_1 é um autovalor de T . Tomo $\{e_1, \dots, e_{k_1}\}$ uma base ortonormal de $\mathcal{N}(\lambda_1, T)$. Escrevo $H = \mathcal{N}(\lambda_1, T) \oplus \mathcal{N}(\lambda_1, T)^\perp$. Basta mostrar que $\mathcal{N}(\lambda_1, T)^\perp$ é T -invariante, pois então restrinjo

T a esse subespaço e continuo o processo. (E esse processo acaba pois H tem dimensão finita.)

Sejam $x \in \mathcal{N}(\lambda_1, T)^\perp$ e $y \in \mathcal{N}(\lambda_1, T)$. Então

$$\langle Tx, y \rangle = \langle x, T^*y \rangle = \langle x, \overline{\lambda_1}y \rangle = \lambda_1 \langle x, y \rangle = 0.$$

Portanto $\mathcal{N}(\lambda_1, T)^\perp$ é de fato T -invariante. $\square$

Observação. Na base ortonormal $\{e_1, \dots, e_N\}$ dada pelo Corolário 10.2, a matriz de T é uma matriz diagonal

$$\text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_2, \dots, \lambda_M, \dots, \lambda_M)$$

em que cada autovalor λ_k é contado com a sua multiplicidade, e $\lambda_1, \dots, \lambda_M$ são os autovalores distintos de T . Seja p_j a projeção ortogonal de H sobre $\mathcal{N}(\lambda_j, T)$. Então

$$T = \sum_{j=1}^M \lambda_j p_j = \sum_{\lambda_j \in \sigma(T)} \lambda_j p_j \quad \text{com} \quad p_j p_k = 0 \text{ se } j \neq k,$$

em que $p_j p_k = 0$ pois os subespaços $\mathcal{N}(\lambda_j, T)$ e $\mathcal{N}(\lambda_k, T)$ são perpendiculares.

Definição. Sejam H um espaço de Hilbert e $p \in L(H)$. Dizemos que p é uma *projeção* em H se $p^2 = p$.

Proposição 10.3. *Sejam H um espaço de Hilbert e p uma projeção em H . São equivalentes:*

- (1) p é autoadjunta;
- (2) p é normal;
- (3) $\text{Im } p = (\ker p)^\perp$; e
- (4) $\langle p(x), x \rangle = \|p(x)\|^2$ para todo $x \in H$.

Demonstração. (1) $\Rightarrow$ (2): trivial.

(2) $\Rightarrow$ (3): Como p é normal, temos que $\overline{\text{Im } p} = (\ker p)^\perp$. Portanto basta mostrar que $\text{Im } p$ é fechada. Mas, se $\{x_n\}_n$ é uma sequência em H tal que $px_j \rightarrow y \in H$, então aplicando p temos $p(x_j) = p(px_j) \rightarrow p(y)$, de modo que $y = p(y) \in \text{Im } p$ e assim $\text{Im } p$ é fechada.

(3) $\Rightarrow$ (4): Escreva $H = \text{Im } p \oplus \ker p$. Então dado $x \in H$ temos $x = x_1 + x_2$ com $x_1 \in \text{Im } p$ e $x_2 \in \ker p$. Portanto

$$\langle px, x \rangle = \langle px_1, x_1 + x_2 \rangle = \langle px_1, x_1 \rangle = \langle px_1, px_1 \rangle.$$

(4) $\Rightarrow$ (1): Dado $x \in H$, temos

$$\|p(x)\|^2 = \langle px, x \rangle = \langle x, p^*x \rangle = \langle p^*x, x \rangle,$$

sendo que $\langle x, p^*x \rangle = \langle p^*x, x \rangle$ pois ambos valem $\|p(x)\|^2 \in \mathbb{R}$. Assim se $T \doteq p - p^*$, temos que $\langle Tx, x \rangle = 0$ para todo $x \in H$. Segue então de um exercício da Lista 1 que $T = 0$. $\square$

Dizemos que uma projeção satisfazendo qualquer das propriedades equivalentes da Proposição acima é uma *projeção ortogonal*.

Note que toda projeção ortogonal p não-nula tem norma $\|p\| = 1$, pois

$$\|p(x)\|^2 = \langle p(x), x \rangle \leq \|p(x)\| \cdot \|x\|,$$

logo $\|p(x)\| \leq \|x\|$. Como $p \neq 0$ posso tomar $y \in \text{Im } p$ com $\|y\| = 1$, de modo que $\|p(y)\| = \|y\|$ e assim $\|p\| = 1$.

Fixe $(\Omega, \mathcal{M})$ um espaço mensurável. Uma *medida complexa* sobre $(\Omega, \mathcal{M})$ é uma função $\nu : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{C}$ tal que $\nu(\emptyset) = 0$ e

$$\nu\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} \omega_n\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \nu(\omega_n)$$

para todos $\omega_n \in \mathcal{M}$ dois a dois disjuntos. Note que como o lado esquerdo da igualdade acima independe da ordem dos ω_n , segue que a série à direita é absolutamente convergente (por hipótese).

10.1 Resoluções da identidade

Definição. Sejam $(\Omega, \mathcal{M})$ um espaço mensurável e H um espaço de Hilbert. Uma *resolução da identidade* (em $\mathcal{M}$) é uma função $E : \mathcal{M} \rightarrow L(H)$ satisfazendo as seguintes propriedades:

- (1) $E(\emptyset) = 0$ e $E(\Omega) = Id$.
- (2) $E(\omega)$ é uma projeção ortogonal em H para todo $\omega \in \mathcal{M}$.
- (3) $E(\omega_1 \cap \omega_2) = E(\omega_1)E(\omega_2)$ para todos $\omega_1, \omega_2 \in \mathcal{M}$.
- (4) $E(\omega_1 \cup \omega_2) = E(\omega_1) + E(\omega_2)$ para todos $\omega_1, \omega_2 \in \mathcal{M}$ com $\omega_1 \cap \omega_2 = \emptyset$.
- (5) Para todos $x, y \in H$,

$$\begin{aligned} E_{x,y} : \mathcal{M} &\rightarrow \mathbb{C} \\ \omega &\mapsto \langle E(\omega)x, y \rangle \end{aligned}$$

é uma medida complexa sobre $(\Omega, \mathcal{M})$.

Observação. 1) Se $\omega_1 \cap \omega_2 = \emptyset$, então $E(\omega_1)E(\omega_2) = 0$, de modo que $E(\omega_1) + E(\omega_2)$ de fato é uma projeção ortogonal.

2) Vale

$$E(\omega_1)E(\omega_2) = E(\omega_2)E(\omega_1) \quad \text{para todos } \omega_1, \omega_2 \in \mathcal{M}.$$

3) Se $\{\omega_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{M}$ são dois a dois disjuntos, então em geral $\sum_{n=1}^{+\infty} E(\omega_n)$ não converge em geral em $L(H)$. (Se p é uma projeção ortogonal não nula, então $\|p\| = 1$.)

4) Segue de (5) que para todo $x \in H$,

$$E_{x,x}(\omega) = \langle E(\omega)x, x \rangle = \|E(\omega)x\|^2 \geq 0, \quad \text{para todo } \omega \in \mathcal{M}.$$

Portanto fixado $x \in H$, a função $\omega \mapsto E_{x,x}(\omega)$ é uma medida finita em $(\Omega, \mathcal{M})$, com $E_{x,x}(\Omega) = \|x\|^2$.

Lema 10.4. *Se $E : \mathcal{M} \rightarrow L(H)$ é uma resolução da identidade e se $x \in H$, então*

$$\begin{aligned} \mathcal{M} &\rightarrow H \\ \omega &\mapsto E(\omega)x \end{aligned}$$

é uma “medida” em $(\Omega, \mathcal{M})$ a valores em H , pois se $\{\omega_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{M}$ são dois a dois disjuntos, então

$$E\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \omega_n\right)x = \sum_{n=1}^{+\infty} E(\omega_n)x.$$

Provaremos esse Lema depois.

Lema 10.5. *Se $\{\omega_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ são tais que $E(\omega_n) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, então*

$$E\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \omega_n\right) = 0.$$

Demonstração. Fixado $x \in H$, vimos que $\omega \mapsto \langle E(\omega)x, x \rangle$ é uma medida de fato. Como também $E(\bigcup \omega_n)$ é uma projeção ortogonal, temos

$$\left\| E\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} \omega_n\right)x \right\|^2 = \left\langle E\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} \omega_n\right)x, x \right\rangle = \sum_{n=1}^{+\infty} \langle E(\omega_n)x, x \rangle = 0$$

para todo $x \in H$, isto é; $E(\bigcup \omega_n) = 0$. □

Observação. Segue então que se $\omega' \subseteq \omega$ com $\omega, \omega' \in \mathcal{M}$, e vale $E(\omega) = 0$, então $E(\omega') = 0$.

Demonstração do Lema 10.4. Se $y \in H$, defina

$$\Lambda_N(y) \doteq \sum_{n=1}^N \langle y, E(\omega_n)x \rangle;$$

temos $\Lambda_N \in H'$, e fazendo $N \rightarrow +\infty$,

$$\Lambda_N(y) \rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} \langle y, E(\omega_n)x \rangle = \overline{E_{x,y} \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \omega_n \right)}.$$

Pelo Princípio da Limitação Uniforme, existe $M > 0$ tal que

$$\|\Lambda_N\| \leq M \quad \text{para todo } N \in \mathbb{N}.$$

Agora $E(\omega_n)x \perp E(\omega_m)x$ se $n \neq m$ pois $E(\omega_n)E(\omega_m) = 0$. Logo

$$M^2 \geq \|\Lambda_N\|^2 = \left\| \sum_{n=1}^N E(\omega_n)x \right\|^2 = \sum_{n=1}^N \|E(\omega_n)x\|^2 \quad \text{para todo } N \in \mathbb{N}.$$

Assim $\sum_{n=1}^{+\infty} \|E(\omega_n)x\|^2 < \infty$. Mas então dado $\varepsilon > 0$, existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\text{se } n \geq N_0 \text{ e } p \in \mathbb{N}, \quad \text{então} \quad \left\| \sum_{j=n}^{n+p} E(\omega_j)x \right\|^2 = \sum_{j=n}^{n+p} \|E(\omega_j)x\|^2 \leq \varepsilon^2.$$

Assim segue do Critério de Cauchy que $\sum_{n=1}^{+\infty} E(\omega_n)x$ é somável. Além disso,

$$\begin{aligned} \left\langle \sum_{n=1}^{+\infty} E(\omega_n)x - E \left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} \omega_n \right) x, y \right\rangle &= \sum_{n=1}^{+\infty} E_{x,y}(\omega_n) - \left\langle E \left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} \omega_n \right) x, y \right\rangle \\ &= 0 \end{aligned}$$

para todos $x, y \in H$, usando que $E_{x,y}$ é uma medida. □

10.2 Medidas complexas

Sejam $(X, \mathcal{B})$ um espaço mensurável e $\nu : \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{C}$ uma medida complexa sobre $(X, \mathcal{B})$.

O caso real. Se $\nu(\mathcal{B}) \subseteq \mathbb{R}$ (isto é, $\nu : \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{R}$).

