MAP0413/MAP5712 - 1o. Semestre de 2025

1a. lista de exercícios

1. Seja Ω um aberto com fronteira regular e considere as sequências $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, respectivamente dos auto-valores e das correspondentes auto-funções do operador de Laplace em Ω. Aqui $\{u_n\}$ é assumida normalizada, formando uma base hilbertiana para $L^2(\Omega)$. Seja $u \in C^1(\overline{\Omega})$, com $u = 0$ em $\partial\Omega$. Mostre que existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\left| \int_\Omega u(x)u_n(x)\, dx \right| \leq C/\lambda_n^{1/2}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

2. Sejam $a > 0$, $T > 0$ e $u(x,t)$ uma solução de classe C^2 da equação

$$u_t = u_{xx} + u$$

em $]0,a[\times]0,T[$, contínua em $[0,a]\times[0,T]$. Mostre que

$$\max_{[0,a]\times[0,T]} |u| \leq e^T \max_{\Theta} |u|,$$

onde $\Theta \doteq (\{0\}\times[0,T]) \cup ([0,a]\times\{0\}) \cup (\{a\}\times[0,T])$.

3. Demonstre a fórmula de Parseval: dadas $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ vale:

$$\int_{\mathbb{R}^N} f(x)\overline{g(x)}\, \mathrm{d}x = \frac{1}{(2\pi)^N} \int \hat{f}(\xi)\overline{\hat{g}(\xi)}\, \mathrm{d}\xi.$$

Conclua que

$$\int_{\mathbb{R}^N} |f(x)|^2\, \mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^N} |\hat{f}(\xi)|^2\, \mathrm{d}\xi, \quad \forall f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N).$$

4. Dados $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ e $h \in \mathbb{R}^N$ defina $\tau_h(f)(x) = f(x+h)$, $x \in \mathbb{R}^N$. Mostre, utilizando o exercício 3, que

$$\lim_{h\to 0} \|\tau_h(f) - f\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} = 0.$$

5. Demonstre a seguinte desigualdade: existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\|f\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq C\left(\|f\|_{L^2(\mathbb{R})} + \|f'\|_{L^2(\mathbb{R})}\right), \forall f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}).$$

Sugestão: inicie estimando

$$|f(x)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} |\hat{f}(\xi)|\, \mathrm{d}\xi = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} |(1+i\xi)\hat{f}(\xi)| \frac{1}{|1+i\xi|}\, \mathrm{d}\xi$$

e utilize a desigualdade de Cauchy-Schwarz.

6. Dadas $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ e $A : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ linear inversível defina $g = f \circ A$. Mostre que $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ e calcule $\hat{g}$ em termos de $\hat{f}$. Conclua que $\Delta(f \circ A) = (\Delta f) \circ A$ se A é uma transformação ortogonal.

7. Mostre que a aplicação $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N) \ni f \mapsto (1 - \Delta)f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ é uma bijeção.

8. Sejam $u, v \in C(\mathbb{R}^N)$, ambas se anulando no complementar de um compacto. Mostre que $u \star v$ se anula no complementar de um compacto. *Sugestão:* Lembre que a soma de dois compactos em $\mathbb{R}^N$ é compacta.

9. Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um aberto com fronteira regular e seja $u(x,t)$ uma solução de classe C^2 em $\overline{\Omega} \times [0, \infty[$ do seguinte problema:

$$(1) \qquad \begin{cases} u_t - \Delta_x u = 0 & \text{em } \Omega \times]0, \infty[; \\ u(x,0) = u_0(x) & \text{em } \Omega; \\ u(x,t) = 0 & \text{em } \partial\Omega \times [0, \infty[. \end{cases}$$

Mostre que

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_\Omega |\vec{\nabla}_x u(x,t)|^2 \, \mathrm{d}x, \quad t \geq 0,$$

é decrescente e conclua, daí, a unicidade do problema (1).