FUNÇÕES HARMÔNICAS

Notas escritas por Antonio Victor da Silva Junior

para um curso ministrado por Paulo D. Cordaro

5a. versão - Outubro de 2022

1 Preliminares - O problema de Dirichlet

Denotaremos por

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2}{\partial x_N^2}$$

o operador de Laplace (ou laplaciano) em $\mathbb{R}^N$.

1.1 Definição. Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um subconjunto aberto. Uma função $u \in \mathcal{C}^2(\Omega)$ é dita *harmônica em* Ω se $\Delta u = 0$ em Ω.

Note que se u é a valores complexos então u é harmônica se, e somente se, $\mathsf{Re} u$ e $\mathsf{Im} u$ são harmônicas; isto se deve ao fato de Δ ser um operador com coeficientes reais. Assim, para o estudo das propriedades das funções harmônicas podemos nos restringir ao caso em que as funções são a valores reais.

1.2 Exemplo. São exemplos de funções harmônicas

1. Seja $\Omega = \mathbb{R}^N$ e $u(x) = a + \langle x, b \rangle$, com $a \in \mathbb{R}$ e $b \in \mathbb{R}^N$;
2. Seja $\Omega \subset \mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$ aberto e $f : \Omega \to \mathbb{C}$ uma função holomorfa então $\mathsf{Re} f$ e $\mathsf{Im} f$ são harmônicas;
3. Seja $\Omega = \mathbb{R}^N$. Se $\zeta = (\zeta_1, \ldots, \zeta_N) \in \mathbb{C}^N$ satisfaz $\zeta_1^2 + \cdots + \zeta_N^2 = 0$, então $u(x) = \mathsf{Re}\, e^{\langle x, \zeta \rangle}$ e $v(x) = \mathsf{Im}\, e^{\langle x, \zeta \rangle}$ são harmônicas.

1.3 Teorema. *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um subconjunto aberto limitado e $u \in \mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}(\overline{\Omega})$.*

1. Se $\Delta u \geq 0$, então

$$\max_{\overline{\Omega}} u = \max_{\partial\Omega} u;$$

2. Se $\Delta u \leq 0$, então

$$\min_{\overline{\Omega}} u = \min_{\partial\Omega} u.$$

1.4 Corolário. *(Princípio do máximo, forma fraca) Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um subconjunto aberto limitado e $u \in \mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}(\overline{\Omega})$ harmônica em Ω. Então*

$$\max_{\overline{\Omega}} u = \max_{\partial\Omega} u, \quad \min_{\overline{\Omega}} u = \min_{\partial\Omega} u.$$

1.5 Observação. Se u é harmônica e se $|u(x)| \leq M$ para $x \in \partial\Omega$ segue do Corolário 1.4 que $|u(x)| \leq M$ para $x \in \Omega$. Em particular, se $u \equiv 0$ em $\partial\Omega$, então $u \equiv 0$ em $\overline{\Omega}$.

Demonstração do Teorema 1.3. Mostraremos (1.), a demonstração de (2.) é análoga. Consideremos

$$m = \max_{\partial\Omega} u\,,$$

$$M = \max_{\overline{\Omega}} u\,.$$

Suponha, por absurdo, que $m < M$. Então existe $x_0 \in \Omega$ tal que $u(x_0) = M$ e, ademais, vale $\nabla u(x_0) = 0$ e $\Delta u(x_0) \leq 0$. Seja $v \in \mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}(\overline{\Omega})$ a função dada por

$$v(x) = u(x) + \varepsilon|x - x_0|^2,$$

em que $\varepsilon > 0$ é um número que determinaremos a seguir. Temos $v(x_0) = M$, e para $x \in \partial\Omega$, vale $v(x) \leq m + \varepsilon\delta(\Omega)^2$, em que $\delta(\Omega)$ é o *diâmetro* de Ω. Logo, se escolhermos $\varepsilon > 0$ tal que $\varepsilon < (M - m)/\delta(\Omega)^2$, teremos $v(x) < M$. Tal escolha implica que existe $x_1 \in \Omega$ um ponto no qual a função v assume seu valor máximo. Mas $\Delta v(x_1) = \Delta u(x_1) + 2N\varepsilon \geq 2N\varepsilon > 0$, uma contradição. $\square$

O *problema de Dirichlet* para Ω consiste em, dada $u_0\partial\Omega \to \mathbb{R}$ contínua, determinar $u \in \mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}(\overline{\Omega})$ tal que

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{em } \Omega, \\ u = u_0 & \text{em } \partial\Omega. \end{cases}$$

1.6 Definição. Um subconjunto aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é dito um *aberto de Dirichlet* se o problema de Dirichlet tiver solução para toda u_0.

Note que o problema de Dirichlet admite no máximo uma solução, uma consequência do resultado enunciado na observação 1.5.

1.7 Digressão. Sejam Ω um aberto de Dirichlet e $x \in \Omega$. O funcional

$$T : \mathcal{C}(\partial\Omega) \to \mathbb{R},$$

que associa a cada $u_0 \in \mathcal{C}(\partial\Omega)$ o valor $u(x)$, em que u é a solução do problema de Dirichlet com dado de fronteira u_0, está bem definido, é contínuo, pois $|T(u_0)| \leq \max|u_0|$, e é positivo. Pelo teorema de Riesz, existe uma medida de Borel regular μ_x sobre $\partial\Omega$ tal que

$$u(x) = T(u_0) = \int_{\partial\Omega} u_0(y)\, \mathrm{d}\mu_x(y),$$

e portanto a função u é reconstituída através de integração de seu valor de fronteira com relação a medidas apropriadas.

2 Identidades de Green

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um *aberto com fronteira regular* como definido nas notas de aula da disciplina "Cálculo Integral", página 66, em

www.ime.usp.br/∼cordaro/calculo-integral-2o-semestre-de-2017

Sejam $\vec{\mathrm{n}}$ o campo unitário normal a $\partial\Omega$ e $\mathrm{d}\sigma$ a medida de superfície definida em $\partial\Omega$. Nas notas de aula mencionadas acima encontra-se a demonstração do *teorema da divergência se $\vec{X}$ é um campo vetorial com coeficientes em $C^1(\bar{\Omega})$ vale*

$$\int_\Omega \mathrm{div}\vec{X}\, \mathrm{d}x = \int_{\partial\Omega} \langle \vec{X}(y), \vec{\mathrm{n}}(y) \rangle\, \mathrm{d}\sigma(y). \tag{1}$$

Sejam $u, v \in \mathcal{C}^2(\overline{\Omega})$. Aplicando o teorema da divergência para $\vec{X} = v\nabla u$ obtemos a *primeira identidade de Green*

$$\int_\Omega (v\Delta u + \langle \nabla v, \nabla u\rangle)\,\mathrm{d}x = \int_{\partial\Omega} v\frac{\partial u}{\partial \vec{\mathrm{n}}}\,\mathrm{d}\sigma. \tag{2}$$

Trocando u por v e subtraindo as identidades obtemos a *segunda identidade de Green*

$$\int_\Omega (v\Delta u - u\Delta v)\,\mathrm{d}x = \int_{\partial\Omega} \left(v\frac{\partial u}{\partial \vec{\mathrm{n}}} - u\frac{\partial v}{\partial \vec{\mathrm{n}}}\right)\mathrm{d}\sigma. \tag{3}$$

Como consequência da primeira identidade de Green temos a seguinte proposição

2.1 Proposição. *Seja $u \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega}) \cap \mathcal{C}^2(\Omega)$ uma função harmônica em Ω.*

1. *Se $\partial u/\partial\vec{\mathrm{n}} = 0$ em $\partial\Omega$, então u é localmente constante em Ω;*
2. *Vale a seguinte identidade*

$$\int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \vec{\mathrm{n}}}\,\mathrm{d}\sigma = 0.$$

Demonstração. Ambos os ítens seguem da primeira identidade de Green (2) para (1.) tome $u = v$ e para (2.) tome $v = 1$. □

3 A propriedade da média

Denotaremos a *esfera de raio $R > 0$ e centrada em $x_0 \in \mathbb{R}^N$* por $S_R(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^N\ |x - x_0| = R\}$ e a *bola aberta de raio $R > 0$ e centrada em $x_0 \in \mathbb{R}^N$* por $B_R(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^N\ |x - x_0| < R\}$. Note que $B_R(x_0)$ é uma aberto com fronteira regular. A passagem a *coordenadas polares* em $\mathbb{R}^N \setminus \{0\}$ é feita com as identidades

$$\begin{cases} x = ry,\ r = |x|,\ |y| = 1, \\ \mathrm{d}x = r^{N-1}\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\sigma(y), \end{cases}$$

em que $\mathrm{d}\sigma$ é a medida de superfície em $S_1(0)$. Denotaremos a medida da esfera unitária em $\mathbb{R}^N$ por

$$\omega_N = |S_1(0)| = \int_{S_1(0)} \mathrm{d}\sigma.$$

Nosso objetivo agora é calcular ω_N e para isso introduzimos a *função gama*

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t}t^{x-1}\,\mathrm{d}t, \quad x > 0.$$

Um simples cálculo[1] mostra que $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$. Ademais $\Gamma(1) = 1$, logo temos $\Gamma(n) = (n-1)!$, para $n \in \mathbb{Z}_+ \setminus \{0\}$. Da identidade

$$\int_0^\infty e^{-t}t^{-1/2}\,\mathrm{d}t = 2\int_0^\infty e^{-s^2}\,\mathrm{d}s,$$

[1] use $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}t^x = xt^{x-1}$ e integre por partes.