Exemplo. Por exemplo, dados $(X, \mathcal{B}, \mu)$ um espaço de medida (comum; nunca usamos essa notação de terna a não ser que μ seja uma medida comum positiva) e $f \in L^1(X)$, podemos definir uma medida a valores em $\mathbb{R}$ a partir de f e μ da seguinte forma:

$$\nu(B) = \int_B f \, d\mu.$$

Seja $P \doteq \{x \in X : f(x) \geq 0\}$. Defina

$$\nu_+(B) \doteq \nu(B \cap P) \geq 0 \quad \text{e} \quad \nu_-(B) \doteq -\nu(B \cap (X \setminus P)) \geq 0$$

medidas finitas sobre $(X, \mathcal{B})$. Então

$$\nu = \nu_+ - \nu_- \quad \text{e} \quad |\nu| = \nu_+ + \nu_-$$

isto é; a medida com sinal ν é diferença entre as duas medidas positivas ν_+ e ν_- . Além disso $|\nu|$ é a variação total de ν ;

$$|\nu|(B) = \int_B |f| \, d\mu.$$

Teorema 10.6 (de decomposição de Hahn). *Se $\nu(\mathcal{B}) \subseteq \mathbb{R}$, existe $P \in \mathcal{B}$ tal que*

$$\nu(B \cap P) \geq 0 \quad \text{e} \quad \nu(B \cap (X \setminus P)) \leq 0 \quad \text{para todo } B \in \mathcal{B}.$$

Consequentemente, se

$$\nu_+(B) \doteq \nu(P \cap B) \quad \text{e} \quad \nu_-(B) \doteq -\nu((X \setminus P) \cap B) \quad \text{para todo } B \in \mathcal{B},$$

então ν_+ e ν_- são medidas finitas sobre $(X, \mathcal{B})$ e $\nu = \nu_+ - \nu_-$. A medida $|\nu| \doteq \nu_+ + \nu_-$ denomina-se a variação total de ν , e vale

$$|\nu|(B) = \sup \left\{ \sum_{j=1}^n |\nu(B_j)|; B_j \in \mathcal{B} \text{ dois a dois disjuntos e } \bigcup_{j=1}^n B_j = B \right\}. \quad (20)$$

Caso geral (ν complexa). Temos

$$\nu = \nu_1 + i\nu_2 = (\nu_1^+ - \nu_1^-) + i(\nu_2^+ - \nu_2^-)$$

(*decomposição de Jordan* de ν). A medida $|\nu|$, a variação total de ν , é dada por (20) (a mesma fórmula do caso real).

Fato. Tem-se $f \in L^1(X, \mathcal{B}, |\nu|)$ se, e somente se $f \in L^1(X, \mathcal{B}, \nu_j^\pm)$, para $j = 1, 2$.

Nesse caso, definimos a integral de f com relação à medida complexa ν da seguinte forma:

$$\int_X f \, d\nu \doteq \left(\int_X f \, d\nu_1^+ - \int_X f \, d\nu_1^- \right) + i \left(\int_X f \, d\nu_2^+ - \int_X f \, d\nu_2^- \right).$$

Observação. 1) Se $f \doteq \sum_{j=1}^N c_j \chi_{B_j}$ simples ($c_j \in \mathbb{C}$ e $B_j \in \mathcal{B}$), então

$$\int_X f \, d\nu = \sum_{j=1}^N c_j \nu(B_j).$$

2) Vale

$$\left| \int_X f \, d\nu \right| \leq \int_X |f| \, d|\nu|.$$

10.3 Preliminares para o Teorema espectral

Sejam $(\Omega, \mathcal{M})$ um espaço mensurável, H um espaço de Hilbert, $\omega \mapsto E(\omega)$ uma resolução da identidade sobre Ω . Vamos definir $L^\infty(E)$ álgebra de Banach. Seja $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ uma função $\mathcal{M}$ -mensurável. Existe um maior aberto $V \subseteq \mathbb{C}$ tal que $E(f^{-1}(V)) = 0$. De fato, se $\{D_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ é uma sequência de discos em $\mathbb{C}$ que forma uma base para a topologia de $\mathbb{C}$, tomamos

$$J \doteq \{j \in \mathbb{N} : E(f^{-1}(D_j)) = 0\} \quad \text{e} \quad V \doteq \bigcup_{j \in J} D_j.$$

Como J é enumerável e $E(f^{-1}(D_j)) = 0$ para todo $j \in J$, temos que $E(f^{-1}(V)) = E(\bigcup_{j \in J} f^{-1}(D_j)) = 0$, usando o Lema 10.5.

Definição. A função f é dita *essencialmente limitada* se $\mathbb{C} \setminus V$ é compacto em $\mathbb{C}$.

Assim, definimos o espaço $L^\infty(E)$ como sendo o conjunto das funções mensuráveis essencialmente limitadas. Nesse espaço, definimos a norma

$$\|f\|_\infty = \sup_{\lambda \in \mathbb{C} \setminus V} |\lambda|.$$

Observação. Sejam $x, y \in H$; temos $|E_{x,y}|(f^{-1}(V)) = 0$. De fato,

$$\begin{aligned} & |E_{x,y}|(f^{-1}(V)) \\ &= \sup \left\{ \sum_{j=1}^N |E_{x,y}(\omega_j)| : \omega_j \text{ dois a dois disjuntos, e } \bigcup_{j=1}^N \omega_j = f^{-1}(V) \right\} \\ &= 0, \end{aligned}$$

pois se $\omega_j \subseteq f^{-1}(V)$, então $E(\omega_j) = 0$ para todos $j = 1, \dots, N$. Assim $E_{x,y}(\omega_j) = 0$ para todo $j = 1, \dots, N$.

Logo se $f \in L^\infty(E)$, então $f \in L^\infty(\Omega, \mathcal{M}, |E_{x,y}|)$ para todos $x, y \in H$, o que nos permite calcular a integral

$$\int_{\Omega} f \, dE_{x,y} \quad \text{para todos } x, y \in H.$$

Teorema 10.7. *Sejam $(\Omega, \mathcal{M})$ um espaço mensurável, H um espaço de Hilbert e E uma resolução da identidade. Então existe uma única função $\psi : L^\infty(E) \rightarrow L(H)$ tal que*

$$\langle \psi(f)x, y \rangle = \int_{\Omega} f \, dE_{x,y} \quad \text{para todos } x, y \in H.$$

Essa função ψ é um homomorfismo de álgebras, e uma isometria sobre uma subálgebra fechada e normal em $L(H)$. Além disso,

$$(1) \quad \psi(f)^* = \psi(\bar{f});$$

$$(2) \quad \text{se } x \in H, \text{ então}$$

$$\|\psi(f)x\|^2 = \int_{\Omega} |f|^2 \, dE_{x,x};$$

$$(3) \quad \text{se } Q \in L(H), \text{ então } Q \text{ comuta com } \psi(f) \text{ para todo } f \in L^\infty(E) \text{ se, e somente se } Q \text{ comuta com } E(\omega) \text{ para todo } \omega \in \mathcal{M}.$$

Observação. Funções simples são densas em $L^\infty(E)$.

Sejam $f \in L^\infty(E)$ e $\varepsilon > 0$. Então existe $K \subseteq \mathbb{C}$ compacto tal que $E(f^{-1}(\mathbb{C} \setminus K)) = 0$. Existem $B_1, \dots, B_N$ bolas fechadas de diâmetro menor do que ε tais que $K \subseteq B_1 \cup \dots \cup B_N$. Defina

$$K_1 \doteq B_1 \cap K, \quad K_2 \doteq (B_2 \cap K) \setminus K_1, \quad \dots, \\ K_N \doteq (B_N \cap K) \setminus (K_1 \cup \dots \cup K_{N-1}).$$

Temos então que $K = \bigcup_{n=1}^N K_n$, e essa união é disjunta. Seja $\omega_j \doteq f^{-1}(K_j)$, para $j = 1, \dots, N$. Para cada j escolho $p_j \in \omega_j$ e tomo $\lambda_j \doteq f(p_j) \in K_j$, $j = 1, \dots, N$. Defina

$$s \doteq \sum_{j=1}^N \lambda_j \chi_{\omega_j}.$$

Dessa forma é fácil ver que $\|f - s\|_\infty \leq \varepsilon$.

Demonstração do Teorema 10.7. Vamos definir ψ primeiramente sobre o subespaço das funções simples em $L^\infty(E)$, de modo que sobre esse espaço ela já satisfaça todas as propriedades necessárias. Seja $\omega_1, \dots, \omega_N$ uma partição de Ω (de conjuntos mensuráveis) e seja $s \doteq \sum_{j=1}^N \alpha_j \chi_{\omega_j}$. Defino

$$\psi(s) \doteq \sum_{j=1}^N \alpha_j E(\omega_j).$$

Então

$$\psi(\bar{s}) = \psi\left(\sum_{j=1}^N \bar{\alpha}_j \chi_{\omega_j}\right) = \sum_{j=1}^N \bar{\alpha}_j E(\omega_j) = \left(\sum_{j=1}^N \alpha_j E(\omega_j)\right)^* = \psi(s)^*.$$

Sejam $\omega'_1, \dots, \omega'_M$ uma outra partição de Ω e $s' \doteq \sum_{j=1}^M \alpha'_j \chi_{\omega'_j}$. Temos

$$s \cdot s' = \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^M \alpha_j \alpha'_k \chi_{\omega_j \cap \omega'_k}.$$

Os elementos $\omega_j \cap \omega'_k$, $j = 1, \dots, N$, $k = 1, \dots, M$ também formam uma partição de Ω , de modo que

$$\psi(ss') = \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^M \alpha_j \alpha'_k E(\omega_j \cap \omega'_k) = \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^M \alpha_j \alpha'_k E(\omega_j) E(\omega'_k) = \psi(s) \psi(s').$$

Do mesmo modo mostra-se que ψ é linear sobre o espaço das funções simples, e assim ψ é um homomorfismo de álgebras nesse espaço.

Agora se $x, y \in H$ e $s = \sum_{j=1}^N \alpha_j \chi_{\omega_j}$ é simples,

$$\begin{aligned} \langle \psi(s)x, y \rangle &= \left\langle \sum_{j=1}^N \alpha_j E(\omega_j)x, y \right\rangle = \sum_{j=1}^N \alpha_j \langle E(\omega_j)x, y \rangle = \sum_{j=1}^N \alpha_j E_{x,y}(\omega_j) \\ &= \int_{\Omega} s \, dE_{x,y}. \end{aligned}$$

Mais ainda, $\bar{s} = \sum_{j=1}^N \bar{\alpha}_j \chi_{\omega_j}$, e assim $|s|^2 = s\bar{s} = \sum_{j=1}^N |\alpha_j|^2 \chi_{\omega_j}$. Logo

$$\begin{aligned} \|\psi(s)x\|^2 &= \langle \psi(s)x, \psi(s)x \rangle = \langle \psi(s)^* \psi(s)x, x \rangle = \langle \psi(\bar{s})\psi(s)x, x \rangle \\ &= \langle \psi(\bar{s}s)x, x \rangle = \int_{\Omega} |s|^2 \, dE_{x,x}. \end{aligned}$$

É fácil ver que um operador $Q \in L(H)$ comuta com $\psi(s)$ para todo s simples se, e somente se Q comuta com $E(\omega)$ para todo $\omega \in \mathcal{M}$ (pela definição de $\psi(s)$).

Vamos mostrar agora que $\|\psi(s)\| = \|s\|_\infty$ para todo s simples. Temos

$$\|\psi(s)x\|^2 = \int_{\Omega} |s|^2 dE_{x,x} \leq \|s\|_\infty^2 E_{x,x}(\Omega) = \|s\|_\infty^2 \langle E(\Omega)x, x \rangle = \|s\|_\infty^2 \|x\|^2,$$

logo $\|\psi(s)\| \leq \|s\|_\infty$. Seja agora $x_0 \in \text{Im } E(\omega_j)$. Como $E(\omega_j)$ são projeções, e $\omega_i \cap \omega_j = \emptyset$ se $i \neq j$, temos $E(\omega_j)x_0 = x_0$, e $E(\omega_i)x_0 = 0$ se $i \neq j$. Portanto

$$\psi(s)x_0 = \sum_{k=1}^N \alpha_k E(\omega_k)x_0 = \alpha_j x_0.$$

Escolhendo $j \in \{1, \dots, N\}$ tal que $\|s\|_\infty = |\alpha_j|$ e $x_0 \in \text{Im } E(\omega_j)$, temos então

$$\|\psi(s)x_0\| = |\alpha_j| \|x_0\| = \|s\|_\infty \|x_0\|$$

de modo que $\|\psi(s)\| \geq \|s\|_\infty$, e ψ é uma isometria.

