

MAT0311/MAP0217 - 2o. Semestre de 2024

2a. lista de exercícios

1. Sejam (X, d) um espaço métrico e $A \subset X$. Mostre que A' é fechado em X . Mostre também que $A' = (\overline{A})'$. É verdade que $A' = (A')'$?
2. Seja (X, d) um espaço métrico. Mostre que
 - Se $A, B \subset X$ então $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.
 - Se $\{A_n\}$ é uma sequência de subconjuntos de X e se $B = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ então $\bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{A_n} \subset \overline{B}$. Mostre também, através de um exemplo, que a inclusão pode ser própria.
3. Seja $A \neq \emptyset$ um subconjunto de \mathbb{R} , limitado superiormente. Mostre que $\sup A \in \overline{A}$.
4. Sejam (X, d) um espaço métrico e $S \subset X$ limitado. Mostre que $\delta(S) = \delta(\overline{S})$.
5. Sejam (X, d) um espaço métrico e $K \subset Y \subset X$. Mostre que K é compacto em (X, d) se, e somente se, K é compacto em (Y, d_Y) .
6. Construa um subconjunto compacto $E \subset \mathbb{R}$ tal que E' seja infinito e enumerável.
7. Seja (X, d) um espaço métrico. Dados $x \in X$ e $A \subset X$ não vazio defina a *distância de x ao subconjunto A* como sendo o número real

$$d(x, A) \doteq \inf\{d(x, a) : a \in A\}.$$

Mostre que $d(x, A) = 0$ se, e somente se, $x \in \overline{A}$. Mostre, também, que se A é compacto então existe $a_* \in A$ tal que $d(x, A) = d(x, a_*)$.

8. Sejam (X, d) um espaço métrico e $A \subset X$. Mostre que

$$|d(x, A) - d(y, A)| \leq d(x, y), \quad x, y \in X.$$

9. Sejam (X, d) um espaço métrico, $F \subset X$ fechado e $K \subset X$ compacto, $F \cap K = \emptyset$. Mostre que existe $\delta > 0$ tal que $d(x, y) \geq \delta$ se $x \in F$, $y \in K$. Mostre, também, que a conclusão pode ser falsa para dois fechados disjuntos quaisquer.

10. Um espaço métrico (X, d) é *separável* se X contém um subconjunto enumerável A tal que $\overline{A} = X$. Mostre que \mathbb{R}^N é separável.

11. Uma coleção $\{U_i\}_{i \in I}$ de abertos de um espaço métrico (X, d) é chamada de *base para (X, d)* se vale o seguinte: *dados $G \subset X$ aberto e $x \in G$ existe $i \in I$ tal que $x \in U_i \subset G$.*

1. Mostre que $\{U_i\}_{i \in I}$ é uma base para X se, e somente se, dado $G \subset X$ aberto existe $J \subset I$ tal que

$$G = \bigcup_{i \in J} U_i.$$

2. Mostre que se X é separável então X admite uma base enumerável. *Sugestão:* se E é enumerável e denso em X considere as bolas abertas de centro em E e raio racional.

12. Seja (X, d) um espaço métrico. Mostre que X é compacto se, e somente se, dada uma família $(F_\alpha)_{\alpha \in A}$ de subconjuntos fechados em X tal que $\bigcap_{\alpha \in J} F_\alpha \neq \emptyset$, para todo $J \subset A$ finito, então $\bigcap_{\alpha \in A} F_\alpha \neq \emptyset$.

--- ooo ---

13. No Inferno, Canto V, Dante e Virgílio encontram-se com Francesca da Rimini e Paolo. Trata-se, aqui, do lugar no Inferno onde estão as almas dos adúlteros. Francesca e Paolo tiveram um relacionamento adúltero, mas se amavam profundamente, o que deixou Dante emocionado. Em um momento da conversa entre eles, Francesca pronuncia o seguinte verso:

Amor, ch'a nullo amato amar perdona,

o qual foi traduzido por Ítalo Eugenio Mauro como

Amor, que a amado algum amar perdoa.

Você teria uma interpretação para verso?