MAT0311/MAP0217 - 2o. Semestre de 2024

1a. lista de exercícios

1. Dado um conjunto X denotamos por $\mathcal{P}(X)$ o conjunto das partes de X, isto é, o conjunto formado por todos os subconjuntos de X. Mostre que não existe uma aplicação $f : X \to \mathcal{P}(X)$ que seja sobrejetora. *Sugestão*: considere

$$\{x \in X : x \notin f(x)\} \in \mathcal{P}(X).$$

2. Sejam Ω e I conjuntos não-vazios e $(E_i)_{i\in I}$ uma família de subconjuntos de Ω. Prove as leis de De Morgan:

$$\Omega \setminus \bigcup_{i\in I} E_i = \bigcap_{i\in I}(\Omega \setminus E_i); \quad \Omega \setminus \bigcap_{i\in I} E_i = \bigcup_{i\in I}(\Omega \setminus E_i).$$

4. Mostre que, em $\mathbb{N}$, os princípios da indução finita e da boa ordem são equivalentes.

5. Mostre que não existe $r \in \mathbb{Q}$ com $r^2 = 12$.

6. Um número real x é <u>algébrico</u> se existem $a_0, a_1 \ldots, a_m$ inteiros, com $m \geq 1$ e $a_m \neq 0$, tais que

$$a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0\,.$$

Mostre que o conjuntos dos números algébricos é infinito e enumerável.

7. Seja $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$ e considere, para $z, w \in D$,

$$\rho(z,w) = \begin{cases} |z-w| & \text{se } z = 0 \text{ ou } w = 0; \\ |z-w| & \text{se } z \neq 0,\ w \neq 0 \text{ e } \arg z = \arg w; \\ |z| + |w| & \text{nos outros casos.} \end{cases}$$

Mostre que (D, ρ) é um espaço métrico, chamado de o *espaço da ferrovia francesa*. Faça um esboço para apreciar a razão deste nome.

8. Sejam X um espaço métrico e $A \subset X$. Defina o *interior de* A como sendo

$$A^{\circ} = \{x \in A : \text{ existe}\, r > 0\, \text{tal que } B_r(x) \subset A\}\,.$$

Mostre que A° é aberto em X e que A é aberto em X se, e só se, $A = A^{\circ}$. Mostre também que se $B \subset A$ é aberto em X então $B \subset A^{\circ}$. Conclua que

$$A^{\circ} = \bigcup_{B\in\mathcal{A}} B\,,$$

onde $\mathcal{A}$ é a família de todos os subconjuntos de A que são abertos em X.

9. Denote por $\mathbb{Q}(X)$ o corpo das funções racionais com coeficientes em $\mathbb{Q}$ na indeterminada X. Formalmente, os elementos **não nulos** de $\mathbb{Q}(X)$ são da forma

$$\frac{p(X)}{q(X)}$$

onde $p(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$, $q(X) = \sum_{j=0}^{m} b_j X^j$, os números a_k e b_j são racionais e $a_n \neq 0$, $b_m \neq 0$. Adição e multiplicação em $\mathbb{Q}(X)$ são definidas da maneira usual. Defina o conjunto dos elementos não negativos de $\mathbb{Q}(X)$ como sendo

$$\mathcal{P} \doteq \left\{ \frac{p(X)}{q(X)} : a_n b_m \geq 0 \right\}.$$

e, a partir de $\mathcal{P}$, defina uma ordem em $\mathbb{Q}(X)$. Mostre que $\mathbb{Q}(X)$ é um corpo ordenado que não satisfaz a propriedade arquimediana.