Agora fora do caso das funções simples: para $f \in L^\infty(E)$, defino

$$\psi(f) = \lim_{j \rightarrow +\infty} \psi(s_j)$$

onde $(s_j)_{j \in \mathbb{N}}$ é uma sequência de funções simples tal que $s_j \rightarrow f$ em $L^\infty(E)$. O limite acima sempre existe (e é único) pelo Critério de Cauchy, pois

$$\|\psi(s_j) - \psi(s_k)\| = \|s_j - s_k\|_\infty, \quad \text{para todos } j, k \in \mathbb{N}.$$

Todas as propriedades que pedimos da função ψ em $L^\infty(E)$ seguem do fato de que essas propriedades valem para funções simples, passando ao limite. $\square$

Seja X um espaço topológico. Denotamos por $\mathcal{B}(X)$ a σ -álgebra gerada pelos abertos de X . Dizemos que $B \subseteq X$ é *boreliano* se $X \in \mathcal{B}(X)$.

Uma medida complexa ν sobre $(X, \mathcal{B}(X))$ é dita *regular* se para todo $B \in \mathcal{B}(X)$ e todo $\varepsilon > 0$ existem K compacto e U aberto em X tais que $K \subseteq B \subseteq U$ e

$$|\nu(Y)| < \varepsilon \quad \text{para todo } Y \in \mathcal{B}(X), \text{ com } Y \subseteq U \cap (X \setminus K).$$

Notação. $\nu \in \mathbb{M}(X)$.

Teorema 10.8 (Riesz). *Seja X um espaço compacto Hausdorff. Então dada $\nu \in \mathbb{M}(X)$, a expressão $L_\nu : C(X) \rightarrow \mathbb{C}$ dada por*

$$L_\nu(f) = \int_X f d\nu$$

é um elemento de $C(X)'$ com norma $\|L_\nu\| = |\nu|(X)$. Além disso, se $L \in C(X)'$, existe uma única $\nu \in \mathbb{M}(X)$ tal que $L = L_\nu$.

Observação. Não faremos a demonstração desse Teorema.

Observação. (Para a demonstração do próximo Teorema.) Seja A uma álgebra de Banach. Se $x \in A$, podemos definir

$$e^x \doteq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!},$$

sendo que a soma é convergente pois A é de Banach. Temos $e^0 = e$ (a identidade de A), e se $xy = yx$, vale $e^{x+y} = e^x e^y$. Em particular, $e^x \in G(A)$ para todo $x \in A$.

No caso em que A é uma C^* -álgebra, tem-se $(e^x)^* = e^{x^*}$ pois a involução é contínua, e assim comuta com a série que define e^x .

Mais um preliminar:

Teorema 10.9. *Sejam H um espaço de Hilbert e $M, N, T \in L(H)$ tais que $MT = TN$. Se M e N são normais, então $M^*T = TN^*$.*

Demonstração. Primeiro observe que se $S \in L(H)$, então $\|e^{S-S^*}\| = 1$. De fato, $(e^{S-S^*})^* = e^{S^*-S} = (e^{S-S^*})^{-1}$ (usando a observação anterior), logo e^{S-S^*} é um operador unitário e portanto tem norma igual a 1.

Note que

$$M^k T = T N^k \quad \text{para todo } k \geq 0.$$

Então dividindo por $k!$ e somando para todo k , obtemos $e^M T = T e^N$, isto é; $T = e^M T e^{-N}$. Assim

$$e^{-M^*} T e^{N^*} = e^{-M^*} (e^M T e^{-N}) e^{N^*} = e^{M-M^*} T e^{N^*-N}$$

pois M e N são normais. Como $\|e^{M-M^*}\| = \|e^{N^*-N}\| = 1$, segue que

$$\|e^{-M^*} T e^{N^*}\| \leq \|T\|.$$

Conclusão: se $MT = TN$ e M, N são normais, então $\|e^{-M^*} T e^{N^*}\| \leq \|T\|$.

Agora,

$$(\bar{\lambda}M)T = T(\bar{\lambda}N) \quad \text{para todo } \lambda \in \mathbb{C}$$

e $\bar{\lambda}M, \bar{\lambda}N$ são normais. Portanto

$$\|e^{-\lambda M^*} T e^{\lambda N^*}\| \leq \|T\| \quad \text{para todo } \lambda \in \mathbb{C}. \quad (21)$$

Defina $f : \mathbb{C} \rightarrow L(H)$ por

$$f(\lambda) = e^{-\lambda M^*} T e^{\lambda N^*}.$$

Temos $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C}, L(H))$, e vimos que f é limitada em (21). Pelo Teorema de Liouville, segue que $f(\lambda) = f(0)$, isto é;

$$e^{\lambda M^*} T = T e^{\lambda N^*}, \quad \text{para todo } \lambda \in \mathbb{C}.$$

Derivando em λ temos $M^* e^{\lambda M^*} T = T N^* e^{\lambda N^*}$, e colocando $\lambda = 0$ obtemos $M^* T = T N^*$. $\square$

10.4 O Teorema Espectral para operadores normais

Teorema 10.10. *Sejam H um espaço de Hilbert e $A \subseteq L(H)$ uma subálgebra fechada e normal. Seja $\Delta = \Delta_A$ o espaço de Gelfand de A (o espaço dos homomorfismos de A). Então existe uma única resolução da identidade E definida sobre os borelianos de Δ , com $E_{x,y}$ regular para todos $x, y \in H$, e tal que*

(1) *para todo $T \in A$, vale*

$$T = \int_{\Delta} \hat{T} dE; \quad (22)$$

(2) *$E(\omega) \neq 0$ para todo $\omega \subseteq \Delta$ aberto não-vazio;*

(3) *$Q \in L(H)$ comuta com todo elemento de A se, e somente se Q comuta com $E(\omega)$ para todo $\omega \in \mathcal{B}(\Delta)$.*

Notação. A equação (22) é uma notação curta para a igualdade

$$\langle Tx, y \rangle = \int_{\Delta} \hat{T} dE_{x,y} \quad \text{para todos } x, y \in H.$$

Demonstração. Unicidade em (1): temos que a aplicação

$$\begin{aligned} A &\rightarrow C(\Delta) \\ T &\mapsto \hat{T} \end{aligned}$$

é bijetora pelo Teorema de Gelfand-Naimark, isto é; $C(\Delta) = \{\hat{T} : T \in A\}$, e portanto as integrais

$$\int_{\Delta} \hat{T} dE_{x,y} \quad \text{para } T \in A$$

determinam $E_{x,y}$ pelo Teorema de Riesz. Mas $\langle E(\omega)x, y \rangle = E_{x,y}(\omega)$, e portanto essas integrais, percorrendo $x, y \in H$, determinam unicamente $E(\omega)$, para todo $\omega \in \mathcal{B}(\Delta)$.

Existência de E : fixados $x, y \in H$, formo o funcional

$$\begin{aligned} C(\Delta) &\rightarrow \mathbb{C} \\ \hat{T} &\mapsto \langle Tx, y \rangle, \end{aligned}$$

que é limitado pois

$$|\langle Tx, y \rangle| \leq \|T\| \|x\| \|y\| = \|\hat{T}\|_{\infty} \|x\| \|y\|.$$

Pelo Teorema de Riesz, existe $\mu_{x,y}$ medida regular complexa sobre Δ tal que

$$\langle Tx, y \rangle = \int_{\Delta} \hat{T} d\mu_{x,y},$$

e $|\mu_{x,y}|(\Delta) \leq \|x\| \|y\|$.

Vimos que T é autoadjunta se, e somente se $\hat{T}$ é real, e nesse caso

$$\overline{\int_{\Delta} \hat{T} d\mu_{x,y}} = \overline{\langle Tx, y \rangle} = \langle y, Tx \rangle = \langle Ty, x \rangle = \int_{\Delta} \hat{T} d\mu_{y,x}.$$

Também,

$$\int_{\Delta} \hat{T} d\overline{\mu_{x,y}} = \int_{\Delta} \overline{\hat{T}} d\overline{\mu_{x,y}} = \overline{\int_{\Delta} \hat{T} d\mu_{x,y}} = \int_{\Delta} \hat{T} d\mu_{y,x}.$$

Isto é, para toda $f \in C(\Delta)$ real, temos

$$\int_{\Delta} f d\overline{\mu_{x,y}} = \int_{\Delta} f d\mu_{y,x},$$

mas podemos então deduzir a mesma igualdade para toda $f \in C(\Delta)$, usando a igualdade para a parte real e a parte imaginária. Dessa forma, segue do Teorema de Riesz que $\overline{\mu_{x,y}} = \mu_{y,x}$.

Seja

$$\mathcal{F}(\Delta) \doteq \{f : \Delta \rightarrow \mathbb{C} : f \text{ é } \mathcal{B}(\Delta)\text{-mensurável e limitada}\}.$$

Observe que fixado $y \in H$, dados $T \in A$, $x_1, x_2 \in H$, e $\alpha \in \mathbb{C}$ temos

$$\begin{aligned} \int_{\Delta} \hat{T} d\mu_{\alpha x_1 + x_2, y} &= \langle T(\alpha x_1 + x_2), y \rangle = \alpha \langle Tx_1, y \rangle + \langle Tx_2, y \rangle \\ &= \int_{\Delta} \hat{T} d(\alpha \mu_{x_1, y} + \mu_{x_2, y}). \end{aligned}$$

Conclusão: fixado $y \in H$, a função $x \mapsto \mu_{x,y}$ é linear no espaço das medidas. Da mesma forma, fixado $x \in H$ temos que $y \mapsto \mu_{x,y}$ é antilinear.

Para $f \in \mathcal{F}(\Delta)$ fixada, defina

$$\begin{aligned} \Lambda : H \times H &\rightarrow \mathbb{C} \\ (x, y) &\mapsto \int_{\Delta} f d\mu_{x,y}. \end{aligned}$$

Temos

$$|\Lambda(x, y)| \leq (\sup |f|) |\mu_{x,y}|(\Delta) \leq (\sup |f|) \|x\| \|y\|, \quad \text{para todos } x, y \in H.$$

Portanto (exercício da lista 3) existe $\Phi(f) \in L(H)$ tal que

$$\langle \Phi(f)x, y \rangle = \int_{\Delta} f \, d\mu_{x,y}, \quad \text{para todos } x, y \in H.$$

Vemos também que essa função $\Phi : \mathcal{F}(\Delta) \rightarrow L(H)$ que definimos é linear. Se $T \in A$, temos

$$\langle \Phi(\hat{T})x, y \rangle = \int_{\Delta} \hat{T} \, d\mu_{x,y} = \langle Tx, y \rangle,$$

portanto Φ é uma extensão a $\mathcal{F}(\Delta)$ da transformada de Gelfand inversa!

Se $f \in \mathcal{F}(\Delta)$ é real,

$$\langle y, \Phi(f)x \rangle = \overline{\langle \Phi(f)x, y \rangle} = \overline{\int_{\Delta} f \, d\mu_{x,y}} = \int_{\Delta} f \, d\mu_{y,x} = \langle \Phi(f)y, x \rangle$$

para todos $x, y \in H$, portanto $\Phi(f)$ é autoadjunta.

Afirmção. $\Phi(fg) = \Phi(f)\Phi(g)$ para todos $f, g \in \mathcal{F}(\Delta)$.