segue que $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$. Agora

$$\begin{aligned}
\pi^{N/2} &= \int_{\mathbb{R}^N} e^{-|x|^2}\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^\infty \int_{S_1(0)} e^{-r^2} r^{N-1}\,\mathrm{d}\sigma(y)\,\mathrm{d}r \\
&= \omega_N \int_0^\infty e^{-r^2} r^{N-1}\,\mathrm{d}r \\
&= \frac{\omega_N}{2} \int_0^\infty e^{-s} s^{\frac{N-2}{2}}\,\mathrm{d}s \\
&= \frac{\omega_N}{2}\Gamma(N/2),
\end{aligned}$$

logo

$$\omega_N = \frac{2\pi^{N/2}}{\Gamma(N/2)}.$$

Assim, para $N = 2k$ temos $\Gamma(N/2) = (k-1)!$ e portanto

$$\omega_{2k} = \frac{2\pi^k}{(k-1)!}.$$

Por outro lado, para $N = 2k+1$ temos

$$\Gamma(N/2) = \Gamma(k+1/2) = \left(k - \frac{1}{2}\right)\left(k - \frac{3}{2}\right)\cdots\frac{1}{2}\Gamma(1/2) = \Gamma(1/2)\prod_{l=1}^{k}\left(k - \frac{2l-1}{2}\right),$$

portanto

$$\omega_{2k+1} = \frac{2^{k+1}\pi^k}{(2k-1)(2k-3)\cdots 1}.$$

Podemos também calcular o volume da bola

$$\begin{aligned}
|B_R(x_0)| &= |B_R(0)| \\
&= \int_{B_R(0)} \mathrm{d}x \\
&= \int_0^R \int_{S_1(0)} r^{N-1}\,\mathrm{d}\sigma(y)\,\mathrm{d}r \\
&= \frac{R^N \omega_N}{N}.
\end{aligned}$$

Aplicando o teorema da divergência (1), temos a identidade

$$N|B_R(0)| = \int_{S_R(0)} \langle y, y/R\rangle\,\mathrm{d}\sigma(y) = R|S_R(0)|,$$

que implica $|S_R(x_0)| = \omega_N R^{N-1}$. Por fim, faremos uso constante do seguinte fato

$$\int_{S_R(0)} f(y)\,\mathrm{d}\sigma(y) = R^{N-1}\int_{S_1(0)} f(Rz)\,\mathrm{d}\sigma(z), \qquad f \in \mathcal{C}(S_R(0)). \tag{4}$$

Para a demonstração da fórmula acima veja o exercício 8.

3.1 Teorema. (A propriedade da média para funções harmônicas) *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um subconjunto aberto e u uma função harmônica em Ω. Se $B_R(x_0)$ tem fecho contido em Ω então*

$$u(x_0) = \frac{1}{|S_R(x_0)|}\int_{S_R(x_0)} u(y)\,\mathrm{d}\sigma(y).$$

3.2 Observação. Aplicando (4) no Teorema 3.1 obtemos

$$\begin{aligned} u(x_0) &= \frac{1}{\omega_N R^{N-1}}\int_{S_R(x_0)} u(y)\,\mathrm{d}\sigma(y) \\ &= \frac{1}{\omega_N R^{N-1}}\int_{S_R(0)} u(x_0+y)\,\mathrm{d}\sigma(y) \\ &= \frac{1}{\omega_N}\int_{S_1(0)} u(x_0+Rz)\,\mathrm{d}\sigma(z). \end{aligned}$$

Demonstração (do Teorema 3.1). Definimos

$$v(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{|x-x_0|^{N-2}}, & N \geq 3, \\ -\log|x-x_0|, & N = 2. \end{cases}$$

Um cálculo direto mostra que v é harmônica em $\mathbb{R}^N \setminus \{x_0\}$. Faremos a demonstração para o caso $N \geq 3$, o caso $N = 2$ tem demonstração análoga. Para $0 < \varepsilon < R$, seja $U_\varepsilon = B_R(x_0) \setminus \overline{B_\varepsilon(x_0)}$. Aplicando a segunda identidade de Green (3), temos

$$\int_{\partial U_\varepsilon}\left(u(y)\frac{\partial v}{\partial \vec{\mathrm{n}}}(y) - v(y)\frac{\partial u}{\partial \vec{\mathrm{n}}}(y)\right)\mathrm{d}\sigma(y) = 0.$$

Como v é constante em cada componente de $\partial U_\varepsilon = S_R(x_0) \cup S_\varepsilon(x_0)$, podemos aplicar a Proposição 2.1 e concluir

$$\int_{S_R(x_0)} u(y)\frac{\partial v}{\partial \vec{\mathrm{n}}}(y)\,\mathrm{d}\sigma(y) = \int_{S_\varepsilon(x_0)} u(y)\frac{\partial v}{\partial \vec{\mathrm{n}}}(y)\,\mathrm{d}\sigma(y).$$

Para $y \in S_R(x_0)$, temos

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial \vec{\mathrm{n}}}(y) &= \sum_{j=1}^{N}\frac{\partial v}{\partial y_j}(y)\frac{y_j - x_{0j}}{R} \\ &= \sum_{j=1}^{N}(2-N)|y-x_0|^{1-N}\frac{(y_j-x_{0j})^2}{|y-x_0|R} \\ &= (2-N)R^{1-N}, \end{aligned}$$

logo

$$(2-N)R^{1-N}\int_{S_R(x_0)} u(y)\,\mathrm{d}\sigma(y) = (2-N)\varepsilon^{1-N}\int_{S_\varepsilon(x_0)} u(y)\,\mathrm{d}\sigma(y),$$

e portanto

$$\frac{1}{\omega_N R^{N-1}}\int_{S_R(x_0)} u(y)\,\mathrm{d}\sigma(y) = \frac{1}{\omega_N \varepsilon^{N-1}}\int_{S_\varepsilon(x_0)} u(y)\,\mathrm{d}\sigma(y) \;\longrightarrow\; u(x_0),$$

quando $\varepsilon \longrightarrow 0$, pois u é contínua em x_0. De fato, para formalizar esta última afirmação seja $\eta > 0$ arbitrário e tomemos $\delta > 0$ tal que

$$|x - x_0| < \delta \implies |u(x) - u(x_0)| < \eta.$$

Certamente podemos escrever esta propriedade assumindo que a bola de centro x_0 e raio $\delta > 0$ está contida em Ω. Logo, se $0 < \varepsilon < \delta$,

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{\omega_N \varepsilon^{N-1}}\int_{S_\varepsilon(x_0)} u(y)\,\mathrm{d}\sigma(y) - u(x_0)\right| &= \left|\frac{1}{\omega_N \varepsilon^{N-1}}\int_{S_\varepsilon(x_0)} u(y)\,\mathrm{d}\sigma(y) - u(x_0)\frac{1}{\omega_N \varepsilon^{N-1}}\int_{S_\varepsilon(x_0)} \mathrm{d}\sigma(y)\right| \\ &\le \frac{1}{\omega_N \varepsilon^{N-1}}\int_{S_\varepsilon(x_0)} |u(y) - u(x_0)|\,\mathrm{d}\sigma(y) \le \frac{1}{\omega_N \varepsilon^{N-1}}\int_{S_\varepsilon(x_0)} \eta\,\mathrm{d}\sigma(y) = \eta,\end{aligned}$$

o que demonstra nossa afirmação. □

3.3 Corolário. (A propriedade da média volumétrica) *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um subconjunto aberto e u uma função harmônica em Ω. Se $B_R(x_0)$ tem fecho contido em Ω então*

$$u(x_0) = \frac{1}{|B_R(x_0)|}\int_{B_R(x_0)} u(x)\,\mathrm{d}x.$$

Demonstração. Para $0 \le \rho \le R$, temos

$$u(x_0) = \frac{1}{\omega_N}\int_{S_1(0)} u(x_0 + \rho y)\,\mathrm{d}\sigma(y),$$

logo

$$\int_0^R \rho^{N-1} u(x_0)\,\mathrm{d}\rho = \frac{1}{\omega_N}\int_0^R\int_{S_1(0)} u(x_0 + \rho y)\rho^{N-1}\,\mathrm{d}\sigma(y)\,\mathrm{d}\rho,$$

e portanto

$$u(x_0) = \frac{N}{R^N\omega_N}\int_{B_R(x_0)} u(x)\,\mathrm{d}x.$$

□

3.4 Corolário. *(Princípio do máximo, forma forte) Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um subconjunto aberto e conexo. Seja $u \in \mathcal{C}^2(\Omega)$ real e harmônica. Suponha que* $\sup u = a < \infty$. *Se existir $x_0 \in \Omega$ tal que $u(x_0) = a$, então $u = a$ em Ω.*

Demonstração. Por hipótese o conjunto

$$A = \{x \in \Omega : \, u(x) = a\}$$

é não vazio. Como A é claramente fechado em Ω (por que?) e também como Ω é conexo, bastará mostrar que A é aberto em Ω. Seja então $x_* \in A$ e tomemos uma bola $B_r(x_*)$ com fecho contido em Ω. Como $a = \sup u$ temos, pela propriedade da média volumétrica

$$\frac{N}{\omega_N R^N} \int_{B_r(x_*)} \underbrace{\{a - u(x)\}}_{\geq 0} \, \mathrm{d}x = 0,$$

de onde concluímos que $u(x) = a$ para $x \in B_r(x_*)$. A demonstração está completa. $\square$

Nosso objetivo agora é provar a recíproca do Teorema 3.1

3.5 Teorema. *Seja $u \in \mathcal{C}(\Omega)$ e suponha que para cada $x_0 \in \Omega$ temos*

$$u(x_0) = \frac{1}{R^{N-1}\omega_N} \int_{S_R(x_0)} u(y) \, \mathrm{d}\sigma(y),$$

sempre que $0 < R < \mathrm{d}(x_0, \partial\Omega)$ (distância de x_0 a $\partial\Omega$). Então $u \in C^\infty(\Omega)$ e u é uma função harmônica em Ω.

Antes de apresentar a demonstração do Teorema 3.5, precisamos desenvolver algumas ferramentas

3.6 Digressão. (Funções teste) A função

$$h(t) = \begin{cases} e^{-1/t}, & t > 0, \\ 0, & t \leq 0. \end{cases}$$

é de classe C^∞ em $\mathbb{R}$, logo a função $g(t) = h(1-t)h(1+t)$ é de classe C^∞, se anula fora do intervalo $[-1, 1]$ e vale $g(0) > 0$. Para $x \in \mathbb{R}^N$, definimos

$$\varphi(x) = Ag(|x|^2), \quad \text{com } \; A = \left(\int_{\mathbb{R}^N} g(|y|^2) \, \mathrm{d}y \right)^{-1},$$

logo φ é de classe C^∞ em $\mathbb{R}^N$, se anula fora de $B_1(0)$, vale $\int \varphi = 1$ e φ é *radial*, ou seja, o valor $\varphi(x)$ só depende de $|x|$. Para cada $\varepsilon > 0$, definimos

$$\varphi_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^N} \varphi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right), \quad x \in \mathbb{R}^N,$$

de modo que φ_ε é de classe C^∞ em $\mathbb{R}^N$, se anula fora de $B_\varepsilon(0)$, vale $\int \varphi_\varepsilon = 1$ e φ_ε é radial.

