MAT0311/MAP0217 - 2o. Semestre de 2024

9a. lista de exercícios

1. Determine os pontos da hipersuperfície de $\mathbb{R}^3$ definida por $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ que são os mais próximos da origem.

2. Analisando a restrição da função

$$g : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}, \quad g(x, y) = x \cdot y,$$

à esfera $|x|^2+|y|^2 = 1$ demonstre, pelo método do multiplicador de Lagrange, a desigualdade de Cauchy-Schwarz.

3. Se $p, q > 0$ são tais que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, mostre que o mínimo de

$$f(x, y) = \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q} \qquad x, y > 0$$

sujeito a $xy = 1$ é igual a 1.

4 Usando o exercício anterior mostre que se a e b são números não negativos e p e q são como acima, então

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

Em que condições vale a igualdade?

5. Seja P_2 o conjunto dos polinômios reais de grau ≤ 2 e defina $J : P_2 \to \mathbb{R}$ por

$$J(f) = \int_0^1 f(x)^2 \, \mathrm{d}x.$$

Defina também Q como sendo o subconjunto dos elementos de P_2 que valem um quando $x = 1$. Mostre que J tem minimo em Q e calcule o ponto onde o minimo é assumido.

- - - - - o o o - - - - -