De fato, se $S, T \in A$,

$$\int_{\Delta} \hat{S}\hat{T} \, d\mu_{x,y} = \int_{\Delta} \widehat{ST} \, d\mu_{x,y} = \langle STx, y \rangle = \int_{\Delta} \hat{S} \, d\mu_{Tx,y}$$

Dessa forma $\hat{T} \, d\mu_{x,y} = d\mu_{Tx,y}$ pelo Teorema de Riesz. Assim, para todo $f \in \mathcal{F}(\Delta)$,

$$\int_{\Delta} f\hat{T} \, d\mu_{x,y} = \int_{\Delta} f \, d\mu_{Tx,y},$$

mas

$$\int_{\Delta} f \, d\mu_{Tx,y} = \langle \Phi(f)Tx, y \rangle = \langle Tx, \Phi(f)^*y \rangle = \int_{\Delta} \hat{T} \, d\mu_{x, \Phi(f)^*y}.$$

Como isso vale para toda $T \in A$, temos que $f \, d\mu_{x,y} = d\mu_{x, \Phi(f)^*y}$, e portanto

$$\begin{aligned} \langle \Phi(fg)x, y \rangle &= \int_{\Delta} gf \, d\mu_{x,y} = \int_{\Delta} g \, d\mu_{x, \Phi(f)^*y} = \langle \Phi(g)x, \Phi(f)^*y \rangle \\ &= \langle \Phi(f)\Phi(g)x, y \rangle, \end{aligned}$$

como queríamos demonstrar.

Resumo: temos $\Phi : \mathcal{F}(\Delta) \rightarrow L(H)$ linear e $\mu_{x,y}$ medidas complexas regulares tais que

$$\langle \Phi(f)x, y \rangle = \int_{\Delta} f \, d\mu_{x,y} \quad \text{para todos } x, y \in H, f \in \mathcal{F}(\Delta).$$

Além disso;

- $\Phi(f)$ é autoadjunto se f é real;
- $\Phi(\hat{T}) = T$ para todo $T \in A$; e
- $\Phi(fg) = \Phi(f)\Phi(g)$ para todos $f, g \in \mathcal{F}(\Delta)$.

Dado $\omega \in \mathcal{B}(\Delta)$, defino

$$E(\omega) \doteq \Phi(\chi_\omega).$$

Assim $E(\omega)$ é autoadjunto para todo $\omega \in \mathcal{B}(\Delta)$. Se $\omega, \omega' \in \mathcal{B}(\Delta)$, temos

$$E(\omega \cap \omega') = \Phi(\chi_{\omega \cap \omega'}) = \Phi(\chi_\omega \chi_{\omega'}) = E(\omega)E(\omega').$$

Colocando $\omega' = \omega$, temos $E(\omega) = E(\omega)^2$, de modo que $E(\omega)$ são projeções ortogonais. Se $\omega \cap \omega' = \emptyset$, temos

$$E(\omega \cup \omega') = \Phi(\chi_{\omega \cup \omega'}) = \Phi(\chi_\omega + \chi_{\omega'}) = E(\omega) + E(\omega').$$

Além disso,

$$E(\emptyset) = 0 \quad \text{e} \quad E(\Delta) = \Phi(1) = \Phi(\hat{\text{id}}) = \text{id}.$$

Resta mostrar que $\mu_{x,y}(\omega) = \langle E(\omega)x, y \rangle$ para todos $x, y \in H$ (e assim teremos $T = \int_\Delta \hat{T} dE_{x,y}$). De fato,

$$\langle E(\omega)x, y \rangle = \langle \Phi(\chi_\omega)x, y \rangle = \int_\Delta \chi_\omega d\mu_{x,y} = \mu_{x,y}(\omega)$$

para todo $\omega \in \mathcal{B}(\Delta)$.

(2): Seja $\omega \subseteq \Delta$ aberto não-vazio. Então existe $f \in C(\Delta)$ não-nula tal que $\text{supp } f \subseteq \omega$. Agora, existe $T \in L(H)$ tal que $\hat{T} = f$. Como $f \neq 0$ temos $T \neq 0$, e assim existem $x, y \in H$ tais que $\langle Tx, y \rangle \neq 0$. Assim

$$0 < |\langle Tx, y \rangle| = \left| \int_\Delta \hat{T} dE_{x,y} \right| \leq \int_\omega |f| d|E_{x,y}| \leq \|f\|_\infty |E_{x,y}(\omega)|.$$

Logo $E_{x,y}(\omega) \neq 0$, e assim $E(\omega) \neq 0$.

(3): Sejam $S \in L(H)$, $x, y \in H$, $\omega \in \mathcal{B}(\Delta)$ e $T \in A$. Então

$$\langle STx, y \rangle = \langle Tx, S^*y \rangle = \int_\Delta \hat{T} dE_{x,S^*y}; \quad \text{e} \quad \langle TSx, y \rangle = \int_\Delta \hat{T} dE_{Sx,y}$$

e também

$$\langle SE(\omega)x, y \rangle = E_{x,S^*y}(\omega) \quad \text{e} \quad \langle E(\omega)Sx, y \rangle = E_{Sx,y}(\omega).$$

Dessas igualdades, é fácil deduzir (3). □

Corolário 10.11 (Teorema espectral para operadores normais). *Sejam H um espaço de Hilbert e $T \in L(H)$ um operador normal. Então existe uma única resolução da identidade E sobre $(\sigma(T), \mathcal{B}(\sigma(T)))$ tal que $E_{x,y}$ é regular para todos $x, y \in H$, e*

$$T = \int_{\sigma(T)} \lambda \, dE(\lambda).$$

Além disso, se $S \in L(H)$ comuta com T , então S comuta com $E(\omega)$ para todo $\omega \in \mathcal{B}(\sigma(T))$.

Demonstração. Seja

$$A \doteq \overline{\{p(T, T^*) : p(X, Y) \in \mathbb{C}[X, Y]\}} \subseteq L(H).$$

Temos que A é uma álgebra normal fechada em $L(H)$. Já vimos também que $\sigma(T) = \sigma_A(T)$, e a transformada de Gelfand é um isomorfismo entre A e $C(\Delta)$ (Gelfand-Naimark). Como $\{p(T, T^*) : p(X, Y) \in \mathbb{C}[X, Y]\}$ é denso em A , já vimos que $\hat{T} : \Delta \rightarrow \sigma(T)$ é um homeomorfismo entre espaços topológicos compactos. Assim

$$\begin{aligned} C(\sigma(T)) &\rightarrow C(\Delta) \\ f &\mapsto f \circ \hat{T} \end{aligned}$$

é um isomorfismo isométrico de álgebras, de modo que $A \simeq C(\sigma(T))$.

Seja $\tilde{E}$ a única resolução da identidade sobre $(\Delta, \mathcal{B}(\Delta))$ dada pelo Teorema anterior, tal que

$$\langle Rx, y \rangle = \int_{\Delta} \hat{R} \, d\tilde{E}_{x,y} \quad \text{para todo } R \in A.$$

Dado $\omega \in \mathcal{B}(\sigma(T))$, defino $E(\omega) \doteq \tilde{E}(\hat{T}^{-1}(\omega))$. Teremos que E é também uma resolução da identidade, e

$$\langle Tx, y \rangle = \int_{\Delta} \hat{T} \, d\tilde{E}_{x,y} = \int_{\sigma(T)} \lambda \, dE_{x,y}.$$

Unicidade de E : temos que T determina o valor da integral

$$\int_{\sigma(T)} \lambda \, dE_{x,y}(\lambda) \quad (= \langle Tx, y \rangle)$$

Logo T também determina o valor de todas as integrais

$$\int_{\sigma(T)} p(\lambda, \bar{\lambda}) \, dE_{x,y}(\lambda) \quad (= \langle p(T, T^*)x, y \rangle)$$

para todo $p(X, Y) \in \mathbb{C}[X, Y]$. Logo T determina todas as integrais

$$\int_{\sigma(T)} f(\lambda) dE_{x,y}(\lambda)$$

para todo $f \in C(\sigma(T))$, pelo Teorema de Stone-Weierstrass, de modo que T determina $E_{x,y}$, para todos $x, y \in H$. Portanto E é única.

Se $S \in L(H)$ comuta com T , então vimos que $ST^* = T^*S$ pois T é normal. Assim, S comuta com todo elemento de A , e segue então do Teorema anterior que S comuta com $E(\omega)$ para todo $\omega \in \mathcal{B}(\sigma(T))$. $\square$

11 Aplicações

11.1 O cálculo simbólico

O seguinte é resultado da demonstração Teorema Espectral geral, em particular das propriedades da função Φ , que traduzimos aqui para o caso de um operador normal.

Sejam H um espaço de Hilbert e $T \in L(H)$ um operador normal. Seja

$$\mathcal{F}(\sigma(T)) \doteq \{f : \sigma(T) \rightarrow \mathbb{C} : f \text{ é Borel-mensurável e limitado}\}.$$

Para cada $f \in \mathcal{F}(\sigma(T))$, temos uma classe $[f] \in L^\infty(E)$, e podemos definir

$$f(T) \doteq \int_{\sigma(T)} f(\lambda) dE(\lambda) \in L(H).$$

Temos que $f(T)^* = \overline{f}(T)$, e assim $f(T)$ é normal. A aplicação

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(\sigma(T)) &\rightarrow L(H) \\ f &\mapsto f(T) \end{aligned}$$

é um homomorfismo de álgebras, e

$$\|f(T)\| \leq \sup_{\sigma(T)} |f|.$$

e vale a igualdade se f é contínua (pois no espaço das funções contínuas, Φ é a inversa da transformada de Gelfand, que é uma isometria).

Finalmente, se $S \in L(H)$ e $ST = TS$, então

$$Sf(T) = f(T)S \quad \text{para todo } f \in \mathcal{F}(\sigma(T)).$$

Observação. 1) Se $\omega \in \sigma(T)$, então $\chi_\omega(T) = E(\omega)$. De fato,

$$\langle \chi_\omega(T)x, y \rangle = \int_{\sigma(T)} \chi_\omega(\lambda) dE_{x,y}(\lambda) = E_{x,y}(\omega) = \langle E(\omega)x, y \rangle$$

para todos $x, y \in H$, portanto $\chi_\omega(T) = E(\omega)$.

2) Se $f \in \mathcal{F}(\sigma(T))$, $\omega \in \mathcal{B}(\sigma(T))$, então $f(T)E(\omega) = (f\chi_\omega)(T)$.

Teorema 11.1. *Se $T \in L(H)$ é normal, então*

$$\|T\| = \sup_{\|x\| \leq 1} |\langle Tx, x \rangle|.$$

Demonstração. É claro que

$$|\langle Tx, x \rangle| \leq \|T\| \quad \text{se } \|x\| \leq 1,$$

logo $\sup_{\|x\| \leq 1} |\langle Tx, x \rangle| \leq \|T\|$.

Temos que mostrar que dado $\varepsilon > 0$, existe $x_0 \in H$ com $\|x_0\| = 1$ tal que $\|T\| - \varepsilon \leq |\langle Tx_0, x_0 \rangle|$. Escolho $\lambda_0 \in \sigma(T)$ tal que $|\lambda_0| = \rho(T) = \|T\|$ (existe pois $\sigma(T)$ é compacto). Seja $\omega \doteq \{\lambda \in \sigma(T) : |\lambda - \lambda_0| < \varepsilon\}$. Como ω é aberto em $\sigma(T)$, temos $E(\omega) \neq 0$, e assim existe $x_0 \in H$ com $\|x_0\| = 1$ tal que $E(\omega)x_0 = x_0$. Agora,

$$\begin{aligned} |\langle Tx_0, x_0 \rangle| &= |\langle Tx_0 - \lambda_0 x_0 + \lambda_0 x_0, x_0 \rangle| \geq |\lambda_0| - |\langle Tx_0 - \lambda_0 x_0, x_0 \rangle| \\ &\geq \|T\| - |\langle Tx_0 - \lambda_0 x_0, x_0 \rangle|. \end{aligned}$$

Basta então mostrar que $|\langle Tx_0 - \lambda_0 x_0, x_0 \rangle| \leq \varepsilon$. De fato, se $f(\lambda) \doteq \lambda - \lambda_0$, temos

$$Tx_0 - \lambda_0 x_0 = (T - \lambda_0 I)x_0 = f(T)x_0 = f(T)E(\omega)x_0 = (f\chi_\omega)(T)x_0$$

e portanto

$$\|Tx_0 - \lambda_0 x_0\| \leq \|(f\chi_\omega)(T)\| \leq \sup_{\sigma(T)} |f\chi_\omega| \leq \varepsilon. \quad \square$$

11.2 O problema do subespaço invariante

Seja E um espaço de Banach, e seja $T \in L(E)$.

