MAT0311/MAP0217 - 2o. Semestre de 2023

9a. lista de exercícios

1. Sejam $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ e $f : \Omega \to \mathbb{R}^2$ definida por $f(x,y) = (x^2 - y^2, 2xy)$. Mostre que $f'(x,y)$ é inversível, $\forall (x,y) \in \Omega$, e que f não é injetora em Ω. Compare com o Teorema da Função Inversa.

2. Seja $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ diferenciável na origem e suponha que $f'(0) = \lambda I$, onde $I \in L(\mathbb{R}^N)$ é a transformação identidade e $\lambda \in \mathbb{R}$. Mostre que existe $\delta > 0$ tal que

$$|x| < \delta \;\Rightarrow\; |f(x) - f(0)| \geq \lambda |x|/2.$$

3. Sejam $U \subset \mathbb{R}^N$ aberto, $0 \in U$, e $f : U \to \mathbb{R}^N$ de classe C^1 tal que $f(0) = 0$ e 1 não é autovalor de $f'(0)$.

1. Mostre que existe um aberto $V \subset U$, $0 \in V$, tal que $f(x) \neq x$ para todo $x \in V$, $x \neq 0$;

2. Mostre que este resultado continua válido sem a hipótese de f ser de classe C^1: basta assumir f diferenciável.

Sugestão: no ítem (1) use o Teorema da Função Inversa. Para (2) estime $|x - f(x)| \geq \ldots$

4. Mostre que as equações

$$\begin{cases} x^2 - y^2 - u^3 + v^2 + 4 &= 0 \\ 2xy + y^2 - 2u^2 + 3v^4 + 8 &= 0 \end{cases}$$

determinam funções $u(x,y)$, $v(x,y)$ de classe C^1 em um aberto de $\mathbb{R}^2$ contendo $(2,-1)$ satisfazendo $u(2,-1) = 2$, $v(2,-1) = 1$. Calcule as derivadas parciais de u e v no ponto $(2,-1)$.

- - - - - o o o - - - - -