## MAT5014 - 1o. Semestre de 2024

### 1a. lista de exercícios

**1.** Seja $f \in L^2(\mathrm{T})$ com $c_n(f) = 0$ se $n < 0$. Mostre que existem $F \in \mathcal{O}(\Delta)$ e $r_j \nearrow 1$ tais que $F(r_j e^{i\theta}) \overset{j\to\infty}{\longrightarrow} f(\theta)$ para quase todo $\theta$. Mostre também que, se $f \in \mathrm{L}^2(\mathrm{T})$ é arbitrária, existem $u$ harmônica em $\Delta$ e $r_j \nearrow 1$ tais que $u(r_j e^{i\theta}) \overset{j\to\infty}{\longrightarrow} f(\theta)$ para quase todo $\theta$

**2.** Dados $z_0 \in \mathbb{C}$, $t_0 \in \mathrm{T}$ e $f \in L^1(\mathrm{T})$, mostre que as propriedades a seguir são equivalentes:

$(a)$
$$S_N(f, t_0) \overset{N\to\infty}{\longrightarrow} z_0;$$

$(b)$
$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} \left[f(t_0+\theta) + f(t_0-\theta) - 2z_0\right] D_N(\theta)\,\mathrm{d}\theta \overset{N\to\infty}{\longrightarrow} 0;$$

$(c)$ Existe $\delta > 0$ tal que
$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{\delta} \left[f(t_0+\theta) + f(t_0-\theta) - 2z_0\right] D_N(\theta)\,\mathrm{d}\theta \overset{N\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

**3.** Conclua o *princípio de localização de Riemann:* Sejam $f, g \in L^1(\mathrm{T})$ e suponha que $f = g$ em $[t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon]$. Então $f$ e $g$ tem o mesmo comportamento de convergência no ponto $t_0$, isto é, ou $S_N(f, t_0)$ e $S_N(g, t_0)$ convergem, ou ambas divergem.

**4.** Seja $f \in C(\mathrm{T})$ e suponha que existam $C, \alpha > 0$ tal que
$$|f(\theta_1) - f(\theta_2)| \leq C|\theta_1 - \theta_2|^{\alpha},\ \ \theta_1, \theta_2 \in [-\pi, \pi[.$$
Mostre que, para todo $t \in \mathrm{T}$, $S_N(f, t) \overset{N\to\infty}{\longrightarrow} f(t)$. *Sugestão*: mostre, primeiramente, que podemos assumir $t = 0$ e $f(0) = 0$. Mostre, depois, que a diferença entre $S_N(f, 0)$ e as integrais
$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\frac{\operatorname{sen} Nt}{t}\,\mathrm{d}t$$
converge a zero.

**5.** Mostre que $\mathcal{O}(\Delta) \cap L^2(\Delta)$ é um subespaço fechado de $L^2(\Delta)$ e, portanto, um espaço de Hilbert (use as estimativas de Cauchy). Mostre também que $H^2(\Delta) \subset \mathcal{O}(\Delta) \cap L^2(\Delta)$