Existe $F \subsetneq E$, $F \neq (0)$, subespaço fechado tal que $T(F) \subseteq F$? (P)

A resposta é *sim* se a) E tem dimensão finita, e b) se E é não separável:
a) Se a dimensão de E é finita, então T tem autovalor.

b) Se E é não-separável e $T \neq 0$, seja $x \in E$ tal que $Tx \neq 0$. Seja

$$F \doteq \overline{\{T^n x : n = 0, 1, 2, \dots\}}.$$

Então F é invariante por T , e F é separável, de modo que $F \neq E$.

A resposta para (P) em geral é *não* para espaços de Banach separáveis. Quando E é um espaço de Hilbert, o problema está em aberto.

Teorema 11.2. *Se $T \in L(H)$ é normal, então T possui um subespaço invariante não-trivial.*

Demonstração. Se $\sigma(T) = \{\lambda_0\}$, então $T = \lambda_0 I$ (escrevendo a resolução da identidade nesse caso).

Se $\sigma(T)$ tiver mais do que um ponto, existe $\omega \in \mathcal{B}(\sigma(T))$ tal que $E(\omega) \neq 0$ e $E(\sigma(T) \setminus \omega) \neq 0$ (pois nesse caso existem dois abertos disjuntos de $\sigma(T)$, e tomamos ω como sendo um deles). Seja

$$F \doteq \{E(\omega)x : x \in H\}.$$

Então $F \neq (0)$ pois $E(\omega) \neq 0$, e $F \neq H$ pois $E(\sigma(T) \setminus \omega) \neq 0$, e se $y \in F$,

$$Ty = TE(\omega)y = E(\omega)Ty \in F,$$

logo F é T -invariante. □

11.3 Operadores normais

Teorema 11.3. *Seja $T \in L(H)$ normal.*

(a) *T é hermitiano se, e somente se $\sigma(T) \subseteq \mathbb{R}$.*

(b) *T é unitário se, e somente se $\sigma(T) \subseteq \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = 1\}$.*

Demonstração. (a) ($\Rightarrow$): Já vimos; construímos $A \subseteq L(H)$ uma C^* -álgebra comutativa tal que $T \in A$, e $\sigma_A(T) = \sigma(T)$.

($\Leftarrow$): Considere

$$\begin{aligned} \beta : \sigma(T) &\rightarrow \mathbb{C} \\ \lambda &\mapsto \lambda. \end{aligned}$$

Temos $T = \beta(T)$, e

$$T^* = \overline{\beta}(T) = \int_{\sigma(T)} \overline{\lambda} dE(\lambda) = \int_{\sigma(T)} \lambda dE(\lambda) = T,$$

pois $\sigma(T) \subseteq \mathbb{R}$.

(b): Exercício; segue diretamente de ser $\rho(T) = \|T\| = 1$ quando T é unitário, e também que em geral vale

$$T^*T = \overline{\beta(T)}\beta(T) = (\overline{\beta}\beta)(T) = \int_{\sigma(T)} |\lambda|^2 dE(\lambda). \quad \square$$

Teorema 11.4. *Sejam $T \in L(H)$ normal e $f \in C(\sigma(T))$. Então*

$$\ker f(T) = \text{Im } E(\omega_0), \quad \text{onde} \quad \omega_0 = \{\lambda \in \sigma(T) : f(\lambda) = 0\}.$$

Demonstração. Temos $f\chi_{\omega_0} = 0$, logo

$$0 = (f\chi_{\omega_0})(T) = f(T)E(\omega_0),$$

portanto $\text{Im } E(\omega_0) \subseteq \ker f(T)$.

Reciprocamente, para cada $n \in \mathbb{N}$, defina

$$\omega_n \doteq \left\{ \lambda \in \sigma(T) : d(\lambda, \omega_0) \geq \frac{1}{n} \right\}.$$

Temos $\sigma(T) \setminus \omega_0 = \bigcup_{n=1}^{\infty} \omega_n$ (note que ω_0 é fechado). Defina $f_n \doteq (1/f)\chi_{\omega_n}$. Assim $ff_n = \chi_{\omega_n}$, de modo que $f_n(T)f(T) = E(\omega_n)$. Se $x \in \ker f(T)$, então $E(\omega_n)x = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Lembrando que fixado $y \in H$, a função $\omega \mapsto E(\omega)y$ é uma “medida” a valores em H , concluímos que $E(\bigcup_{n=1}^{\infty} \omega_n)x = 0$ se $x \in \ker f(T)$, isto é; $E(\sigma(T) \setminus \omega_0)x = 0$. Como $E(\omega_0) + E(\sigma(T) \setminus \omega_0) = \text{id}$, calculando em $x \in \ker f(T)$ vemos que $x \in \text{Im } E(\omega_0)$. $\square$

Corolário 11.5. *Seja $T \in L(H)$ normal, e seja $\lambda_0 \in \sigma(T)$.*

(1) $\ker(T - \lambda_0 I) = \text{Im } E(\{\lambda_0\})$, e portanto λ_0 é autovalor de T se, e somente se $E(\{\lambda_0\}) \neq 0$.

(2) Se λ_0 é ponto isolado de $\sigma(T)$, então λ_0 é autovalor de T .

Demonstração. (2): Se λ_0 é ponto isolado de $\sigma(T)$, então $\{\lambda_0\}$ é um aberto de $\sigma(T)$, de modo que $E(\{\lambda_0\}) \neq 0$. $\square$

Teorema 11.6. *Seja $T \in L(H)$ normal, e suponha que $\sigma(T) = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots\}$. Então todo elemento $x \in H$ se escreve na forma*

$$x = \sum_{j=1}^{\infty} x_j,$$

onde $\langle x_j, x_k \rangle = 0$ se $j \neq k$, e $Tx_j = \lambda_j x_j$. (Note que permitimos ocorrer $x_j = 0$, de modo que λ_j não é necessariamente autovalor de T .)

Demonstração. Temos que $E(\{\lambda_j\})E(\{\lambda_k\}) = 0$ se $j \neq k$, e

$$\sum_{j=1}^{+\infty} E(\{\lambda_j\})x = E\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} \{\lambda_j\}\right)x = E(\sigma(T))x = x.$$

Basta então tomar $x_j \doteq E(\{\lambda_j\})x$. Pela parte (1) do Corolário anterior, temos que $Tx_j = \lambda_j x_j$. $\square$

11.4 De volta aos operadores compactos

Teorema 11.7. *Seja $T \in L(H)$ normal. São equivalentes:*

- (1) T é compacto;
- (2) a origem é o único possível ponto de acumulação de $\sigma(T)$ (e nesse caso $\sigma(T)$ é enumerável), e $\mathcal{N}(\lambda, T)$ tem dimensão finita para todo $\lambda \in \sigma(T)$ não-nulo.

Demonstração. (1) $\Rightarrow$ (2): Já vimos (vale para qualquer $k \in K(E)$ com E espaço de Banach - Teoria de Riesz-Schauder).

(2) $\Rightarrow$ (1): Vamos assumir que $\sigma(T)$ é infinito (se $\sigma(T)$ é finito é fácil). Então $\sigma(T) \setminus \{0\} = \{\lambda_n : n \in \mathbb{N}\}$, $\lambda_n \rightarrow 0$ e $|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \dots$. Seja $E_j \doteq E(\{\lambda_j\})$. Vimos que $\text{Im } E_j = \ker(T - \lambda_j I)$, e também $\dim \text{Im } E_j < \infty$ para todo $j \in \mathbb{N}$ por hipótese.

Seja $f_n : \sigma(T) \rightarrow \mathbb{C}$ dada por

$$f_n(\lambda) = \begin{cases} \lambda_j & \text{se } \lambda = \lambda_j, 1 \leq j \leq n \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Temos

$$f_n(T) = \lambda_1 E_1 + \lambda_2 E_2 + \dots + \lambda_n E_n,$$

logo $f_n(T)$ é compacta (de fato, é de posto finito pois $\dim \text{Im } E_j < \infty$). Agora $\|f_n(T) - T\| \leq \sup_{\lambda \in \sigma(T)} |f_n(\lambda) - \lambda|$, mas

$$|f_n(\lambda) - \lambda| = \begin{cases} 0 & \text{se } \lambda \in \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\} \\ |\lambda| & \text{se } \lambda \notin \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}. \end{cases} \leq |\lambda_n|$$

portanto

$$\|f_n(T) - T\| \leq |\lambda_n| \rightarrow 0$$

quando $n \rightarrow +\infty$, e assim T é compacto. $\square$

Podemos assim revisitar os resultados que obtivemos para operadores compactos hermitianos, trocando a hipótese “hermitiano” por “normal”.

Teorema 11.8. *Se $T \in K(H)$ é normal, então:*

- (1) *existe λ autovalor de T tal que $|\lambda| = \|T\|$; e*
- (2) *se $f \in C(\sigma(T))$ e $f(0) = 0$, então $f(T) \in K(H)$.*

Demonstração. (1): Se $T = 0$ então $\lambda = 0 = \|T\|$ é autovalor. Suponha $T \neq 0$. Então existe $\lambda \in \sigma(T)$ tal que $|\lambda| = \rho(T) = \|T\| > 0$. Como T é compacto, pelo Teorema anterior λ é isolado em $\sigma(T)$, de modo que λ é autovalor de T .

(2): Existe uma sequência de polinômios $p_\nu \in \mathbb{C}[X, Y]$, $\nu \in \mathbb{N}$ tal que

$$\lim_{\nu \rightarrow +\infty} p_\nu(\lambda, \bar{\lambda}) = f(\lambda)$$

uniformemente em $\sigma(T)$. Logo $p_\nu(0, 0) \rightarrow 0$ quando $\nu \rightarrow +\infty$, assim definindo

$$q_\nu(\lambda, \bar{\lambda}) \doteq p_\nu(\lambda, \bar{\lambda}) - p_\nu(0, 0),$$

obtemos uma sequência de polinômios que converge uniformemente para f como p_ν , mas que sempre se anula na origem. Assim

$$\|q_\nu(T, T^*) - f(T)\| = \sup_{\lambda \in \sigma(T)} |q_\nu(\lambda, \bar{\lambda}) - f(\lambda)| \rightarrow 0$$

quando $\nu \rightarrow +\infty$. Como T é compacto, temos que T^* é compacto, logo $q_\nu(T, T^*)$ é compacto para todo ν pois como $q_\nu(0, 0) = 0$, a função $q_\nu(T, T^*)$ é da forma

$$q_\nu(T, T^*) = \sum_{j,k} a_{j,k} T^j (T^*)^k.$$

Mas então provamos que $f(T)$ é limite de operadores compactos, sendo portanto compacto. $\square$

11.5 Operadores positivos e a representação polar

Teorema 11.9. *Seja $T \in L(H)$. São equivalentes as seguintes definições de operador positivo:*

- (1) *$\langle Tx, x \rangle \geq 0$ para todo $x \in H$; e*
- (2) *$T = T^*$ e $\sigma(T) \subseteq [0, +\infty[$.*

Demonstração. (1) $\Rightarrow$ (2): Vimos que se $\langle Tx, x \rangle \in \mathbb{R}$ para todo $x \in H$, então $T = T^*$ (exercício da Lista), e portanto $\sigma(T) \subseteq \mathbb{R}$ (vimos esse resultado para C^* -álgebras...). Seja $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda < 0$.