Demonstração (do Teorema 3.5) Para cada $\varepsilon > 0$, considere o conjunto

$$\Omega_\varepsilon = \{x \in \Omega : \, \mathrm{d}(x, \partial\Omega) > \varepsilon\}$$

e a função

$$U_\varepsilon(x) = \int_{\mathbb{R}^N} \varphi_\varepsilon(x-y) u(y) \, \mathrm{d}y,$$

definida para $x \in \Omega_\varepsilon$. Note que, na integral, a variável y é restrita à $B_\varepsilon(x)$, cujo fecho está contido em Ω. Isto torna U_ε bem definida e, de fato, de classe C^∞ em Ω_ε (derivação sob o sinal de integração). Mostraremos abaixo que para $x \in \Omega_\varepsilon$, tem-se $U_\varepsilon(x) = u(x)$, o que pela arbitrariedade de $\varepsilon > 0$ permite concluir que u é de classe C^∞. De fato

$$
\begin{aligned}
U_\varepsilon(x) &= \frac{1}{\varepsilon^N} \int_{\mathbb{R}^N} \varphi\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right) u(y)\,\mathrm{d}y \\
&= \int_{B_1(0)} u(x-\varepsilon y)\varphi(y)\,\mathrm{d}y \\
&= \int_{S_1(0)} \int_0^1 u(x-\varepsilon r\dot{y})\varphi(r\dot{y}) r^{N-1}\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\sigma(\dot{y}) \\
&= A\int_0^1 r^{N-1} g(r^2) \underbrace{\left(\int_{S_1(0)} u(x-\varepsilon r\dot{y})\,\mathrm{d}\sigma(\dot{y})\right)}_{=\omega_N u(x)} \mathrm{d}r \\
&= Au(x)\int_{B_1(0)} g(|x|^2)\,\mathrm{d}x \\
&= u(x), \qquad x \in \Omega_\varepsilon.
\end{aligned}
$$

Resta mostrar que a função u é harmônica e para isto faremos uso do seguinte lema:

3.7 Lema. *Sejam $v \in \mathcal{C}^2(\Omega)$, $x_0 \in \Omega$ e para $0 < r < \mathrm{d}(x_0, \partial\Omega)$ defina a função*

$$
\lambda(r) = \int_{S_1(0)} v(x_0 + ry)\,\mathrm{d}\sigma(y).
$$

Então

$$
\lambda'(r) = r^{1-N}\int_{S_r(x_0)} \frac{\partial v}{\partial \vec{\mathrm{n}}}(z)\,\mathrm{d}\sigma(z).
$$

Assumindo a validade do lema por um momento vamos concluir a demonstração do teorema. Aplicando o Lema 3.7 com u substituindo v e observando que então λ é constante seguirá que

$$
\int_{S_r(x_0)} \frac{\partial u}{\partial \vec{\mathrm{n}}}\,\mathrm{d}\sigma(y) = \int_{B_r(x_0)} \Delta u\,\mathrm{d}x,
$$

quaisquer que sejam $x_0 \in \Omega$ e $0 < r < \mathrm{d}(x_0, \partial\Omega)$. Assim $\Delta u = 0$ em Ω e portanto resta agora demonstrar o Lema 3.7.

Demonstração. (do Lema 3.7) Um cáculo direto fornece

$$
\begin{aligned}
\lambda'(r) &= \int_{S_1(0)} \langle \nabla v(x_0 + ry), y\rangle\,\mathrm{d}\sigma(y) \\
&= r^{1-N}\int_{S_r(0)} \langle \nabla v(x_0+z), z/r\rangle\,\mathrm{d}\sigma(z) \\
&= r^{1-N}\int_{S_r(x_0)} \langle \nabla v(y), (y-x_0)/r\rangle\,\mathrm{d}\sigma(y),
\end{aligned}
$$

de onde segue a conclusão. □

3.8 Corolário. *Toda função harmônica é de classe C^∞.*

3.9 Corolário. *Seja $\{u_n\}$ uma sequência de funções harmônicas em Ω. Se $u_n \longrightarrow u$ uniformemente sobre os compactos de Ω, então u é uma função harmônica.*

Demonstração. A função u é contínua pois é limite uniforme sobre os compactos de Ω de uma sequência de funções contínuas. Para provar que u é harmônica basta então mostrar que u satisfaz a propriedade da média. Seja então $B_R(x_0)$ uma bola com fecho contido em Ω. Como cada u_n é harmônica temos

$$u_n(x_0) = \frac{1}{\omega_N R^{N-1}} \int_{S_R(x_0)} u_n(y)\,\mathrm{d}\sigma(y).$$

Passando ao limite estas igualdades quando $n \to \infty$ segue a propriedade desejada, uma vez que a convergência uniforme sobre os compactos de Ω da sequência $\{u_n\}$ implica

$$\frac{1}{\omega_N R^{N-1}} \int_{S_R(x_0)} u_n(y)\,\mathrm{d}\sigma(y) \longrightarrow \frac{1}{\omega_N R^{N-1}} \int_{S_R6(x_0)} u(y)\,\mathrm{d}\sigma(y).$$

□

3.10 Corolário. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um subconjunto aberto e limitado. Suponha que o problema de Dirichlet para Ω possui solução sempre que o valor na fronteira for a restrição de um polinômio em $\mathbb{R}^N$. Então Ω é um aberto de Dirichlet.*

Demonstração. Seja $u_0 \in C(\partial\Omega)$. Pelo teorema de Weierstrass existe uma sequência $\{p_n\}$ de polinômios em $\mathbb{R}^N$ tal que $p_n \to u_0$ uniformemente em $\partial\Omega$. Para cada n existe $u_n \in C^\infty(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ harmônica em Ω satisfazendo $u_n = p_n$ em $\partial\Omega$. Pelo Corolário 1.4

$$\max_{\bar{\Omega}} |u_m - u_n| = \max_{\partial\Omega} |u_m - u_n| = \max_{\partial\Omega} |p_m - p_n| \longrightarrow 0 \text{ quando } m, n \to \infty.$$

Pelo critério de Cauchy para convergência uniforme, existe $u \in C(\bar{\Omega})$ tal que $u_n \to u$ uniformente em Ω. Em particular $u = u_0$ em $\partial\Omega$. Finalmente, pelo corolário anterior u é harmônica, e portanto de classe C^∞ em Ω. □

Vimos que toda solução de classe C^2 da equação $\Delta u = 0$ é automaticamente de classe $\mathbb{C}^\infty$. Na realidade podemos dizer mais toda função harmônica é de fato real-analítica. Lembremos que se $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é aberto e se $f \in C^\infty(\Omega)$ então f é *real-analítica* se para cada ponto $x_0 \in \Omega$ a série de Taylor de f centrada em x_0 converge para f, uniforme e absolutamente, em uma vizinhança de x_0. Uma propriedade equivalente é a seguinte $f \in C^\infty(\Omega)$ é real-analítica se, e somente se, para toda bola fechada B contida em Ω existem constantes $C > 0$ e $h > 0$ tais que

$$\sup_B |\partial^\alpha u| \leq C h^{|\alpha|} |\alpha|!, \quad \alpha \in \mathbb{Z}_+^N. \tag{5}$$

Para uma demonstração consultar o texto ”analíticas” em

www.ime.usp.br/∼cordaro/analise-real-1o-semestre-de-2017.

3.11 Teorema. *Toda função harmônica u em um aberto Ω de $\mathbb{R}^N$ é real-analítica em Ω.*

Demonstração. Como u é de classe C^∞ é fácil então ver que $\partial^\alpha u$ também é harmônica, qualquer que seja $\alpha \in \mathbb{Z}_+^N$. Sejam $x_0 \in \Omega$ e $R > 0$ tal que $B_R(x_0)$ tem fecho contido em Ω. Se $j \in \{1, \ldots, N\}$ aplicando a propriedade da média volumétrica para $\partial u/\partial x_j$ obtemos

$$\frac{\partial u}{\partial x_j}(x_0) = \frac{N}{\omega_N R^N} \int_{B_R(x_0)} \frac{\partial u}{\partial x_j}(x) \mathrm{d}x.$$

Seja $\vec{X}(x) = (0, \ldots, 0, u(x), 0, \ldots, 0)$, onde $u(x)$ aparece na j-ésima posição. Então $\operatorname{div} \vec{X}(x) = (\partial u/\partial x_j)(x)$ e portanto, pelo teorema da divergência,

$$\frac{\partial u}{\partial x_j}(x_0) = \frac{N}{\omega_N R^N} \int_{S_r(x_0)} \langle \vec{X}(y), (y - x_0)/R \rangle \, \mathrm{d}\sigma(y).$$

Pela desigualdade de Cauchy-Schwarz,

$$\left| \frac{\partial u}{\partial x_j}(x_0) \right| \leq \frac{N}{R} \sup_{S_R(x_0)} |u| \, .$$

Sejam $B \subset B' \subset \Omega$ bolas fechadas com raios r e r' respectivamente, $r < r'$. Aplicando a desigualdade precedente para um ponto arbitrário $x_0 \in B$ e $R = r' - r$ obtemos

$$\sup_B \left| \frac{\partial u}{\partial x_j} \right| \leq \frac{N}{r' - r} \sup_{B'} |u|, \quad j = 1, \ldots, N. \tag{6}$$

Estamos agora em posição para concluir a demonstração do teorema. Fixemos $B_r(x_*)$ uma bola com fecho contido em Ω e seja $d > 0$ tal que a bola $B_{r+d}(x_*)$ também tenha fecho contido em Ω. Seja α um multi-índice e aplique (6) iteradamente, para as bolas $B \doteq B_{r+(i-1)d/|\alpha|}(x_*) \subset B' \doteq B_{r+id/|\alpha|}(x_*)$, $i = 1, \ldots, |\alpha|$. Obtemos

$$\sup_{B_r(x_*)} |D^\alpha u| \leq \frac{N^{|\alpha|} |\alpha|^{|\alpha|}}{d^{|\alpha|}} \sup_{B_{r+d}(x_*)} |u| \, .$$

Uma vez que $n^n < e^n n!$ para todo $n \in \mathbb{N}$ provamos que u satisfaz (5) e portanto u é real-analítica em Ω. A demonstração está completa. $\square$

3.12 Corolário. (Princípio da continuação única para funções harmônicas) *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ aberto e conexo e u harmônica em Ω. Se u se anula de ordem infinito em um ponto de Ω então u se anula identicamente. Em particular, se u se anula em um aberto não vazio de Ω então u se anula identicamente.*

4 Potencial newtoniano

O *potencial newtoniano* é dado pela expressão

$$\mathrm{E}(x) = \begin{cases} -\dfrac{1}{(N-2)\omega_N |x|^{N-2}}, & N \geq 3, \\ \dfrac{1}{2\pi} \log |x|, & N = 2. \end{cases}$$

Demonstra-se que E é uma função harmônica em $\mathbb{R}^N \setminus \{0\}$ e pertence a $\mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^N)$. Para esta última informação basta mostrar que E é integrável em $B_1(0)$ e isto segue facilmente se escrevermos a integral de $-E(x)$ sobre $B_1(0)$ em coordenadas polares.

