

5a. lista de exercícios

1. Sejam (X, d_X) , (Y, d_Y) espaços métricos, com Y completo. Sejam $E \subset X$ com $\overline{E} = X$ e $f : E \rightarrow Y$ uniformemente contínua. Mostre que f admite uma (única) extensão contínua a X , isto é, que existe $f^\# : X \rightarrow Y$ contínua tal que $f^\# = f$ em E .

2. Sejam (a_n) uma sequência limitada de números reais e p um inteiro não negativo. Mostre que a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n n^p e^{-nx} \quad (\star)$$

define uma função contínua em $]0, \infty[$.

3. Sejam $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ definidas por

$$f_n(x) = nx(1 - x^2)^n, \quad n = 1, 2, \dots$$

Mostre que $f_n \rightarrow 0$ pontualmente em $[0, 1]$ e que

$$\int_0^1 f_n(x) dx \rightarrow \frac{1}{2}.$$

4. Sejam $f_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ contínuas, $n = 1, 2, \dots$, e suponha que $f_n \rightarrow f$ uniformemente em $[a, b]$. Mostre que

$$\int_a^b f_n(x) dx \rightarrow \int_a^b f(x) dx.$$

5. Seja S um conjunto não-vazio e (X, d) um espaço métrico. Uma função $f : S \rightarrow X$ é limitada se $\{f(x) : x \in S\}$ é limitado em X . Uma sequência de funções $f_n : S \rightarrow X$, $n \in \mathbb{N}$, é *uniformemente limitada* se existir $C > 0$ tal que $\delta(\{f_n(x) : x \in S\}) \leq C$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

a) Mostre que uma sequência de funções limitadas que converge uniformemente é uniformemente limitada.

b) Sejam (f_n) , (g_n) , $f_n, g_n : X \rightarrow \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, sequências de funções que convergem uniformemente. Mostre que $(f_n + g_n)$ converge uniformemente. Mostre, ainda, que se f_n e g_n são limitadas para todo $n \in \mathbb{N}$ então $(f_n g_n)$ converge uniformemente.

6. Mostre que a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^2 + n}{n^2}$$

converge uniformemente em qualquer intervalo limitado, mas não converge absolutamente para qualquer valor de x .

7. Sejam X um espaço métrico, $f_n : X \rightarrow \mathbb{R}$ uma sequência de funções contínuas convergindo uniformemente para $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, e (x_n) uma sequência em X , $x_n \xrightarrow{X} x$. Mostre que $f_n(x_n) \xrightarrow{\mathbb{R}} f(x)$.

----- o o o o -----