MAT0311/MAP0217 - 2o. Semestre de 2024

7a. lista de exercícios

1. Sejam Ω um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^N$ e $f : \Omega \to \mathbb{R}$ tal que as derivadas parciais $\partial f/\partial x_j$ existem e são *limitadas* em Ω, $j = 1, \ldots, N$. Mostre que f é contínua em Ω.

2. Sejam $F \subset \mathbb{R}^M$ um subconjunto fechado e $T \subset \mathbb{R}^N$ um subconjunto qualquer. Suponha dada uma aplicação contínua

$$\Phi : F \times T \longrightarrow F$$

tal que, para algum $0 < \lambda < 1$, vale

$$|\Phi(x,t) - \Phi(y,t)| \leq \lambda |x - y|, \quad \forall x, y \in F,\, t \in T.$$

Mostre que existe uma aplicação contínua $\varphi : T \to F$ tal que $\Phi\left(\varphi(t), t\right) = \varphi(t)$, $\forall t \in T$.

3. Considere

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} \sqrt{x_1^2 + x_2^2}\,\operatorname{sen}\left(\frac{x_2^2}{x_1}\right) & \text{se } x_1 \neq 0 \\ 0 & \text{se } x_1 = 0. \end{cases}$$

Mostre que $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é contínua na origem e que existem todas as derivadas direcionais de f na origem. f é diferenciável na origem?

4. Defina $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ pela regra:

$$f(t) = \begin{cases} t + 2t^2 \operatorname{sen}(1/t) & \text{se } t \neq 0; \\ 0 & \text{se } t = 0. \end{cases}$$

Mostre que: (i) f é diferenciável em $\mathbb{R}$; (ii) $f'(0) = 1$; (iii) f é limitada em $]-1, 1[$; (iv) f não é injetora em qualquer intervalo aberto centrado na origem.