4.1 Teorema. (Terceira identidade de Green) *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um aberto com fronteira regular. Seja $u \in \mathcal{C}^2(\overline{\Omega})$. Para todo $x \in \Omega$ vale*

$$u(x) = \int_\Omega \mathrm{E}(x-y)\Delta u(y)\,\mathrm{d}y + \int_{\partial\Omega} \left(u(y)\frac{\partial \mathrm{E}}{\partial \vec{\mathrm{n}}_y}(x-y) - \mathrm{E}(x-y)\frac{\partial u}{\partial \vec{\mathrm{n}}}(y) \right) \mathrm{d}\sigma(y).$$

Demonstração. Fixe $x \in \Omega$. Para $0 < \varepsilon < \mathrm{d}(x, \partial\Omega)$, seja $U_\varepsilon = \Omega \setminus B_\varepsilon(x)$. Temos

$$\begin{aligned}\int_{U_\varepsilon} \mathrm{E}(x-y)\Delta u(y)\,\mathrm{d}y = &\\ &\int_{\partial\Omega} \left(\mathrm{E}(x-y)\frac{\partial u}{\partial \vec{\mathrm{n}}}(y) - u(y)\frac{\partial \mathrm{E}}{\partial \vec{\mathrm{n}}_y}(x-y) \right) \mathrm{d}\sigma(y) \\ &\qquad - \int_{S_\varepsilon(x)} \left(\mathrm{E}(x-y)\frac{\partial u}{\partial \vec{\mathrm{n}}_\varepsilon}(y) - u(y)\frac{\partial \mathrm{E}}{\partial \vec{\mathrm{n}}_\varepsilon}(x-y) \right) \mathrm{d}\sigma(y).\end{aligned}$$

Usando $\nabla \mathrm{E}(x) = x/\big(\omega_N |x|^N\big)$ qualquer que seja $N \geq 2$, podemos passar ao limite

$$\begin{aligned}&\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{U_\varepsilon} \mathrm{E}(x-y)\Delta u(y)\,\mathrm{d}y = \int_\Omega \mathrm{E}(x-y)\Delta u(y)\,\mathrm{d}y, \\ &\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{S_\varepsilon(x)} \mathrm{E}(x-y)\frac{\partial u}{\partial \vec{\mathrm{n}}_\varepsilon}(y)\,\mathrm{d}\sigma(y) = 0, \\ &\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{S_\varepsilon(x)} u(y)\frac{\partial \mathrm{E}}{\partial \vec{\mathrm{n}}_\varepsilon}(x-y)\,\mathrm{d}\sigma(y) = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{\omega_N \varepsilon^{N-1}} \int_{S_\varepsilon(x)} u(y)\,\mathrm{d}\sigma(y) = u(x),\end{aligned}$$

e segue a tese. □

4.2 Corolário. *Seja $u \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^N)$ uma função com suporte compacto, ou seja, que se anule no complementar de um subconjunto compacto de $\mathbb{R}^N$. Então*

$$u(x) = \int_{\mathbb{R}^N} \mathrm{E}(x-y)\Delta u(y)\,\mathrm{d}y, \quad x \in \mathbb{R}^N.$$

5 Função de Green

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um subconjunto aberto e suponha que para cada $x \in \Omega$ o seguinte problema de Dirichlet tenha solução

$$\begin{cases} \Delta v_x = 0, & \text{em } \Omega, \\ v_x = \mathrm{E}(x - \,\cdot\,), & \text{em } \partial\Omega, \end{cases} \tag{7}$$

com $v_x \in \mathcal{C}^2(\overline{\Omega})$. A *função de Green para* Ω é dada por

$$\mathrm{G}(x,y) = \mathrm{E}(x-y) - v_x(y), \quad (x,y) \in (\Omega \times \overline{\Omega}) \setminus \{(z,z) : z \in \Omega\}.$$

Como função de y, a função $\mathrm{G}(x,\,\cdot\,)$ é harmônica para $y \neq x$ e $\mathrm{G}(x,\,\cdot\,) = 0$ em $\partial\Omega$.

Suponha agora que Ω seja um aberto com fronteira regular e seja $u \in \mathcal{C}^2(\overline{\Omega})$. Aplicando o Teorema 4.1 (terceira identidade de Green), temos

$$\begin{aligned} u(x) = &\int_\Omega \mathrm{G}(x,y)\Delta u(y)\,\mathrm{d}y + \int_\Omega v_x(y)\Delta u(y)\,\mathrm{d}y \\ &+ \int_{\partial\Omega} \left(u(y)\frac{\partial \mathrm{G}}{\partial \vec{\mathrm{n}}_y}(x,y) + u(y)\frac{\partial v_x}{\partial \vec{\mathrm{n}}_y}(y) - v_x(y)\frac{\partial u}{\partial \vec{\mathrm{n}}_y}(y)\right)\mathrm{d}\sigma(y). \end{aligned}$$

Por outro lado, a segunda identidade de Green (3) nos dá

$$\int_{\partial\Omega} \left(u(y)\frac{\partial v_x}{\partial \vec{\mathrm{n}}_y}(y) - v_x(y)\frac{\partial u}{\partial \vec{\mathrm{n}}_y}(y)\right)\mathrm{d}\sigma(y) = -\int_\Omega v_x(y)\Delta u(y)\,\mathrm{d}y.$$

Portanto, temos a seguinte identidade (denominada *fórmula de Poisson*)

$$u(x) = \int_\Omega \mathrm{G}(x,y)\Delta u(y)\,\mathrm{d}y + \int_{\partial\Omega} u(y)\frac{\partial \mathrm{G}}{\partial \vec{\mathrm{n}}_y}(x,y)\,\mathrm{d}\sigma(y).$$

Em suma, temos o seguinte teorema

5.1 Teorema. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um aberto um aberto com fronteira regular. Se $u \in \mathcal{C}^2(\overline{\Omega})$ é solução do problema*

$$\begin{cases} \Delta u = f, & \text{em } \Omega, \\ u = u_0, & \text{em } \partial\Omega, \end{cases}$$

em que $f \in \mathcal{C}(\overline{\Omega})$ e $u_0 \in \mathcal{C}(\partial\Omega)$, então

$$u(x) = \int_\Omega \mathrm{G}(x,y)f(y)\,\mathrm{d}y + \int_{\partial\Omega} u_0(y)\frac{\partial \mathrm{G}}{\partial \vec{\mathrm{n}}_y}(x,y)\,\mathrm{d}\sigma(y).$$

5.2 Exemplo. (Função de Green para a bola unitária) Consideremos $\Omega = B_1(0)$, com $N \geq 3$. Ou seja, temos

$$\mathrm{E}(x-y) = \frac{1}{\omega_N(2-N)}|x-y|^{2-N}, \quad x \neq y.$$

Seja $x \in B_1(0) \setminus \{0\}$. A função dada por $v_x(y) = |x|^{2-N}\mathrm{E}(x^*-y)$ é harmônica em $B_1(0)$ quando $x^* \notin \overline{B_1(0)}$. Tomemos x^* o simétrico de x com relação a $S_1(0)$, ou seja, temos $x^* = x/|x|^2$. A propriedade fundamental de x^* é

$$|x-y| = |x||x^*-y|, \quad \text{para } |y| = 1.$$

De fato

$$\langle x^*-y, x^*-y\rangle = \frac{1}{|x|^2} - \frac{2}{|x|^2}\langle x,y\rangle + |y|^2,$$

logo

$$|x|^2|x^*-y|^2 = 1 - 2\langle x,y\rangle + |x|^2 = |x-y|^2.$$

Portanto temos $v_x(y) = \mathrm{E}(x-y)$ se $|y| = 1$ para $x \neq 0$. Quando $x = 0$, temos $\mathrm{E}(0-y) = 1/(\omega_N(2-N))$ para $|y| = 1$, logo podemos tomar $v_0(y) = 1/(\omega_N(2-N))$, $\forall y \in \overline{B_1(0)}$.
<u>Conclusão</u> Para cada $x \in \Omega = B_1(0)$, resolvemos o problema de Dirichlet (7), portanto a função de Green para $B_1(0)$ é dada por

$$\mathrm{G}(x,y) = \begin{cases} \mathrm{E}(x-y) - |x|^{2-N}\mathrm{E}(x^*-y), & x \neq 0, \\ \mathrm{E}(y) - \dfrac{1}{\omega_N(2-N)}, & x = 0, \end{cases} \tag{8}$$

em que $x^* = x/|x|^2$.

