

MAT0311/MAP0217 - 2o. Semestre de 2024

6a. lista de exercícios

1. Defina $A \in L(\mathbb{R}^2)$ pela regra $A(x_1, x_2) = (x_1, 2x_2)$. Mostre que $\|A\| = 2$.
2. Seja $x_0 \in \mathbb{R}^N$. Determine a norma do funcional linear $f \in L(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$ definido por $f(x) = x \cdot x_0$.
3. Seja $A \in L(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^M)$. Mostre que

$$\|A\| = \sup \{|Ax| : x \in \mathbb{R}^N, |x| = 1\} = \sup \{|Ax| : x \in \mathbb{R}^N, |x| < 1\}.$$

4. Sejam X um espaço métrico e $a_{ij} : X \rightarrow \mathbb{R}$ funções contínuas, $i = 1, \dots, M, j = 1, \dots, N$. Para cada $x \in X$ defina $T(x) \in L(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}^M)$ de tal forma que $\{a_{ij}(x)\}$ seja a matriz de $T(x)$ com relação às bases canônicas de \mathbb{R}^N e \mathbb{R}^M respectivamente. Mostre que a aplicação $x \mapsto T(x)$ é contínua de X em $L(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^M)$.
5. Defina $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ pela regra

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} \frac{x_1 x_2}{x_1^2 + x_2^2} & \text{se } (x_1, x_2) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x_1, x_2) = (0, 0). \end{cases}$$

Mostre que as derivadas parciais $\partial f / \partial x_j, j = 1, 2$, existem em todo ponto de \mathbb{R}^2 e que f não é contínua na origem.

6. Sejam Ω um subconjunto aberto de \mathbb{R}^N e $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^M$ diferenciável no ponto $x_0 \in \Omega$. Seja $\delta > 0$ tal que $B_\delta(x_0) \subset \Omega$ e defina $r : B_\delta(0) \rightarrow \mathbb{R}^M$ pela regra

$$r(h) = f(x_0 + h) - f(x_0) - f'(x_0)h.$$

Mostre que r é diferenciável na origem.

7. Este exercício tem duas partes:

1. Seja $A \in L(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}^M)$ injetora. Mostre que existe $c > 0$ tal que $|Ax| \geq c|x|$ para todo $x \in \mathbb{R}^N$. *Sugestão:* considere a restrição de A à esfera unitária $S^{N-1} := \{x \in \mathbb{R}^N : |x| = 1\}$.
2. Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ aberto, $0 \in \Omega$ e $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^M$, diferenciável em 0. Assuma que $f(0) = 0$ e que $f'(0)$ seja injetora. Mostre que existem $c > 0$ e $\delta > 0$ tal que $x \in B_\delta(0) \implies |f(x)| \geq c|x|$.
8. Dado $U \subset \mathbb{R}^N$ aberto, seja $f : U \rightarrow \mathbb{R}^M$ diferenciável em $x_0 \in U$. Prove que se $v_k \rightarrow v$ em \mathbb{R}^N e se $t_k \rightarrow 0$ em \mathbb{R} ($t_k \neq 0$), então

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{f(x_0 + t_k v_k) - f(x_0)}{t_k} = f'(x_0)v.$$