Seja $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda < 0$. Então

$$-\lambda \|x\|^2 = \langle -\lambda x, x \rangle \leq \langle Tx - \lambda x, x \rangle \leq \|(T - \lambda I)x\| \|x\|,$$

logo

$$(-\lambda)\|x\| \leq \|(T - \lambda I)x\| \quad \text{para todo } x \in H,$$

de modo que $T - \lambda I$ é injetora, a imagem desse operador é fechada e sua inversa é contínua. Resta mostrar que $\text{Im}(T - \lambda I)$ é densa em H . Agora,

$$\overline{\text{Im}(T - \lambda I)} = [\ker(T - \lambda I)^*]^\perp = [\ker(T - \lambda I)]^\perp = \{0\}^\perp = H.$$

(2) $\Rightarrow$ (1): Temos $T = \int_{\sigma(T)} \lambda dE(\lambda)$, isto é;

$$\langle Tx, x \rangle = \int_{\sigma(T)} \lambda dE_{x,x}(\lambda) \geq 0 \quad \text{para todo } x \in H. \quad \square$$

Teorema 11.10. *Se $T \in L(H)$ é positivo, existe um único $S \in L(H)$ positivo tal que $S^2 = T$. (O operador S é a “raiz quadrada” de T .) Mais, S é inversível se T o for.*

Notação. $S = T^{1/2}$.

Demonstração. Note que precisamos de uma construção um pouco mais sofisticada do que somente o cálculo simbólico para obter a unicidade do operador S .

Seja A uma subálgebra normal e fechada em $L(H)$ contendo T . Podemos supor que A é a menor subálgebra de $L(H)$ com essas propriedades (tomando a intersecção de todas as subálgebras dessa forma). Temos que a transformada de Gelfand é um isomorfismo $A \simeq C(\Delta_A)$. Agora,

$$\hat{T}(\Delta) = \sigma(T) \subseteq [0, +\infty[,$$

isto é; $\hat{T}$ é uma função positiva, de modo que existe um único $f \in C(\Delta)$ com $f \geq 0$ tal que $f^2 = \hat{T}$. Como a transformada de Gelfand é um isomorfismo, existe $S \in A$ tal que $f = \hat{S}$ para um único $S \in A$. Logo S é positivo, e $S^2 = T$.

Seja $S_0 \in L(H)$ positivo e tal que $S_0^2 = T$, e seja $A_0 \doteq \overline{\{p(S_0) : p \in \mathbb{C}[X]\}}$ subálgebra normal e fechada. Temos $T \in A_0$ pois $T = S_0^2 \in A_0$, de modo que $A \subseteq A_0$ pela minimalidade de A , e assim $S \in A_0$, mas então $S = S_0$ pela unicidade em A_0 (como na unicidade em A).

Se T é inversível, $T^{-1}T^{1/2}$ é o inverso de $T^{1/2}$. $\square$

Teorema 11.11 (representação polar). (1) Se $T \in L(H)$ é normal, então $T = UP$, onde P é um operador positivo e U é um operador unitário.

(2) Se $T \in L(H)$ é inversível (não precisa ser normal), então a representação polar é única;

$$P = (T^*T)^{1/2} \quad e \quad U = TP^{-1}.$$

Notação. $(T^*T)^{1/2} = |T|$.

Demonstração. (1): Temos $T = \int_{\sigma(T)} \lambda dE(\lambda)$. Sejam $p(\lambda) \doteq |\lambda|$ e

$$u(\lambda) = \begin{cases} \lambda/|\lambda| & \text{se } \lambda \neq 0 \\ 1 & \text{se } \lambda = 0. \end{cases}$$

Então $u(\lambda)p(\lambda) = \lambda$, de modo que $u(T)p(T) = T$. Agora,

$$p(T) = \int_{\sigma(T)} |\lambda| dE(\lambda)$$

logo $p(T)$ é positivo. Além disso,

$$u(T)u(T)^* = u(T)\bar{u}(T) = (u\bar{u})(T) = 1(T) = I.$$

(2): Se $T = UP$ com U unitário e P positivo, então $T^* = PU^*$, logo $T^*T = PU^*UP = P^2$, logo $P = (T^*T)^{1/2}$, e assim P é único, e também U é único pois $U = TP^{-1}$.

Como T é inversível, segue que T^* também o é, logo também T^*T é inversível, e pelo Teorema anterior $P \doteq (T^*T)^{1/2}$ é inversível, portanto $U \doteq TP^{-1}$ está bem definido.

Precisamos mostrar que U é unitário. Agora

$$U^* = (TP^{-1})^* = (P^{-1})^*T^* = P^{-1}T^*,$$

logo

$$U^*U = P^{-1}T^*TP^{-1} = P^{-1}P^2P^{-1} = I. \quad \square$$

Corolário 11.12. Se $M, N \in L(H)$ são normais tais que $M = TNT^{-1}$ para algum $T \in L(H)$ inversível, então $M = UNU^*$ para algum $U \in L(H)$ unitário.

Demonstração. Como T é inversível, existem U unitário e $P \geq 0$ tais que $T = UP$. Vamos mostrar que $PN = NP$.

Assumindo $PN = NP$ por enquanto, obtemos

$$M = TNT^{-1} = UPNP^{-1}U^* = UNPP^{-1}U^* = UNU^*,$$

logo basta demonstrar $PN = NP$.

Temos $MT = TN$ (logo $M^*T = TN^*$, e assim $T^*M = NT^*$). Logo

$$P^2N = T^*TN = T^*MT = NT^*T = NP^2,$$

assim $f(P^2)N = Nf(P^2)$ para todo $f \in C(\sigma(P^2))$. Como $\sigma(P^2) \subseteq [0, +\infty[$, posso tomar $f(\lambda) = \sqrt{\lambda}$. $\square$

Observação. Seja $U \in L(H)$ unitário. Então

$$U = \int_{\sigma(U)} \lambda dE(\lambda).$$

Como U é unitário, $\sigma(T) \subseteq \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = 1\}$. Colocando $\lambda = e^{if(\lambda)}$ para alguma $f \in \mathcal{F}(\sigma(U))$ (f é um *argumento* para o espectro de U , que não é necessariamente contínuo, mas isso não é problema), temos que $\theta \doteq f(U) \in L(H)$, e $e^{i\theta} = U$.

Portanto se $T \in L(H)$ é inversível, temos $T = e^{i\theta}|T|$.

Também, $\sigma(|T|) \subseteq]0, \infty[$ ($0 \notin \sigma(|T|)$ pois T é inversível). Assim $\log \lambda \in C(\sigma(|T|))$, podemos definir $R \doteq \log |T|$, e temos $T = e^{i\theta}e^R$.

Conclusão: se $T \in G(L(H))$, então T é o produto de duas exponenciais.

Corolário 11.13. *O espaço $G(L(H))$ é conexo.*

Demonstração. Se $T \in G(L(H))$, então $T = e^{i\theta}e^R$ com $\theta, R \in L(H)$. Assim temos uma curva contínua $\gamma : [0, 1] \rightarrow L(H)$ dada por

$$\gamma(\tau) = e^{i\tau\theta}e^{\tau R};$$

temos $\gamma(0) = I$, $\gamma(1) = T$, e $\gamma(\tau) \in G(L(H))$ para todo $\tau \in [0, 1]$. $\square$

A aplicação exponencial em uma álgebra de Banach; $\exp : A \rightarrow G(A)$ em geral não é sobrejetora.

Observação. Se $x \in A$ é tal que 0 pertence à componente ilimitada de $\mathbb{C} \setminus \sigma(x)$ (de modo que $\sigma(x)$ admite um logaritmo), existe $y \in A$ tal que $e^y = x$.

Teorema 11.14. *Sejam $D \doteq \{z \in \mathbb{C} : 1 < |z| < 2\}$ e $H \doteq \mathcal{O}_{L^2}(D) = \mathcal{O}(D) \cap L^2(D)$. Seja $M \in L(H)$ dada por*

$$(Mf)(z) = zf(z).$$

Então $M \in G(L(H))$, mas não possui raiz quadrada em $L(H)$ (e portanto M não pode ser exponencial de função alguma).

Demonstração. Note que a função $1/z$ é holomorfa e limitada em D . Assim o operador $f(z) \mapsto \frac{1}{z}f(z)$ pertence a $L(H)$, e é o inverso de M .

Suponha por absurdo que exista $Q \in L(H)$ tal que $Q^2 = M$. Seja $\alpha \in \mathbb{C}$ tal que $1 < |\alpha| < \sqrt{2}$ (e portanto $\lambda \doteq \alpha^2 \in D$). Sejam

$$M_\lambda \doteq M - \lambda I, \quad S \doteq Q - \alpha I, \quad \text{e} \quad T \doteq Q + \alpha I.$$

Agora $f \in \ker M_\lambda$ se, e somente se $(z - \lambda)f(z) = 0$ para todo $z \in D$, o que é equivalente a ser $f = 0$, portanto M_λ é injetora. Como $ST = TS = M_\lambda$, segue que S e T são injetoras.

Note que

$$M_\lambda(H) = \{h \in \mathcal{O}_{L^2}(D) : h(\lambda) = 0\}.$$

De fato, $(M_\lambda f)(\lambda) = 0$ para todo $f \in H$. Reciprocamente, seja $h \in H$ tal que $h(\lambda) = 0$. Então $f(z) \doteq h(z)/(z - \lambda) \in \mathcal{O}(D)$. Temos $f \in L^2(D)$ pois f é limitada em $B_\rho(\lambda)$, para $\rho > 0$ pequeno, e fora dessa bola,

$$\int_{D \setminus B_\rho(\lambda)} |f|^2 dx dy \leq \frac{1}{\rho^2} \int_D |h|^2 dx dy.$$

A aplicação $\Psi \doteq f \mapsto f(\lambda)$ é um funcional linear contínuo em H , e $\ker \Psi = M_\lambda(H)$. Logo $M_\lambda(H)$ é um subespaço fechado de codimensão 1 em H , de modo que M_λ não é inversível (teria de ser sobrejetora). Portanto um dos dois operadores, S ou T , não pode ser inversível (pois $M_\lambda = ST = TS$). Pela definição de S e T , temos então que α ou $-\alpha$ pertence a $\sigma(Q)$.

Como $M_\lambda = TS$, então é fácil ver que $M_\lambda(H) \subseteq T(H)$. Como $M_\lambda(H)$ tem codimensão 1, segue que ou $T(H) = H$, ou $T(H) = M_\lambda(H)$. Se $T(H) = H$, então T é inversível pelo Teorema da Aplicação Aberta. Se $T(H) = M_\lambda(H)$, então como $ST = M_\lambda$, temos $S(M_\lambda(H)) = S(T(H)) = M_\lambda(H)$, mas como S é injetora e $M_\lambda(H)$ tem codimensão 1, segue que S é sobrejetora (S mandará o complementar de $M_\lambda(H)$ no complementar de $M_\lambda(H)$).

Conclusão: se existe $Q \in L(H)$ tal que $Q^2 = M$, então para todo $\alpha \in \mathbb{C}$ com $1 < |\alpha| < \sqrt{2}$, temos ou $S = Q - \alpha I$ inversível ou $T = Q + \alpha I$ é inversível, e não ambos. Portanto se $\Omega \doteq \{\alpha \in \mathbb{C} : 1 < |\alpha| < \sqrt{2}\}$, então

$$\Omega = (\sigma(Q) \cap \Omega) \cup (-\sigma(Q) \cap \Omega)$$

união disjunta, absurdo, pois Ω é conexo. □

A Exercícios

Observação. Os exercícios seguintes foram elaborados pelo prof. Dr. Paulo D. Cordaro, e somente reformatada para manter o estilo do resto das notas.