5.3 Observação. Um raciocínio análogo ao do Exemplo 5.2 permite concluir que a função de Green para $B_1(0)$ quando $N = 2$ é

$$\mathrm{G}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi}\log|x-y| - \dfrac{1}{2\pi}\log|x||x^*-y|, & x \neq 0, \\ \dfrac{1}{2\pi}\log|y|, & x = 0, \end{cases} \tag{9}$$

em que $x^* = x/|x|^2$.

5.4 Exemplo. (Núcleo de Poisson para a bola unitária) Dando continuidade ao estudado no Exemplo 5.2, temos para $x \neq 0$

$$\frac{\partial \mathrm{G}}{\partial \vec{\mathrm{n}}_y}(x,y) = \frac{1}{\omega_N}\left\langle -\frac{x-y}{|x-y|^N} + \frac{|x|^{2-N}(x^*-y)}{|x^*-y|^N}, y \right\rangle,$$

e usando o fato

$$\frac{|x|^{-N}}{|x^*-y|^N} = \frac{1}{|x-y|^N},$$

segue

$$\mathrm{K}(x,y) = \frac{\partial \mathrm{G}}{\partial \vec{\mathrm{n}}_y}(x,y) = \frac{1}{\omega_N|x-y|^N}\langle y - x + x - |x|^2 y, y\rangle = \frac{1-|x|^2}{\omega_N|x-y|^N} \tag{10}$$

É um exercício verificar que a fórmula (10) também vale quando $N = 2$. A função K definida pela fórmula (10) é denominada *núcleo de Poisson para* $B_1(0)$. O núcleo de Poisson possui as seguintes propriedades (exercício)

1. Quaisquer que sejam $x \in B_1(0)$ e $y \in S_1(0)$, temos $\mathrm{K}(x,y) > 0$;
2. Para todo $x \in B_1(0)$, vale
$$\int_{S_1(0)} \mathrm{K}(x,y)\,\mathrm{d}\sigma(y) = 1;$$
3. Quaisquer que sejam $x \in B_1(0)$ e $y \in S_1(0)$, temos $\Delta_x \mathrm{K}(x,y) = 0$ (exercício 5);
4. Se $u \in \mathcal{C}^2(\overline{B_1(0)})$ e $\Delta u = 0$ em $B_1(0)$, então
$$u(x) = \int_{S_1(0)} \mathrm{K}(x,y)u(y)\,\mathrm{d}\sigma(y), \quad x \in B_1(0).$$

5.5 Teorema. (Solução do problema de Dirichlet para a bola unitária) *Seja $u_0 \in \mathcal{C}(S_1(0))$. A função dada por*

$$u(x) = \begin{cases} \displaystyle\int_{S_1(0)} \mathrm{K}(x,y) u_0(y)\, \mathrm{d}\sigma(y), & x \in B_1(0), \\ u_0(x), & x \in S_1(0), \end{cases}$$

é harmônica em $B_1(0)$ e contínua em $\overline{B_1(0)}$.

Demonstração. Derivando sob o sinal de integração, a propriedade (3.) do núcleo de Poisson implica que u é harmônica em $B_1(0)$. Só precisamos então mostrar que u é contínua em $y_0 \in S_1(0)$, arbitrário. Ou seja, temos que mostrar

$$\lim_{B_1(0) \ni x \to y_0} \int_{S_1(0)} \mathrm{K}(x,y) u_0(y)\, \mathrm{d}\sigma(y) = u_0(y_0). \tag{11}$$

Aplicando a propriedade (2.) do núcleo de Poisson, temos

$$\int_{S_1(0)} \mathrm{K}(x,y) u_0(y)\, \mathrm{d}\sigma(y) - u_0(y_0) = \int_{S_1(0)} \mathrm{K}(x,y)(u_0(y) - u_0(y_0))\, \mathrm{d}\sigma(y).$$

Escrevamos esta última integral como $I_1 + I_2$ em que

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{V_0} \mathrm{K}(x,y)(u_0(y) - u_0(y_0))\, \mathrm{d}\sigma(y), \\ I_2 &= \int_{S_1(0) \setminus V_0} \mathrm{K}(x,y)(u_0(y) - u_0(y_0))\, \mathrm{d}\sigma(y), \end{aligned}$$

e V_0 é uma vizinhança de y_0 em $S_1(0)$ que escolheremos a seguir. Seja $\varepsilon > 0$. Tomemos V_0 tal que se $y \in V_0$, então $|u_0(y) - u_0(y_0)| < \varepsilon/2$. Aplicando as propriedades (1.) e (2.) do núcleo de Poisson, temos

$$|I_1| \leq \frac{\varepsilon}{2} \int_{S_1(0)} \mathrm{K}(x,y)\, \mathrm{d}\sigma(y) = \frac{\varepsilon}{2}.$$

Para a outra parcela, temos

$$|I_2| \leq 2 \sup |u_0| \int_{S_1(0) \setminus V_0} \mathrm{K}(x,y)\, \mathrm{d}\sigma(y),$$

mas

$$\lim_{B_1(0) \ni x \to y_0} \int_{S_1(0) \setminus V_0} \mathrm{K}(x,y)\, \mathrm{d}\sigma(y) = 0,$$

uma vez que para x próximo de y_0 o denominador em (10) será limitado inferiormente e o numerador em (10) tenderá a zero. Portanto, existe $\delta > 0$ tal que $|I_2| \leq \varepsilon/2$ se $x \in B_1(0) \cap B_\delta(y_0)$. $\square$

5.6 OBSERVAÇÃO. Seja $u_0 \in \mathcal{C}(S_R(x_0))$. Então a função

$$S_1(0) \ni y \mapsto u_0(x_0 + Ry) \in \mathbb{C},$$

é contínua em $S_1(0)$. Seja $U \in \mathcal{C}(\overline{B_1(0)})$ harmônica em $B_1(0)$ tal que $U(y) = u_0(x_0 + Ry)$ para $y \in S_1(0)$. Defina $u(x) = U((x - x_0)/R)$, $x \in \overline{B_R(x_0)}$. Então u é harmônica em $B_R(x_0)$, contínua em $\overline{B_R(x_0)}$ e coincide com u_0 em $S_R(x_0)$. Se $x \in B_R(x_0)$, temos

$$\begin{aligned}
u(x) &= \int_{S_1(0)} \mathrm{K}\left(\frac{x - x_0}{R}, y\right) u_0(x_0 + Ry)\,\mathrm{d}\sigma(y) \\
&= \frac{1}{R^{N-1}} \int_{S_R(0)} \mathrm{K}\left(\frac{x - x_0}{R}, \frac{z}{R}\right) u_0(x_0 + z)\,\mathrm{d}\sigma(z) \\
&= \frac{1}{R^{N-1}} \int_{S_R(x_0)} \mathrm{K}\left(\frac{x - x_0}{R}, \frac{y - x_0}{R}\right) u_0(y)\,\mathrm{d}\sigma(y) \\
&= \int_{S_R(x_0)} \mathrm{K}_{R,x_0}(x, y) u_0(y)\,\mathrm{d}\sigma(y),
\end{aligned}$$

em que

$$\mathrm{K}_{R,x_0}(x, y) = \frac{1}{\omega_N R} \frac{R^2 - |x - x_0|^2}{|x - y|^N}.$$

A função K_{R,x_0} é denominada *núcleo de Poisson para* $B_R(x_0)$.

A seguir, apresentaremos algumas consequências do Teorema 5.5.

5.7 TEOREMA. (SINGULARIDADES REMOVÍVEIS) *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um subconjunto aberto e seja $x_0 \in \Omega$. Se u é uma função harmônica em $\Omega \setminus \{x_0\}$ tal que*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{u(x)}{\mathrm{E}(x - x_0)} = 0,$$

então existe $\tilde{u}$ harmônica em Ω tal que $\tilde{u} = u$ em $\Omega \setminus \{x_0\}$.

Demonstração. Suponha que $N \geq 3$ (a demonstração para $N = 2$ é análoga). Podemos supor que u é uma função real. Seja $\delta > 0$ tal que $\overline{B_\delta(x_0)} \Subset \Omega$. Seja v a função harmônica em $B_\delta(x_0)$ tal que $v = u$ em $S_\delta(x_0)$. Seja $w = u - v$ em $\overline{B_\delta(x_0)} \setminus \{x_0\}$ (note que w é real e é harmônica em $B_\delta(x_0) \setminus \{x_0\}$). É suficiente mostrar $w = 0$. A hipótese sobre u garante a validade do seguinte limite

$$\lim_{x \to x_0} \frac{w(x)}{|x - x_0|^{2-N} - \delta^{2-N}} = 0.$$

Logo, dado $\varepsilon > 0$, tome $0 < r < \delta$ tal que

$$|w(x)| \leq \varepsilon(|x - x_0|^{2-N} - \delta^{2-N}), \qquad \forall x \in \overline{B_r(x_0)} \setminus \{x_0\}.$$

Observe que a função $x \mapsto \varepsilon(|x - x_0|^{2-N} - \delta^{2-N})$ é positiva e harmônica em $B_\delta(x_0) \setminus \overline{B_r(x_0)}$, vale zero em $S_\delta(x_0)$ e é limitante superior de $|w(x)|$ em $S_r(x_0)$. Aplicando o Corolário 1.4

(princípio do máximo) para $\pm w(x) - \varepsilon(|x-x_0|^{2-N} - \delta^{2-N})$ em $B_\delta(x_0) \setminus \overline{B_r(x_0)}$, podemos concluir

$$|w(x)| \leq \varepsilon(|x-x_0|^{2-N} - \delta^{2-N}), \qquad \forall x \in \overline{B_\delta(x_0)} \setminus \{x_0\}.$$

Como ε é arbitrário, segue que $w = 0$. $\square$

5.8 Exemplo. (Zaremba) Seja $\Omega = B_1(0) \setminus \{0\}$. E considere o seguinte problema de Dirichlet

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{em } \Omega, \\ u(x) = 0 & \text{em } S_1(0), \\ u(0) = 1. \end{cases}$$

Suponha que o problema acima admita uma solucão $u \in \mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}(\overline{\Omega})$. Como u é limitada em Ω, podemos aplicar o Teorema 5.7 (singularidades removíveis) e concluir que u é harmônica em $B_1(0)$. Logo, pelo Corolário 1.4 (princípio do máximo), temos $u = 0$ em $\overline{B_1(0)}$, uma contradição. Portanto, o problema de Dirichlet acima não admite solução em $\mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}(\overline{\Omega})$.

