MAT5014 - 1o. Semestre de 2024

2a. lista de exercícios

1. Sejam X um conjunto ($\neq \emptyset$) e $\mathsf{P}(X) = \{A : A \subset X\}$. Um conjunto $\mathcal{F} \subset \mathsf{P}(X)$ não vazio é chamado um *filtro (de subconjuntos de X)* se valem as seguintes propriedades:

- $\emptyset \notin \mathcal{F}$;
- $A, B \in \mathcal{F} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{F}$;
- $A \in \mathcal{F}$, $A \subset C \Rightarrow C \in \mathcal{F}$.

Seja $(X, \mathfrak{T})$ um espaço topológico. Dado $x \in X$, o conjunto das vizinhanças de x (relativas a $\mathfrak{T}$) define um filtro $\mathcal{V}(x)$ que satisfaz as seguintes propriedades:

(a) $x \in V$, para toda $V \in \mathcal{V}(x)$;

(b) Se $U \in \mathcal{V}(x)$ existe $V \in \mathcal{V}(x)$ tal que $U \in \mathcal{V}(y)$, para todo $y \in \mathcal{V}$.

Exercício Seja X um conjunto ($\neq \emptyset$) e suponha que, para cada $x \in X$, seja dado um filtro $\mathcal{V}(x)$ de subconjuntos de X satisfazendo (a) e (b). Defina $\mathfrak{T} \subset \mathsf{P}(X)$ da seguinte forma: $U \in \mathfrak{T}$ se, e somente se, $U \in \mathcal{V}(x)$ para todo $x \in U$. Mostre que $(X, \mathfrak{T})$ é um espaço topológico e que, para cada $x \in X$, $\mathcal{V}(x)$ é o filtro das vizinhanças de x relativas à topologia $\mathfrak{T}$.

2. Seja G um grupo abeliano topológico. Então dado $x \in G$ temos $\mathcal{V}(x) = \{x + V : V \in \mathcal{V}(0)\}$ e $\mathcal{V}(0)$ satisfaz as seguintes propriedades adicionais:

(c) Dado $x \in G$, $x \neq 0$, existe $V \in \mathcal{V}(0)$ tal que $0 \notin x + V$;

(d) Dada $V \in \mathcal{V}(0)$ existe $W \in \mathcal{V}(0)$ tal que $W - W \subset V$.

Exercício. Seja G um grupo abeliano e suponha que, para cada $x \in X$, seja dado um filtro $\mathcal{V}(x)$ de subconjuntos de G satisfazendo (c), (d) e:

(e) $\mathcal{V}(x) = \{x + V : V \in \mathcal{V}(0)\}$;

(f) $0 \in V$, para toda $V \in \mathcal{V}(0)$;

(g) Se $U \in \mathcal{V}(0)$ existe $V \in \mathcal{V}(0)$ tal que $U \in \mathcal{V}(y)$, para todo $y \in \mathcal{V}$.

Defina $\mathfrak{T} \subset \mathsf{P}(G)$ da seguinte forma: $U \in \mathfrak{T}$ se, e somente se, $U \in \mathcal{V}(x)$ para todo $x \in U$. Mostre que $(G, \mathfrak{T})$ é um grupo abeliano topológico e que, para cada $x \in G$, $\mathcal{V}(x)$ é o filtro das vizinhanças de x relativas à topologia $\mathfrak{T}$.