A.1 Lista 1

1. Seja $(x_i)_{i \in I}$ uma família de números reais positivos e suponha que exista uma constante $C > 0$ satisfazendo

$$\sum_{i \in F} x_i \leq C, \quad \text{para todo } F \subset I \text{ finito.}$$

Mostre que

$$\sum_{i \in I} x_i = \sup \left\{ \sum_{i \in F} x_i : F \subset I \text{ finito} \right\}.$$

2. Sejam E, F, G espaços normados, $T \in L(E, F)$, $S \in L(F, G)$. Mostre que $S \circ T \in L(E, G)$ e que $\|S \circ T\| \leq \|S\| \cdot \|T\|$.

3. Sejam E e F espaços normados, $\{x_n\}$ uma sequência em E , $\{T_n\}$ uma sequência em $L(E, F)$, $x_n \rightarrow x$, $T_n \rightarrow T$. Mostre que $T_n(x_n) \rightarrow T(x)$.

4. Sejam E um espaço normado e $f : E \rightarrow \mathbb{C}$ um funcional linear. Mostre que f é contínuo se, e somente se, $\ker f = \{x \in E : f(x) = 0\}$ é fechado.

5. Sejam E um espaço normado e $x \in E$. Mostre que existe um funcional linear contínuo $f \in E'$ tal que $f(x) = \|f\| \cdot \|x\|$.

6. Sejam E, F espaços de Banach, $\{f_n\} \subset E'$, $\{y_n\} \subset F$ e $\{c_n\} \subset \mathbb{C}$ tais que

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \|f_n\| < \infty, \quad \sup_{n \in \mathbb{N}} \|y_n\| < \infty, \quad \sum_{n=1}^{\infty} |c_n| < \infty.$$

Mostre que $Tx \doteq \sum_{n=1}^{\infty} c_n f_n(x) y_n$ define um elemento de $L(E, F)$ que satisfaz a seguinte propriedade: T é limite, em $L(E, F)$, de uma sequência de operadores de posto finito (isto é, operadores cujas imagens tem dimensão finita).

7. Utilizando a aplicação canônica de um espaço normado E em seu bi-dual, demonstre o seguinte fato:

$$\{x_n\}_n \text{ é limitada em } E \iff \{f(x_n)\}_n \text{ é limitada em } \mathbb{C}, \forall f \in E'.$$

8. Seja F um subespaço vetorial de um espaço de Hilbert H . Mostre que $(F^\perp)^\perp = \bar{F}$.

9. Seja $H = \ell_2(\mathbb{N})$ e considere as sequências $\{T_n\}$, $\{S_n\}$ em $L(H)$ dadas por

$$T_n(x_1, x_2, \dots) = \left(\frac{x_1}{n}, \frac{x_2}{n}, \dots \right),$$

$$S_n(x_1, x_2, \dots) = \left(\underbrace{0, \dots, 0}_n, x_{n+1}, \dots \right).$$

Mostre que $T_n \rightarrow 0$ em $L(H)$ mas que isto não é verdade para a sequência $\{S_n\}$, apesar de $S_n(\vec{x}) \rightarrow 0$ para todo $\vec{x} \in H$.

10. Dado um espaço normado E e dada uma sequência $\{x_n\}$ em E , dizemos que $\{x_n\}$ converge fracamente para $x \in E$, e escreveremos $x_n \xrightarrow{\text{fr}} x$, se $f(x_n) \rightarrow f(x)$ para todo $f \in E'$. Verifique que

(a) Se $x_n \rightarrow x$ em E então $x_n \xrightarrow{\text{fr}} x$.

(b) Se $x_n \xrightarrow{\text{fr}} x$ então $\{x_n\}$ é limitada.

(c) Se $\dim E < \infty$ então $x_n \rightarrow x$ em E se, e somente se, $x_n \xrightarrow{\text{fr}} x$.

(d) Se H é um espaço pré-hilbertiano e se $\{x_n\} \subset H$ é ortonormal então $x_n \xrightarrow{\text{fr}} 0$. Conclua que a equivalência do item (c) deixa de ser válida em espaços de dimensão infinita.

(e) Se H é pré-hilbertiano e se $\{x_n\} \subset H$ é tal que $x_n \xrightarrow{\text{fr}} x$ e $\|x_n\| \rightarrow \|x\|$ então $x_n \rightarrow x$ em H .

11. O objetivo deste exercício é obter uma demonstração do seguinte resultado fundamental: *em um espaço de Hilbert H , toda sequência limitada possui subsequência que converge fracamente*. (Compare com o Teorema de Alaoglu-Bourbaki.)

(a) Seja $\{x_n\}$ uma sequência limitada em H . Construa sequências $S_0, S_1, S_2, \dots$ indutivamente, do seguinte modo: S_0 é a própria sequência $\{x_n\}$. Se $S_0, \dots, S_r$ já foram construídas, considere $S_{r+1} = \{y_n\}$ como sendo a subsequência de S_r para a qual $\langle y_n, x_r \rangle$ converge quando $n \rightarrow \infty$.

(b) Conclua que existe uma subsequência $\{x_{n_j}\}$ de $\{x_n\}$ com a propriedade que $\langle x_{n_j}, x_r \rangle$ é convergente, quando $j \rightarrow \infty$, para todo $r \in \mathbb{N}$.

(c) Seja F o fecho do subespaço gerado por $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$. Mostre que $\langle x_{n_j}, y \rangle$ é convergente, qualquer que seja $y \in F$.

(d) Utilizando a existência de uma projeção ortogonal sobre F conclua que $\langle x_{n_j}, z \rangle$ é convergente para todo $z \in H$.

(e) Mostre que $f(z) \doteq \lim_{j \rightarrow \infty} \langle z, x_{n_j} \rangle$ define um elemento em H' . Use o teorema de Riesz para concluir que existe $x \in H$ com $x_{n_j} \xrightarrow{\text{fr}} x$.

12. Sejam H um espaço de Hilbert e $A : H \rightarrow H$ uma aplicação linear satisfazendo $\langle Ax, y \rangle = \langle x, Ay \rangle$ para todos $x, y \in H$. Mostre que A é contínua.

13. Sejam H um espaço de Hilbert e $A \in L(H)$. Mostre que A é um operador

auto-adjunto se, e somente se, $\langle Ax, x \rangle \in \mathbb{R}$ para todo $x \in H$.

14. Seja H um espaço de Hilbert. Mostre que se $A \in L(H)$ então A^*A é auto-adjunto e que $\|A^*A\| = \|A\|^2$.

A.2 Lista 2

1. Sejam E, F espaços normados e $k \in \mathcal{K}(E, F)$. Mostre que k leva sequências fracamente convergentes em sequências convergentes.

2. Seja $K \in C([c, d] \times [a, b])$. Utilizando o teorema de Stone-Weierstrass mostre que o operador

$$k : C([a, b]) \longrightarrow C([c, d]), \quad k(x)(t) = \int_a^b K(t, s)x(s)ds,$$

é limite, em $L(C([a, b]), C([c, d]))$, de uma sequência de operadores de posto finito.

3. Sejam H um espaço de Hilbert e $A \in L(H)$ satisfazendo $A^*A = AA^*$ (operadores satisfazendo esta propriedade são chamados *normais*). Mostre que

(a) $\|A^*x\| = \|Ax\|$, $\forall x \in H$.

(b) $\|A^2\| = \|A\|^2$.

(c) Se $\lambda \in \mathbb{C}$ então $\mathcal{N}(\lambda, A) = \mathcal{N}(\bar{\lambda}, A^*)$.

(d) Se x, y são autovetores correspondentes a autovalores distintos de A então $x \perp y$.

(e) Se e é um autovetor de A então $[e]^\perp$ é invariante por A e por A^* .

(f) Se $H = \ell_2(\mathbb{Z})$, e $A \in L(H)$ é dado por $A(\{x_n\}_{n \in \mathbb{Z}}) = \{x_{n+1}\}_{n \in \mathbb{Z}}$, então A é normal.

4. Sejam H um espaço de Hilbert e $k \in \mathcal{K}(H)$. Defina $A = k^*k$ e sejam $\{\lambda_n\}$ o conjunto dos autovalores não nulos de A e $\{e_n\}$ o conjunto ortonormal dos respectivos autovetores de A . Defina $f_n = k(e_n)/\sqrt{\lambda_n}$. Mostre que, para cada $x \in H$, vale a representação

$$k(x) = \sum_n \sqrt{\lambda_n} \langle x, e_n \rangle f_n.$$

5. Sejam $E = C_{L^2}([a, b])$ e $k : E \rightarrow E$ definida por

$$k(x)(t) = \int_a^t x(s)ds.$$

Mostre que $k \in \mathcal{K}(E)$.

6. Dado um subconjunto aberto Ω do plano complexo denotamos por $\mathcal{O}(\Omega)$ o espaço de todas as funções holomorfas $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ e por $\mathcal{O}_\infty(\Omega)$ o espaço $\mathcal{O}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$.

(a) Mostre que $\mathcal{O}_\infty(\Omega)$ é um subespaço fechado de $L^\infty(\Omega)$ e portanto espaço de Banach.

(b) Seja $\Omega_1 \subset \Omega$ um aberto relativamente compacto em Ω . Mostre a aplicação de restrição $f \mapsto f|_{\Omega_1}$ define um operador compacto de $\mathcal{O}_\infty(\Omega)$ em $\mathcal{O}_\infty(\Omega_1)$.

(c) Seja $\Omega_1 \subset \Omega$ um aberto relativamente compacto em Ω . Mostre a aplicação $f \mapsto f'|_{\Omega_1}$ define um operador linear contínuo de $\mathcal{O}_\infty(\Omega)$ em $\mathcal{O}_\infty(\Omega_1)$.

(d) Conclua que a aplicação do item anterior é também compacta.

7. Dado um subconjunto aberto Ω do plano complexo denotamos por $\mathcal{O}_2(\Omega)$ o espaço $\mathcal{O}(\Omega) \cap L^2(\Omega)$.

(a) Mostre que $\mathcal{O}_2(\Omega)$ é um subespaço fechado de $L^2(\Omega)$ e portanto um espaço de Hilbert.

(b) Determine, explicitamente, uma base hilbertiana para o espaço de Hilbert $\mathcal{O}_2(D_r(0))$, onde $D_r(0) = \{z : |z| < r\}$ ($r > 0$).

(c) Seja $\Omega_1 \subset \Omega$ um aberto relativamente compacto em Ω . Mostre a aplicação $f \mapsto f'|_{\Omega_1}$ define um operador compacto de $\mathcal{O}_2(\Omega)$ em $\mathcal{O}_2(\Omega_1)$.

8. Dados $\lambda \in \mathbb{C}$ e $q \in C([a, b])$ a valores reais (escrevemos $q \in C([a, b]; \mathbb{R})$), definimos

$$L_\lambda[y](t) = -y''(t) + [q(t) - \lambda]y(t), \quad y \in C^2([a, b]), \quad t \in [a, b].$$

Considere o *problema de Sturm-Liouville*,

$$\begin{cases} L_\lambda[y] = f \\ y(a) = y(b) = 0. \end{cases} \quad (\text{PSL})$$

onde $f \in C([a, b])$ é dada.

Dizemos que λ é um *autovalor para* (PSL) se o problema

$$\begin{cases} L_\lambda[y] = 0 \\ y(a) = y(b) = 0 \end{cases} \quad (\text{PAV})$$

admite uma solução y não trivial. Uma solução de (PAV) quando λ é um

autovalor de (PSL) *denomina-se uma autofunção de (PSL) associada ao autovalor* λ .

(a) Mostre que todos os autovalores de (PSL) são reais.