Para o que segue, denotaremos

$$\mathrm{H} = \{x \in \mathbb{R}^N : x = (x_1, \ldots, x_N),\ x_N > 0\}.$$

5.9 Teorema. (Princípio da reflexão de Schwarz) *Seja* $u \in \mathcal{C}(\overline{\mathrm{H}})$ *uma função harmônica em* H. *Suponha que* $u = 0$ *em* $\partial\mathrm{H}$ *e defina*

$$\tilde{u}(x) = \begin{cases} u(x), & x \in \overline{\mathrm{H}}, \\ -u(x_1, \ldots, x_{N-1}, -x_N), & x \notin \overline{\mathrm{H}}. \end{cases}$$

Então $\tilde{u}$ *é harmônica em* $\mathbb{R}^N$.

Demonstração. A função $\tilde{u}$ é contínua e harmônica em $\mathbb{R}^N \setminus \partial\mathrm{H}$. Temos que mostrar que $\tilde{u}$ é harmônica em uma vizinhança de um ponto arbitrário de $\partial\mathrm{H}$. Sejam $x_0 \in \partial\mathrm{H}$ e $\delta > 0$ arbitrários. Seja $v \in \mathcal{C}(\overline{B_\delta(x_0)})$ a função harmônica em $B_\delta(x_0)$ tal que $v = \tilde{u}$ em $S_\delta(x_0)$. Mostremos que $v = 0$ em $B_\delta(x_0) \cap \partial\mathrm{H}$. De fato, pondo $v^\sharp(x) = -v(x_1, \ldots, x_{N-1}, -x_N)$, $x \in \overline{B_\delta(x_0)}$, temos que $v^\sharp$ é harmônica em $B_\delta(x_0)$ e para $x \in S_\delta(x_0)$ temos

$$v^\sharp(x) = -v(x_1, \ldots, x_{N-1}, -x_N) = -\tilde{u}(x_1, \ldots, x_{N-1}, -x_N) = \tilde{u}(x) = v(x),$$

logo $v^\sharp = v$ em $\overline{B_\delta(x_0)}$, *i.e.*, a função v é ímpar em x_N, e portanto $v = 0$ quando $x_N = 0$. Considere $w = \tilde{u} - v$. A função w é harmônica em $B_\delta(x_0) \cap \mathrm{H}$, contínua em $\overline{B_\delta(x_0) \cap \mathrm{H}}$ e vale zero na fronteira deste conjunto, portanto $\tilde{u} = v$ em $\overline{B_\delta(x_0) \cap \mathrm{H}}$. Analogamente, temos $\tilde{u} = v$ em $\overline{B_\delta(x_0)} \cap \{x \in \mathbb{R}^N\ x_N \leq 0\}$. $\square$

6 A desigualdade de Harnack

6.1 TEOREMA. *Seja u uma função harmônica em $B_R(x_0)$ tal que $u \geq 0$ e seja $x \in B_R(x_0)$. Então*

$$\left(\frac{R}{R+|x-x_0|}\right)^{N-2}\frac{R-|x-x_0|}{R+|x-x_0|}\,u(x_0) \leq u(x) \leq \left(\frac{R}{R-|x-x_0|}\right)^{N-2}\frac{R+|x-x_0|}{R-|x-x_0|}\,u(x_0). \tag{12}$$

Demonstração. Tome $|x-x_0| < \rho < R$. Temos

$$u(x) = \frac{\rho^2 - |x-x_0|^2}{\rho\omega_N}\int_{S_\rho(x_0)} \frac{u(y)}{|y-x|^N}\,\mathrm{d}\sigma(y),$$

e $\rho - |x-x_0| \leq |y-x| \leq \rho + |x-x_0|$, para $y \in S_\rho(x_0)$. Como $u \geq 0$, temos

$$\frac{\rho^2-|x-x_0|^2}{\rho\omega_N}\frac{1}{(\rho+|x-x_0|)^N}\int_{S_\rho(x_0)} u(y)\,\mathrm{d}\sigma(y) \leq u(x) \leq \\ \frac{\rho^2-|x-x_0|^2}{\rho\omega_N}\frac{1}{(\rho-|x-x_0|)^N}\int_{S_\rho(x_0)} u(y)\,\mathrm{d}\sigma(y),$$

então basta usar

$$\int_{S_\rho(x_0)} u(y)\,\mathrm{d}\sigma(y) = \omega_N\rho^{N-1}u(x_0),$$

simplificar e fazer $\rho \longrightarrow R$. $\square$

Um maneira mais simples de se enunciar o resultado precedente é a seguinte:

6.2 COROLÁRIO. *Seja u uma função harmônica em $B_R(x_0)$ tal que $u \geq 0$ e seja $0 < r < R$. Então*

$$\left(\frac{R-r}{R+r}\right)^N u(x') \leq u(x) \leq \left(\frac{R+r}{R-r}\right)^N u(x'), \qquad \forall x, x' \in \overline{B_r(x_0)}.$$

Demonstração. Aplicando o Teorema 6.1, temos

$$\left(\frac{R}{R+r}\right)^{N-2}\frac{R-r}{R+r}u(x_0) \leq u(x) \leq \left(\frac{R}{R-r}\right)^{N-2}\frac{R+r}{R-r}u(x_0),$$

para $x \in \overline{B_r(x_0)}$ já que neste caso $|x-x_0| \leq r$. Agora, se $u = 0$ em $B_R(x_0)$, então a desigualdade é óbvia. Caso contrário, temos $u > 0$ (Corolário 3.4) e basta escrever a desigualdade acima para $u(x')$ e fazer uma divisão. $\square$

6.3 TEOREMA. (DESIGUALDADE DE HARNACK) *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ aberto conexo e $K \subset \mathbb{R}^N$ compacto. Existe uma constante $C > 0$, tal que*

$$\max_K u \leq C \min_K u, \tag{13}$$

qualquer que seja u harmônica em Ω, $u \geq 0$.

Demonstração. Antes de embarcar na demonstração propriamente dita, vamos mostrar a existência de $K' \subset \Omega$ compacto e conexo, $K \subset K'$. De fato, sejam $B_1, \ldots, B_n \subset \Omega$ bolas fechadas tais que $K \subset \bigcup_{j=1}^n B_j$. Como Ω é conexo por caminhos, dados $i < j$ em $\{1, \ldots, n\}$ podemos determinar $\gamma_{ij} : [0,1] \to \Omega$ continua com $\gamma_{ij}(0) \in B_i$, $\gamma_{ij}(1) \in B_j$. Logo

$$K' \doteq \bigcup_{j=1}^{n} B_j \cup \bigcup_{i<j} \gamma_{ij}([0,1])$$

é conexo por caminhos, compacto, está contido em Ω e contém K.

Retornemos agora à demonstração do teorema. Fixemos u harmônica em Ω, $u \geq 0$. Em virtude da forma forte do princípio do máximo aplicado a $-u$ podemos assumir $u > 0$. Também, em virtude da observação precedente, podemos assumir K conexo. Tomemos, então, uma cobertura finita $\{B_1, \ldots, B_n\}$ de K formada por bolas fechadas contidas em Ω. Pelo Corolário 6.2 existe $D > 0$ tal que $u(x)/u(y) \leq D$, para quaiquer $x, y \in B_j$ e qualquer $j = 1, \ldots, n$.

Fixemos $x \in K$ e consideremos o conjunto $S_x \subset K$ formado pelos pontos $y \in K$ satisfazendo:

- Existe uma sequência $(i_1, \ldots, i_m)$ de elementos de $\{1, \ldots, n\}$ tais que $x \in B_{i_1}$, $y \in B_{i_m}$ e $B_{i_j} \cap B_{i_{j+1}} \neq \emptyset$ para todo $j \in \{1, \ldots, m\}$.

É muito fácil ver que S_x e $K \setminus S_x$ são abertos em K. Como K é conexo segue que $S_x = K$ para todo $x \in K$. Assim se $x, y \in K$ então $y \in S_x$ e portanto podemos tomar $(i_1, \ldots, i_m)$ como descrita acima com $x \in B_{i_1}$, $y \in B_{i_m}$. Tomando $y_j \in B_{i_j} \cap B_{i_{j+1}}$ podemos estimar

$$\frac{u(x)}{u(y)} = \frac{u(x)}{u(y_1)} \cdot \frac{u(y_1)}{u(y_2)} \cdots \frac{u(y_{m-1})}{u(y)} \leq D^m.$$

Definindo $C = \max\{1, D^m\}$ obtemos

$$u(x) \leq C u(y), \quad x, y \in K,$$

propriedade esta que é equivalente a (13). $\square$

Daremos a seguir dois importantes resultados que seguem da Desigualdade de Harnack.

