MAP5712 - 2o. Semestre de 2022

1a. lista de exercícios

1. Seja Ω um aberto com fronteira regular e considere as sequências $\{\lambda_k\}$ e $\{u_k\}$, respectivamente dos autovalores e das correspondentes autofunções do operador Δ com condição de Dirichlet em Ω . Aqui $\{u_k\}$ é assumida normalizada em $L^2(\Omega)$, formando uma base hilbertiana para $L^2(\Omega)$. Seja $u \in C^1(\bar{\Omega})$, $u = 0$ em $\partial\Omega$. Mostre que existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\left| \int_{\Omega} u(x) u_k(x) dx \right| \leq C/\lambda_k^{1/2}, \quad k = 1, 2, \dots$$

2. Seja $u(x, t)$ uma solução de classe C^2 da equação

$$u_t = u_{xx} + u$$

em $]0, a[\times]0, T[\subset \mathbb{R}^2$, contínua em $[0, a] \times [0, T]$. Mostre que

$$\max_{[0, a] \times [0, T]} |u| \leq e^T \max_{\gamma} |u|,$$

onde $\gamma \doteq (\{0\} \times [0, T]) \cup (\{a\} \times [0, T]) \cup ([0, a] \times \{0\})$.

3. Dados $x \in \mathbb{R}$ e $w \in \mathbb{C}$, $w \neq 0$, considere a função

$$w \mapsto \exp\{x(w - 1/w)/2\}.$$

em torno da origem. Na expansão

$$(1) \quad \exp\{x(w - 1/w)/2\} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} J_n(x) w^n$$

o coeficiente $J_n(x)$ denomina-se *função de Bessel de ordem n* . Diferenciando (1) com relação a x e a w mostra-se facilmente que $J_n(x)$ é solução da seguinte equação diferencial ordinária de segunda ordem, chamada *equação de Bessel*:

$$(2) \quad x^2 y''(x) + xy'(x) + (x^2 - n^2)y(x) = 0.$$

Substituindo $y(x) = \sum_{p=0}^{\infty} a_p x^p$ em (2) obtém-se:

$$(3) \quad J_n(x) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p x^{n+2p}}{2^{n+2p} p! (n+p)!}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Valem, então, as seguintes propriedades:

- (i) A série (3) converge absolutamente para todo $x \in \mathbb{R}$, uniformemente sobre os compactos de $\mathbb{R}$ (isto segue do fato que seu raio de convergência é infinito).
- (ii) Toda solução de (2) que é limitada em uma vizinhança de $x = 0$ é um múltiplo de J_n ;

(iii) $J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x)$.

(iv) Cada $J_n(x)$ tem um número infinito de zeros, todos simples (com a única possível exceção de $x = 0$). Se $n \geq 0$ os zeros > 0 de $J_n(x)$ são usualmente denotados por $j_{n,k}$, $k = 1, 2, \dots$. Existem tabelas que expressam estes valores. Por exemplo, os cinco primeiros zeros positivos de cada uma das funções J_n , $n = 0, \dots, 5$ são dados, em valores aproximados, por

	$J_0(x)$	$J_1(x)$	$J_2(x)$	$J_3(x)$	$J_4(x)$	$J_5(x)$
$j_{n,1}$	2.40	3.83	5.14	6.38	7.59	8.77
$j_{n,2}$	5.52	7.02	8.42	9.76	11.06	12.34
$j_{n,3}$	8.65	10.17	11.62	13.02	14.37	15.70
$j_{n,4}$	11.79	13.32	14.80	16.22	17.62	18.98
$j_{n,5}$	14.93	16.47	17.96	19.41	20.83	22.23

Com base nestas informações, resolva os itens descritos a seguir:

(a) Calcule os autovalores (e as autofunções correspondentes) para o operador de Laplace no disco

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}.$$

Sugestão. Utilize coordenadas polares e o método de separação de variáveis.

(b) Conclua a validade das seguintes relações de ortogonalidade:

$$\int_0^1 x J_n(j_{n,m}x) J_n(j_{n,k}x) dx = 0, \quad n \geq 0, \quad m, k \geq 1, \quad m \neq k.$$