**MAP5712 - 2o. Semestre de 2022**

**4a. lista de exercícios**

**1.**. Sejam $f \in C^2(\mathbb{R})$ e $g \in C^1(\mathbb{R})$, ambas se anulando no complementar de um subconjunto compacto de $\mathbb{R}$, e seja também $u(x,t)$ a solução do problema

$$u_{tt}(x,t) - u_{xx}(x,t) = 0 \text{ em } \mathbb{R} \times \mathbb{R};\ u(x,0) = f(x),\ u_t(x,0) = g(x).$$

Mostre que para cada $t \geq 0$ a função

$$x \mapsto u_t(x,t)^2 + u_x(x,t)^2$$

se anula no complementar de um compacto de $\mathbb{R}$. Considere a função energia

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} \left[ u_t(x,t)^2 + u_x(x,t)^2 \right] \mathrm{d}x.$$

Mostre que $t \mapsto E(t)$ é constante,

**2.** Considere o problema

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} - u_{yy} = 0 \ \text{ em } \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \\ u(x,y,0) = f(x) + F(y) \\ u_t(x,y,0) = g(x) + G(y). \end{cases}$$

Determine condições mínimas de regularidade sobre $f, F, g, G$ para que o problema acima tenha solução de classe $C^2$ em $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$. Determine $u$.

**3.** Seja $u \in C^2(\mathbb{R}^2)$ solução de

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0 & x, t \in \mathbb{R}^2; \\ u(x,0) = f(x) & x \in \mathbb{R}; \\ u_t(x,0) = g(x) & x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

Dado $(x,t) \in \mathbb{R}^2$ com $t > 0$ seja $K$ o compacto de $\mathbb{R}^2$ cujo bordo é definido pelo triângulo com vértices $A = (x,t)$, $B = (x+t, 0)$, $C = (x-t, 0)$. Suponha que $g \leq 0$ em $\overline{BC}$. Mostre que o máximo de $u$ em $K$ é assumido em $\overline{BC}$.

**4.** Sejam $a, b, c \in \mathbb{R}$ satisfazendo $a^2 - b^2 = 4c$. Determine a solução geral de

$$u_{tt} - u_{xx} + au_t + bu_x + cu = 0$$

em $\mathbb{R}^2$. Ainda sob estas condições determine a solução $u(x,t)$ de classe $C^2$ em $\mathbb{R}^2$ para o problema de Cauchy

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} + au_t + bu_x + cu = 0 & \text{em } \mathbb{R}^2 \\ u(x,0) = f(x),\ u_t(x,0) = g(x) & \text{em } \mathbb{R}, \end{cases}$$

**5.** Seja $f \in C^2(\mathbb{R})$ ímpar, $f = 0$ no complementar de $[-2,-1] \cup [1,2]$. Esboce, no semi-plano $\{(x,t) \in \mathbb{R}^2 : t > 0\}$, o conjunto dos pontos onde você pode assegurar que a solução do problema abaixo se anula:

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0 & \text{em } \mathbb{R}\times]0,\infty[, \\ u(x,0) = f(x), & x \in \mathbb{R}, \\ u_t(x,0) = 0, & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$