6.4 Corolário. (Teorema da convergência monótona de Harnack) *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ aberto e conexo e $\{u_n\}$ uma sequência de funções harmônicas em Ω tal que $u_n \leq u_{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{Z}_+$. Então ocorre um dos dois casos*

1. *Existe $x_0 \in \Omega$ tal que $\{u_n(x_0)\}$ é limitada. Neste caso, a sequência $\{u_n\}$ converge uniformemente sobre os compactos de Ω (para uma função harmônica);*
2. *Para todo $x \in \Omega$, temos $\lim u_n(x) = \infty$. Neste caso, temos $u_n \longrightarrow \infty$ uniformemente sobre os compactos de Ω.*

Demonstração. Considere os conjuntos

$$\Omega_1 = \{x \in \Omega : \sup_n u_n(x) < \infty\},$$
$$\Omega_2 = \{x \in \Omega : \sup_n u_n(x) = \infty\}.$$

Vamos mostrar que Ω_1 e Ω_2 são abertos. Se $x_1 \in \Omega_1$ tome $r > 0$ tal que $B_r(x_1)$ tem fecho contido em Ω. É uma simples consequência do corolário 6.2 a existência de $C > 0$ tal que

$$0 \leq u_{n+p}(x) - u_n(x) \leq C(u_{n+p}(x_1) - u_n(x_1)), \qquad \forall x \in \overline{B_r(x_1)},\ \forall n, p \in \mathbb{N}$$

Assim $B_r(x_1) \subset \Omega_1$ e $\{u_n\}$ é uniformemente convergente em $B_r(x_1)$. Em particular Ω_1 é aberto. Do mesmo modo, assumindo que $x_2 \in \Omega_2$ se tomarmos $\rho > 0$ tal que $B_\rho(x_2)$ tem fecho contido em Ω então $B_\rho(x_1) \subset \Omega_2$ e $\{u_n\}$ diverge uniformemente para $+\infty$ em $B_\rho(x_2)$. Em particular Ω_2 é também aberto e a tese segue do fato de Ω ser conexo. $\square$

6.5 Corolário. (Teorema de Liouville) *Seja u uma função harmônica em $\mathbb{R}^N$ e real. Se $\sup u < \infty$ ou $\inf u > -\infty$, então u é constante. Em outras palavras, se u é harmônica em $\mathbb{R}^N$ então ou u é constante ou a imagem de u é igual a $\mathbb{R}$.*

Demonstração. Considerando $-u$ se necessário e subtraindo uma constante conveniente podemos assumir $u \geq 0$. Aplicamos o Corolário 6.2, com $x' = 0$ e $x \in \mathbb{R}^N$ arbitrário. Tomando $r > |x|$ e fazendo $R \longrightarrow \infty$ segue $u(x) = u(0)$. $\square$

O problema de Dirichlet para H consiste em, dada $u_0 \in C(\partial \mathrm{H})$, determinar u harmônica em H, contínua em $\overline{\mathrm{H}}$ e satisfazendo $u = u_0$ em $\partial\mathrm{H}$. Este problema não goza de unicidade pois se u é uma solução então $u(x) + x_N$ também será. Teremos unicidade, entretanto, se nos restingirmos ao ambiente das funções limitadas.

6.6 Teorema. *Seja u é harmônica em H, contínua em $\overline{\mathrm{H}}$ e limitada. Se $u = 0$ em $\partial\mathrm{H}$ então u é identicamente nula.*

Demonstração. Pelo teorema 5.9 existe $\tilde{u}$ harmônica em $\mathbb{R}$ coincidindo com u em H; além do mais, dada a representação explícita de $\tilde{u}$ no teorema 5.9 segue que $\tilde{u}$ é limitada se u o for. Pelo Teorema de Liouville $\tilde{u}$ é constante. Como porém $\tilde{u}$ se anula em $\partial\mathrm{H}$ segue que $\tilde{u}$, e a fortiori u, se anula identicamente. $\square$

Uma versão, em uma direção um pouco diferente, do Teorema de Liouville pode ser obtida simplesmente usando a propriedade da média volumétrica. Concluiremos nosso texto com este resultado.

6.7 Teorema. *Seja u uma função harmônica em $\mathbb{R}^N$. Suponha que existam constantes $C > 0$ e $\theta \in [0, 1[$ tais que*

$$|u(x)| \leq C(1 + |x|^\theta),\ x \in \mathbb{R}^N. \tag{14}$$

Então u é constante.

Note que este resultado é preciso uma vez que uma função polinomial de grau 1 em $\mathbb{R}^N$ é uma função harmônica que satisfaz (14) com $\theta = 1$.

Demonstração. Sejam $x \in \mathbb{R}^N$ fixado e $r > 0$. Pelo que foi apresentado na demonstração do Teorema 3.11, temos a validade da seguinte desigualdade:

$$\left|\frac{\partial u}{\partial x_j}(x)\right| \leq \frac{N}{r} \sup_{S_r(x)} |u|, \quad j = 1, \ldots, N.$$

Agora, se $y \in S_r(x)$ então $|y| \le |x| + r$ e, portanto,

$$\left|\frac{\partial u}{\partial x_j}(x)\right| \le \frac{CN}{r}(1 + (|x| + r)^\theta).$$

Fazendo $r \to \infty$ e usando que $\theta < 1$ concluímos que $(\partial u/\partial x_j)(x) = 0$, para todo $x \in \mathbb{R}^N$ e todo $j = 1, \ldots, N$. Isto conclui a demonstração. $\square$

7 O princípio do máximo de Hopf

O princípio do máximo de Hopf fornece uma estimativa para a derivada normal exterior de uma função harmônica em um ponto onde seu máximo é atingido. Para simplificar vamos enunciá-lo somente para a bola unitária (a extensão para uma bola aberta arbitrária é imediata). A demonstração foi extraída da monografia "Notions of Convexity"de Lars Hörmander, Modern Birkhäuser Classics, 2007. Um versão mais fraca deste resultado encontra-se enunciada no exercício 28.

7.1 Teorema. (Princípio do máximo de Hopf) *Seja u contínua em $\overline{B_1(0)}$, harmônica em $B_1(0)$ e seja $x_0 \in S_1(0)$ tal que $u(x_0) = \max_{\overline{B_1(0)}} u$. Então existe o limite*

$$\lim_{t \to 1^-} \frac{u(tx_0) - u(x_0)}{t - 1} := N_{x_0} \in [0, \infty].$$

Além disto,

$$0 \le u(x_0) - u(x) \le (1 + |x|)\left(\frac{2}{1 - |x|}\right)^{N-1} N_{x_0}, \quad x \in B_1(0). \tag{15}$$

Em particular, $N_{x_0} > 0$ se u não é constante.

Demonstração. Iniciando lembrando que estamos denotando por $\mathrm{K}(x, y)$ o núcleo de Poisson para a bola unitária. Assim, podemos escrever

$$u(tx_0) - u(x_0) = \int_{S_1(0)} \mathrm{K}(tx_0, y)\,[u(y) - u(x_0)]\,\mathrm{d}\sigma(y)$$

e, portanto,

$$\frac{u(tx_0) - u(x_0)}{t - 1} = \int_{S_1(0)} \frac{\mathrm{K}(tx_0, y)}{t - 1}\,[u(y) - u(x_0)]\,\mathrm{d}\sigma(y).$$

Desde que

$$\frac{\mathrm{K}(tx_0, y)}{t - 1} = \frac{1}{\omega_N}\,\frac{1 - |tx_0|^2}{(t - 1)|tx_0 - y|^N} = \frac{1}{\omega_N}\,\frac{-(1 + t)}{|tx_0 - y|^N}$$

podemos finalmente escrever

$$\frac{u(tx_0) - u(x_0)}{t - 1} = \frac{1}{\omega_N}\int_{S_1(0)} \frac{(1 + t)(u(x_0) - u(y))}{|tx_0 - y|^N}\,\mathrm{d}\sigma(y).$$

Note que este último integrando é maior ou igual a zero, pois u assume seu máximo em x_0. Notemos, agora, que podemos assumir

$$\liminf_{t\to 1^-} \frac{u(tx_0) - u(x_0)}{t-1} < \infty$$

já que, caso contrário, teríamos $N_{x_0} = \infty$ e a conclusão seria imediata. Pelo lema de Fatou temos, então,

$$N_{x_0} := \frac{2}{\omega_N} \int_{S_1(0)} \frac{u(x_0) - u(y)}{|x_0 - y|^N} \, \mathrm{d}\sigma(y) < \infty.$$

Pelo teorema da convergência dominada de Lebesgue segue que

$$\lim_{t\to 1^-} \frac{u(tx_0) - u(x_0)}{t-1} = N_{x_0}$$

uma vez que $|x_0 - y| \le 2|tx_0 - y|$, para $0 < t < 1$. De fato,

$$|x_0 - y| \le |x_0 - tx_0 + tx_0 - y| \le (1-t) + |tx_0 - y.|$$

Como, também, $|tx_0 - y| \ge |y| - t|x_0| = 1 - t$, segue o que afirmamos.

Neste ponto já é possível concluir que $N_{x_0} > 0$ se u não for constante (por que?). Procederemos, porém, à demonstração da estimativa (15), que fornece uma conclusão mais precisa.

Se $x \in B_1(0)$ temos

$$0 \le u(x_0) - u(x) = \frac{1}{\omega_N} \int_{S_1(0)} \frac{1 - |x|^2}{|x-y|^N} \, [u(x_0) - u(y)] \, \mathrm{d}\sigma(y).$$

Mas

$$\frac{|x_0 - y|}{|x - y|} \le \frac{2}{1 - |x|}, \quad y \in S_1(0),$$

de onde (15) segue imediatamente.

$\square$

Referências

- **Gerald B. Folland**, "Introduction to Partial Differential Equations" - Preliminary Informal Notes of University Courses and Seminars in Mathematics. Mathematical Notes, Princeton University Press and University of Tokyo Press, Princeton, New Jersey, 1976.
- **Antonio Gilioli**, "Equações Diferenciais Parciais Elípticas" - notas de curso ministrado durante o 10º Colóquio Brasileiro de Matemática, Poços de Caldas, 1975.

Exercícios

1. Mostre que se u é harmônica em $\mathbb{R}^N$ e se $T : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ é uma transformação ortogonal então $u \circ T$ também é harmônica em $\mathbb{R}^N$. Lembre que uma transformação linear $T : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ é *ortogonal* se $({}^tT)T = T({}^tT) = I$, a aplicação identidade.

2. Determine todas as funções harmônicas em $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ da forma $u(x) = f(|x|)$, onde $f :]0, \infty[\to \mathbb{R}$ é de classe C^2.

3. Use o resultado obtido no exercício anterior para obter u harmônica em $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^N : r < |x| < R\}$, onde $0 < r < R < \infty$, contínua em $\overline{\Omega}$ e satisfazendo $u(x) = a$ se $|x| = r$, $u(x) = b$ se $|x| = R$ (aqui $a, b \in \mathbb{R}$).

4. Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ aberto, u harmônica em Ω e $x_0 \in \Omega$. Mostre que se $N \geq 2$ então $u^{-1}\{u(x_0)\}$ é infinito. E quando $N = 1$?

5. Fixado $y \in \mathbb{R}^N$ defina
$$V(x) = \frac{|y|^2 - |x|^2}{|y - x|^N}\,, \quad x \in \mathbb{R}^N \setminus \{y\}.$$
Mostre que V é harmônica em $\mathbb{R}^N \setminus \{y\}$.

