MAP5712 - 2o. Semestre de 2022

2a. lista de exercícios

1. Discuta o problema

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0 \text{ em }]0,\pi[\times]0,\infty[\\ u(x,0) = u_0(x) \\ u_x(0,t) = u_x(\pi,t) = 0, \end{cases}$$

explicitando a regularidade do dado inicial e da solução obtida.

2. Demonstre a *fórmula de Parseval:*

$$\int_{\mathbb{R}^N} f(x)\,\overline{g(x)}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{(2\pi)^N}\int_{\mathbb{R}^N} \hat{f}(\xi)\,\overline{\hat{g}(\xi)}\,\mathrm{d}\xi, \quad f,g\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^N).$$

Nos exercícios abaixo, utilize as seguintes notações, para $f,g\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$:

$$\|f\|_\infty := \sup_{x\in\mathbb{R}^N}|f(x)|;$$

$$\|f\|_2 = \left\{\int_{\mathbb{R}^N}|f(x)|^2\mathrm{d}x\right\}^{1/2}.$$

Lembre-se, também, da desigualdade de Cauchy-Schwarz:

$$\int_{\mathbb{R}^N}|f(x)g(x)|\mathrm{d}x \le \|f\|_2\,\|g\|_2.$$

3. Dada $f\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ e dado $h\in\mathbb{R}^N$ defina $(\tau_h f)(x) = f(x+h)$. Utilize a fórmula de Parseval (exercício 2) para mostrar que

$$\lim_{h\to 0}\|\tau_h f - f\|_2 = 0.$$

4. Demonstre a seguinte desigualdade: existe uma constante $C>0$ tal que

$$\|f\|_\infty \le C\left\{\|f\|_2 + \|f'\|_2\right\}, \quad \forall f\in\mathcal{S}(\mathbb{R}).$$

Sugestão: Inicie estimando

$$|f(x)| \le \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}}|\hat{f}(\xi)|\,\mathrm{d}\xi = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}}|(1+i\xi)\hat{f}(\xi)|\frac{1}{(1+\xi^2)^{1/2}}\,\mathrm{d}\xi$$

e aplique a desigualdade de Cauchy-Schwarz.

5. Dadas $f\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ e $A:\mathbb{R}^N\to\mathbb{R}^N$ linear inversível defina $g = f\circ A$. Mostre que $g\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ e calcule $\hat{g}$ em termos de $\hat{f}$. Conclua $(\Delta f)\circ A = \Delta(f\circ A)$ se A é uma transformação ortogonal.

6. Mostre que a aplicação $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N) \ni f \mapsto f - \Delta f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ é uma bijeção.

7. Sejam $u, v \in C(\mathbb{R}^N)$, ambas se anulando no complementar de um compacto de $\mathbb{R}^N$. Mostre que $u \star v$ também se anula no complementar de um compacto de $\mathbb{R}^N$.

Sugestão: Suponha que u se anula no complementar do compacto K_1 e que v se anula no complementar do compacto K_2. Mostre que $K_1 + K_2 \doteq \{x + y : x \in K_1,\, y \in K_2\}$ é compacto e que $u \star v$ se anula no complementar de $K_1 + K_2$.