

MAT0311/MAP0217 - 2o. Semestre de 2024

4a. lista de exercícios

1. Sejam (X, d) um espaço métrico e $(x_n), (y_n)$ seqüências em X . Mostre que se $x_n \xrightarrow{X} x$ e $y_n \xrightarrow{X} y$ então $d(x_n, y_n) \xrightarrow{\mathbb{R}} d(x, y)$.
2. Defina $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ do seguinte modo: $f(x) = 1$ se $x \in \mathbb{Q}$, $f(x) = 0$ se $x \notin \mathbb{Q}$. Existem pontos em $[0, 1]$ nos quais f é contínua?
3. Defina $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ do seguinte modo: $f(0) = 0$, $f(x) = 0$ se $x \notin \mathbb{Q}$, $f(x) = 1/q$ se $x \in \mathbb{Q}$, $x = p/q$, com $p, q \in \mathbb{N}$, na forma irredutível. Existem pontos em $[0, 1]$ nos quais f é contínua?
4. Sejam (X, d_X) e (Y, d_Y) espaços métricos e E um subconjunto de X . Mostre que se $f : X \rightarrow Y$ é contínua então $f(\overline{E}) \subseteq \overline{f(E)}$. Mostre também, por um exemplo, que a inclusão pode ser própria.
5. Sejam (X, d) , (Y, ρ) espaços métricos e $f, g : X \rightarrow Y$ contínuas. Suponha que $f(x) = g(x)$ para todo $x \in E$, com $\overline{E} = X$. Mostre que $f = g$.
6. Seja $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ a função que vale zero para $0 \leq x < 1/2$, vale um para $1/2 < x \leq 1$ e vale $1/2$ para $x = 1/2$. Determine um subconjunto U aberto em \mathbb{R} tal que $f^{-1}(U)$ não é aberto em \mathbb{R} .
7. Sejam (X, d_X) , (Y, d_Y) espaços métricos e $f : X \rightarrow Y$ bijetora e contínua. Mostre que se X é compacto então $f^{-1} : Y \rightarrow X$ é contínua.
8. Sejam (X, d) um espaço métrico, $K \subset X$ compacto e $f : X \rightarrow X$ contínua. Para cada uma das afirmações abaixo justifique se verdadeira ou forneça um contra-exemplo se falsa:
 1. $f^{-1}(K)$ é fechado em X ;
 2. $f^{-1}(K)$ é compacto;
 3. $f(K)$ é fechado em X .
9. Sejam (X, d_X) , (Y, d_Y) espaços métricos e $f : X \rightarrow Y$. Dizemos que f é *própria* se $f^{-1}(K)$ é compacto em X , qualquer que seja o compacto K de Y . Mostre as seguintes propriedades:
 - Se X é compacto e se $f : X \rightarrow Y$ é contínua então f é própria;
 - Se Y é compacto e se $f : X \rightarrow Y$ é própria então f é contínua;
 - Dada $f : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^M$ escrevemos $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ se para todo $R > 0$ existir $\rho > 0$ tal que se $x \in \mathbb{R}^N$ e se $|x| > \rho$ então $|f(x)| > R$. Mostre que se f é própria então $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ e também que, se f for contínua, a recíproca é verdadeira.

10. Seja $f : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^M$ contínua. Mostre que o gráfico de f

$$G(f) = \{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^M : x \in \mathbb{R}^N\}$$

é fechado em $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^M$.

11. Seja $f : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^M$ satisfazendo as seguintes propriedades:

- $f(B)$ é limitado em \mathbb{R}^M , qualquer que seja $B \subset \mathbb{R}^N$ limitado;
- O conjunto $G(f)$ é fechado em $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^M$.

Mostre que f é contínua em \mathbb{R}^N .

12. Considere os seguintes subconjuntos de \mathbb{R}^2 :

$$F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}, \quad G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - y^2 = 1\}.$$

Mostre que F e G são fechados em \mathbb{R}^2 . Estes conjuntos são conexos? Justifique sua resposta.

13. Mostre que $\mathbb{R}^N \setminus \{0\}$ é conexo se, e só se, $N \geq 2$.

14. Mostre que um espaço métrico (X, d) enumerável é totalmente desconexo. *Sugestão:* Fixado $x_0 \in X$ mostre que $x \mapsto d(x, x_0)$ é contínua em X .