Em virtude deste fato podemos assumir, a partir de agora, que todas as funções envolvidas são a valores reais. Em particular, trabalharemos a seguir no espaço pré-hilbertiano real $H = C_{L^2}([a, b]; \mathbb{R})$, munido do produto interno

$$\langle x, y \rangle = \left(\int_a^b x(t)y(t) dt \right)^{1/2}.$$

(b) Mostre que autofunções associadas a autovalores distintos são ortogonais. Conclua que o conjunto dos autovalores de (PSL) é no máximo enumerável.

(c) Mostre que a dimensão do espaço das autofunções associadas ao autovalor λ é igual a um (para isto, lembre-se da EDO de primeira ordem satisfeita pelo wronskiano de duas soluções de uma dada EDO linear).

(d) Mostre que o conjunto dos autovalores de (PSL) é limitado inferiormente. Sugestão: mostre que existe $c_0 \in \mathbb{R}$ satisfazendo a seguinte propriedade: se $\lambda < c_0$ e se $y \in C^2([a, b]; \mathbb{R})$ satisfaz $y(a) = y(b) = 0$, $\|y\|_2 = 1$ então $\int_a^b L_\lambda[y](t)y(t)dt > 0$; para tal mostre primeiramente o seguinte lema: se $x \in C^1([a, b]; \mathbb{R})$ então

$$x(t)^2 \leq \frac{1}{b-a} \|x\|_2^2 + 2\|x\|_2 \|x'\|_2, \quad t \in [a, b].$$

(e) Mostre que podemos assumir $\lambda > 0$ para todo autovalor λ de (PSL).

(f) Mostre que existe $G \in C([a, b] \times [a, b]; \mathbb{R})$, $G(t, s) = G(s, t)$, $\forall s, t \in [a, b]$, satisfazendo a seguinte propriedade: $y \in C^2([a, b]; \mathbb{R})$ é solução do problema de fronteira

$$\begin{cases} -y'' + qy = f \\ y(a) = y(b) = 0, \end{cases}$$

se, e somente se,

$$y(t) = \int_a^b G(t, s)f(s)ds, \quad t \in [a, b].$$

(g) Utilize o teorema espectral para operadores compactos hermitianos para obter as propriedades dos autovalores e respectivas autofunções de (PSL).

9. Sejam $(X, \mathcal{B}, \mu)$ um espaço de medida e H um espaço de Hilbert separável. Uma função $f : X \rightarrow H$ é $\mathcal{B}$ -mensurável se $x \mapsto \langle f(x), y \rangle$ é $\mathcal{B}$ -mensurável,

para todo $y \in H$.

(a) Mostre que se $f, g : X \rightarrow H$ são $\mathcal{B}$ -mensuráveis então $x \mapsto \|f(x)\|^2$ e $x \mapsto \langle f(x), g(x) \rangle$ são $\mathcal{B}$ -mensuráveis.

(b) Seja $L^2(X, \mathcal{B}, \mu; H)$ o espaço das funções $f : X \rightarrow H$ que são $\mathcal{B}$ -mensuráveis tais que

$$\int_X \|f(x)\|^2 d\mu(x) < \infty.$$

Mostre que $L^2(X, \mathcal{B}, \mu; H)$ é um espaço de Hilbert com produto interno

$$\langle f, g \rangle = \int_X \langle f(x), g(x) \rangle d\mu(x).$$

(c) Seja $\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ base hilbertiana de H . Mostre que se $f \in L^2(X, \mathcal{B}, \mu; H)$ então

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N \langle f(x), e_n \rangle e_n = f(x) \quad \text{em } L^2(X, \mathcal{B}, \mu; H)$$

e que, se também $g \in L^2(X, \mathcal{B}, \mu; H)$,

$$\langle f, g \rangle = \sum_{n \in \mathbb{N}} \int_X \langle f(x), e_n \rangle \langle g(x), e_n \rangle d\mu(x).$$

A.3 Lista 3

1. Seja E um espaço de Banach separável.

(a) Mostre que existe $\{x_n : n \in \mathbb{N}\} \subset B \doteq \{x \in E : \|x\| \leq 1\}$, denso em B .

(b) Defina uma aplicação $T : \ell_1(\mathbb{N}) \rightarrow E$ pela fórmula

$$T(\{\lambda_n\}) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n x_n.$$

Mostre que T está bem definida e é contínua.

(c) Mostre que T é sobrejetora. *Sugestão:* dado $x \in E$ com $\|x\| = 1$ defina $\{n_k\} \subset \mathbb{N}$ recursivamente, exigindo que $n_k \nearrow \infty$ e

$$\left\| x - \sum_{j=1}^k 2^{1-j} x_{n_j} \right\| \leq 2^{-k}.$$

(d) Conclua que todo espaço de Banach separável é isomorfo a algum quociente de $\ell_1(\mathbb{N})$.

2. Sejam E um espaço normado e $T \in L(E)$ satisfazendo $\sup_{n \geq 0} \|T^n\| < \infty$. Defina

$$S_N = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} T^n \in L(E).$$

Mostre que

$$\overline{(I - T)(E)} = \{x \in E : \lim_{N \rightarrow \infty} S_N x = 0\}$$

e que, portanto,

$$\overline{(I - T)(E)} \cap \ker(I - T) = \{0\}.$$

3. Sejam E um espaço de Banach e E' seu dual (topológico), isto é, $E' = L(E, \mathbb{C})$. Seja $\sigma(E, E')$ a topologia menos fina sobre E que torna todos os funcionais $f \in E'$ contínuos ($\sigma(E, E')$ denomina-se *topologia fraca* sobre E). Mostre que:

(a) Mostre que $\sigma(E, E')$ é menos fina que a topologia definida pela norma de E ;

(b) Mostre que um net $(x_\alpha)_{\alpha \in I}$ em E converge para $x \in E$ em $\sigma(E, E')$ se, e só se, o net $(f(x_\alpha))_{\alpha \in I}$ converge para $f(x)$, qualquer que seja $f \in E'$;

(c) Mostre que $\sigma(E, E')$ é Hausdorff;

(d) Mostre que toda sequência em E que converge em $\sigma(E, E')$ é limitada na norma.

(e) Utilize a versão geométrica do teorema de Hahn-Banach para mostrar que se E tem dimensão infinita então o fecho de $\{x \in E : \|x\| = 1\}$ na topologia $\sigma(E, E')$ é o conjunto $\{x \in E : \|x\| \leq 1\}$.

4. Sejam E um espaço de Banach e $x \mapsto \hat{x}$ a aplicação canônica de E em seu bidual E'' . Mostre que $\{\hat{x} : x \in E\}$ é denso em E'' com respeito à topologia $\sigma(E'', E')$.

5. Seja A uma álgebra de Banach e sejam $x, y \in A$. Mostre que se $e - xy \in G(A)$ então $e - yx \in G(A)$ e que

$$(e - yx)^{-1} = e + y(e - xy)^{-1}x.$$

Conclua que se $\lambda \in \mathbb{C}$, $\lambda \neq 0$, então $\lambda \in \sigma(xy) \Rightarrow \lambda \in \sigma(yx)$.

6. Seja A a álgebra das funções de classe C^1 no intervalo $[0, 1]$, munida da norma

$$\|f\| = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty.$$

Mostre que

(a) A , com produto ponto a ponto, é uma álgebra de Banach comutativa e semi-simples.

(b) Determine Δ_A .

7. Sejam H um espaço de Hilbert e $\Lambda : H \times H \rightarrow \mathbb{C}$ uma forma sesquilinear limitada, isto é, existe $M > 0$ tal que $|\Lambda(x, y)| \leq M$ se $\|x\| = 1$ e $\|y\| = 1$. Mostre então que existe um único operador $T \in L(H)$ tal que

$$\Lambda(x, y) = \langle Tx, y \rangle, \quad x, y \in H.$$

Mostre, também, que $\|T\| = \sup\{|\Lambda(x, y)| : \|x\| = 1, \|y\| = 1\}$.

8. Sejam H e Λ como no exercício 7. Suponha também que exista $c > 0$ tal que

$$|\Lambda(x, x)| \geq c\|x\|^2, \quad x \in H.$$

Mostre que existe um isomorfismo anti-linear $S : H \rightarrow H'$ tal que

$$\Lambda(x, Sf) = f(x), \quad x \in H, \quad f \in H'.$$

Esse resultado é conhecido como “Lema de Lax-Milgram”.

Índice Remissivo

- álgebra, 55
- álgebra de Banach, 56
 - comutativa
 - radical de uma, 74
 - semi-simples, 74
 - involução em uma, 81
- autovalor, 29
- autovetor, 29
- base hilbertiana, 19
- $\mathbb{C}$ -álgebra, 55
 - normada, 56
- C^* -álgebra, 82
- coeficiente de Fourier, 16
- completamento de espaços, 48
- conjunto
 - boreliano, 101
 - dirigido, 69
 - magro, 10
 - normal, 88
 - relativamente compacto, 23
- Desigualdade de Bessel, 17
- elemento
 - auto-adjunto, 81
 - espectro de um, 59
 - hermitiano, 81
 - inversível, 58
 - normal, 88
 - positivo, 89
- espaço
 - separável, 20
- espaço quociente, 65
- espectro, 59
- família equicontínua, 26
- função
 - essencialmente limitada, 98
 - holomorfa, 51
- gráfico, 10
- homomorfismo, 59
- homomorfismo de álgebras, 64
- ideal, 64
 - maximal, 64
 - próprio, 64
- índice de uma curva, 84
- isometria, 48
- isomorfismo, 48
- Lema
 - de Lax-Milgram, 125
 - de Wiener, 67
 - de Zorn, 19
- medida
 - complexa, 93
 - decomposição de Jordan, 97
 - regular, 101
 - variação total, 97
- net, 70
- normas equivalentes, 5
- operador
 - auto-adjunto, 16
 - autovalor de um, 29
 - autovetor de um, 29
 - compacto, 23
 - hermitiano, 16
 - positivo, 33
 - representação polar de um, 114
 - unitário, 48

- Princípio da Limitação Uniforme, 9
- Processo de Gram-Schmidt, 20
- produto tensorial, 45
- projeção, 93
 - ortogonal, 93
- raio espectral, 60
- representação polar, 114
- resolução da identidade, 94
- sequência
 - absolutamente somável, 9
 - ortonormal, 16
 - somável, 7
- Teorema
 - da Aplicação Aberta, 10
 - da Aplicação Espectral, 87
 - da Base, 18
 - de Alaoglu-Bourbaki, 72
 - de Ascoli, 26
 - de Banach-Steinhaus, 9
 - de decomposição de Hahn, 96
 - de Gelfand-Mazur, 62
 - de Gelfand-Naimark, 82
 - de Hahn-Banach, 9
 - de Liouville, 55
 - de Riesz, 14, 101
 - de Runge, 85
 - de Stone-Weierstrass, 21
 - de Tychonoff, 71
 - de von Neumann, 49
 - do Gráfico Fechado, 10
 - espectral
 - para op. hermitianos compactos, 31
 - para operadores normais, 106
- topologia fraca-*, 71
- transformação
 - auto-adjunta, 16
 - autovalor de uma, 29
 - autovetor de uma, 29
 - hermitiana, 16
 - positiva, 33
 - representação polar de uma, 114
 - unitária, 48
 - transformada de Gelfand, 75

Referências

- [1] E. Hewitt e K. Stromberg, “*Real and Abstract Analysis*”. Springer, 1975.
- [2] C. S. Hönl, “*Análise Funcional e o Problema de Sturm-Liouville*”. E. Edgar Blücher, EDUSP, 1978.
- [3] M. Reed e B. Simon, “*Methods in Modern Mathematical Physics*”. Academic Press, New York, 1972.
- [4] W. Rudin, “*Functional Analysis*”. McGraw-Hill, 2nd Edition, 1991.
- [5] W. Rudin, “*Real and Complex Analysis*”. McGraw-Hill, 3rd Edition, 1987.
- [6] K. Yosida, “*Functional Analysis*”. Springer, 1996.