

MAT0311/MAP0217 - 2o. Semestre de 2024

3a. lista de exercícios

1. Sejam (X, d) um espaço métrico e $Y \subset X$ não vazio. Mostre que $F \subset Y$ é fechado em (Y, d^Y) se, e só se, existe $F^\# \subset X$ fechado em X tal que $F = Y \cap F^\#$.
2. Dada uma sequência $\{x_n\}$ limitada em um espaço métrico X defina $E_m = \{x_n : n \geq m\}$. Mostre que $\{x_n\}$ é uma sequência de Cauchy se, e somente se,

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \delta(E_m) = 0.$$

3. Sejam $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ sequências de Cauchy em um espaço métrico munido da distância d . Mostre que a sequência $\{d(x_n, y_n)\}$ converge em \mathbb{R} .
4. Seja $\{F_n\}$, $n \in \mathbb{N}$, uma sequência de subconjuntos não-vazios, fechados e limitados em um espaço métrico completo X , com $F_n \supset F_{n+1}$ para todo n . Mostre que se $\delta(F_n) \rightarrow 0$, então $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$ é um conjunto com um único elemento.
5. Seja X um espaço munido da métrica discreta. Caracterize as sequências de Cauchy e as sequências convergentes em X . Conclua que X é um espaço métrico completo.
6. Seja $\{x_n\}$ uma sequência de números reais, $x_n \rightarrow x$. Defina

$$y_n = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n x_j, \quad n = 1, 2, \dots$$

Mostre que $y_n \rightarrow x$.

7. Sejam $F, K \subset \mathbb{R}^N$, F fechado e K compacto. Mostre que

$$F + K \doteq \{x + y, x \in F, y \in K\}$$

é fechado em \mathbb{R}^N . Mostre, também, que $F + K$ é compacto se ambos F e K o forem.

8. Sejam (X, d) um espaço métrico e A, B subconjuntos limitados de X . Mostre que

$$\delta(A \cup B) \leq d(A, B) + \delta(A) + \delta(B).$$

Conclua que se A_1, \dots, A_n são subconjuntos limitados de X então $\bigcup_i^n A_i$ também é subconjunto limitado de X .

9. Um espaço métrico (X, d) é *separável* se existir $Y \subset X$ enumerável com $\overline{Y} = X$. Mostre que as propriedades a seguir são equivalentes:

1. X é separável;
2. X admite uma base enumerável de abertos.

10. Sejam (X, d) um espaço métrico e Y um subconjunto de X . Mostre que se (Y, d_Y) é um espaço métrico completo então Y é fechado em X .

11. Sejam (X, d) um espaço métrico e (x_n) uma sequência em X . Suponha que

$$\sum_{n=1}^{\infty} d(x_n, x_{n+1}) < \infty.$$

Mostre que (x_n) é uma sequência de Cauchy em X .

12. Uma métrica d sobre um conjunto X é chamada *ultramétrica* se, para quaisquer $x, y, z \in X$, vale:

$$(\dagger) \quad d(x, y) \leq \max \{d(x, z), d(z, y)\}.$$

Note que a propriedade (\dagger) implica a desigualdade triangular. Mostre que se a métrica d é uma ultramétrica então uma sequência (x_n) em X é uma sequência de Cauchy se, e só se, $d(x_n, x_{n+1}) \rightarrow 0$.