6. Calcule as integrais
$$\int_{S_1(0)} y_j \mathrm{d}\sigma(y), \quad \int_{S_1(0)} y_j y_k \mathrm{d}\sigma(y).$$

7. Sejam (x, y) as coordenadas em $\mathbb{R}^2$ e considere os ODPL com coeficientes constantes:
$$\frac{\partial}{\partial z} \doteq \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right), \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \doteq \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right).$$
Mostre que
$$\Delta = 4\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial}{\partial \bar{z}}\ .$$

8. Sejam $R > 0$ e $f : S_R(0) \to \mathbb{R}$ contínua. Mostre que

$$\int_{S_R(0)} f(y)\mathrm{d}\sigma(y) = R^{N-1} \int_{S_1(0)} f(Rz)\mathrm{d}\sigma(z).$$

Sugestão: Mostre, primeiramente, que esta fórmula é válida para $f \in C^2(\mathbb{R}^N)$ escrevendo a expansão de Taylor de f de ordem 1 na origem na forma

$$f(x) = f(0) + \sum_{j=1}^{N} g_j(x)x_j, \text{ com } g_j \in C^1(\mathbb{R}^N),$$

e aplicando o teorema da divergência para o campo $\vec{g} = (g_1, \ldots, g_N)$. Conclua o caso geral evocando o teorema de Weierstrass.

9. Nas mesmas hipóteses do exercício anterior, mostre que

$$\int_{S_R(0)} f(y)\mathrm{d}\sigma(y) = \int_{S_R(0)} f(-y)\mathrm{d}\sigma(y).$$

10. Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um aberto com fronteira regular e conexo. Seja, também, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ satisfazendo $tf(t) \geq 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Mostre que toda solução $u \in C^2(\bar{\Omega})$ do problema

$$\begin{cases} \Delta u = f(u) \text{ em } \Omega \\ \partial u/\partial \vec{n} = 0 \text{ em } \partial\Omega \end{cases} \qquad (*)$$

é necessariamente constante (aqui $\vec{n}$ denota a normal unitária exterior a $\partial\Omega$). Determine, também, uma condição adicional sobre f que garanta que toda solução de $(*)$ se anula identicamente.

11. Seja Ω um aberto com fronteira regular de $\mathbb{R}^N$. Usando a identidade

$$|\nabla v|^2 + 2\,\mathrm{div}\,((u-v)\nabla u) = |\nabla u|^2 + |\nabla(u-v)|^2 + 2(u-v)\Delta u,$$

válida para $u, v \in C^2(\bar{\Omega})$, mostre que se $u_0 \in C^2(\bar{\Omega})$ satisfaz

$$\begin{cases} \Delta u_0 = 0 & \text{em } \Omega; \\ u_0 = g & \text{em } \partial\Omega, \end{cases}$$

então u_0 fornece o mínimo absoluto da função

$$J : \mathcal{M} \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad J[v] = \int_\Omega |\nabla v|^2 \mathrm{d}x,$$

onde

$$\mathcal{M} = \{v \in C^2(\bar{\Omega}) : v = g \text{ em } \partial\Omega\}.$$

12. Sejam Ω um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^n$ e $u \in C^2(\Omega)$. Suponha que para todo $x_0 \in \Omega$ e todo $r > 0$ tal que $\bar{B}_r(x_0) \subset \Omega$ tem-se

$$\int_{S_r(x_0)} \frac{\partial u}{\partial \vec{n}}(y)\mathrm{d}\sigma(y) = 0,$$

onde, como é usual, $\vec{n}$ denota a normal unitária a $S_r(x_0)$, exterior a $B_r(x_0)$. Mostre que então u é harmônica em Ω.

13. Seja Ω um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^N$, $\Omega \neq \mathbb{R}^N$, e seja u uma função harmônica em Ω. Mostre que para cada subconjunto compacto K de Ω vale a desigualdade

$$\sup_{x\in K}|u(x)| \leq \frac{N}{\omega_N \mathrm{dist}\,(K,\partial\Omega)^N}\int_\Omega |u(x)|\,\mathrm{d}x.$$

Conclua o seguinte resultado: *se u é harmônica em $\mathbb{R}^N$ e se $u \in L^1(\mathbb{R}^N)$ então $u = 0$.*

14. Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ aberto.

    (a) Sejam $K \subset \Omega$ compacto e $U \subset \Omega$ aberto tais que $K \subset U$ e $\overline{U}$ é compacto em Ω. Mostre que se u é harmônica em Ω então

    $$\sup_K \left|\frac{\partial u}{\partial x_j}\right| \leq \frac{N}{\mathrm{dist}(K,\partial U)}\sup_U |u| \;\; j = 1,\dots,n.$$

    (b) Conclua que se $\{u_n\}$ é uma sequência de funções harmônicas em Ω que converge uniformemente sobre os compactos de Ω para u então o mesmo é verdade para as sequências $\{\partial u_n/\partial x_j\}$, $j = 1,\dots,N$, com $\partial u_n/\partial x_j \to \partial u/\partial x_j$.

15. Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um aberto limitado e com fronteira regular. Seja também $g \in C(\bar{\Omega})$. Mostre que não existe solução $u \in C^2(\bar{\Omega})$ para o problema

$$\begin{cases} (\Delta u)\,(x) = e^{g(x)}, \;\; x \in \Omega; \\ (\partial u/\partial \vec{n})(y) = 0, \;\; y \in \partial\Omega. \end{cases}$$

Aqui $\vec{n}$ é normal a $\partial\Omega$ e exterior a Ω.

16. Seja Ω um aberto limitado de $\mathbb{R}^N$ e considere uma sequência $\{u_j\}$ de funções harmônicas em Ω, cada uma delas contínua em $\bar{\Omega}$. Suponha que

$$\max_{y\in\partial\Omega}|u_j(y) - u_k(y)| \leq \frac{1}{j} + \frac{1}{k}, \qquad j,k = 1,2,\dots$$

Mostre que $\{u_j\}$ converge uniformemente em $\bar{\Omega}$ para uma função $u \in C(\bar{\Omega})$, que é ainda harmônica em Ω.

17. Seja $D = \{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 < 1\}$. Suponha que exista u harmônica em D, contínua em $\bar{D}$ e que coincide com a função $2x_1^2$ em ∂D. Determine $u(0)$.

18. Sejam $U = \{x : x \in \mathbb{R}^N, x \neq 0\}$ e $f \in C^2(U)$. Defina, para $x \in U$,

$$f_\sharp(x) = \int_{S_1(0)} f(|x|\omega)\mathrm{d}\sigma(\omega).$$

Mostre que $\Delta(f_\sharp) = (\Delta f)_\sharp$.

Sugestão: Utilize o teorema da divergência e a fórmula de integração em coordenadas polares.

19. Sejam Ω um aberto regular de $\mathbb{R}^2$, com fronteira de classe C^1, $u \in C^2(\bar{\Omega})$, $x \in \Omega$ e

$$E(y) = \frac{1}{2\pi} \log |y| \quad y \in \mathbb{R}^2,\ y \neq 0.$$

Verifique a validade da fórmula

$$u(x) = \int_\Omega E(x-y)\, \Delta u(y)\, \mathrm{d}y + \int_{\partial\Omega} \left\{ u(y) \frac{\partial E(x-y)}{\partial \vec{n_y}} - E(x-y) \frac{\partial u}{\partial \vec{n}}(y) \right\} \mathrm{d}\sigma(y).$$

20. Proceda formalmente para determinar a função de Green e a fórmula de Poisson para o semi-espaço

$$\mathrm{H} = \{x = (x_1, \ldots, x_N) \in \mathbb{R}^N : \ x_N > 0\}.$$

Conclua que, para $N = 2$, a única solução limitada do problema de Dirichlet para o semi-espaço $x_2 > 0$, com dado de fronteira $v_0 \in C(\partial\mathrm{H}) \cap L^\infty(\partial\mathrm{H})$, é dada por

$$v(x_1, x_2) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x_2}{(x_1 - y)^2 + x_2^2}\, v_0(y)\, \mathrm{d}y\,.$$

21. Seja $\Omega = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 > 0,\ x_2 > 0\}$. Resolva o problema

$$\begin{cases} \Delta u = 0 \text{ em } \Omega,\ u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega}), \text{ limitada;} \\ u(x_1, 0) = u_0(x_1),\ \ x_1 \geq 0; \\ u(0, x_2) = 0,\ \ x_2 \geq 0, \end{cases}$$

onde u_0 é contínua e limitada em $[0, \infty[$, $u_0(0) = 0$.

22. Verifique que a função de Green para a bola $B_1(0)$ em $\mathbb{R}^2$ é dada por

$$G(x, y) = \frac{1}{2\pi} \left\{ \log |x - y| - \log[|x|^2|y|^2 + 1 - 2(x \cdot y)]^{1/2} \right\}.$$

23. Sejam Ω um aberto em $\mathbb{R}^N$ e $F \subset \Omega$ tais que F não tem pontos de acumulação em Ω. Mostre que se u é harmônica e limitada em $\Omega \setminus F$ então u se estende a uma função harmônica em Ω.

24. Seja $f \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$ se anulando no complementar de um compacto de $\mathbb{R}^N$. Denotando por $E(x)$ o potencial newtoniano em $\mathbb{R}^N$ mostre que

$$u(x) = \int_{\mathbb{R}^N} E(x - y) f(y)\, \mathrm{d}y, \quad x \in \mathbb{R}^N,$$

é de classe C^∞ e que $\Delta u = f$ em $\mathbb{R}^N$.

25. Seja u harmônica em $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x| > 1\}$. Mostre que

$$v(y) = u\left(\frac{y_1}{|y|^2}, -\frac{y_2}{|y|^2} \right)$$

é harmônica em $U = \{y \in \mathbb{R}^2 : 0 < |y| < 1\}$. *Sugestão:* Para simplificar os cálculos defina $g_1 = y_1|y|^{-2}$, $g_2 = -y_2|y|^{-2}$ e mostre que $(g_1)_{y_1} = (g_2)_{y_2}$, $(g_1)_{y_2} = -(g_2)_{y_1}$.

26. Seja Ω como no exercício anterior. Demonstre a unicidade para o seguinte problema:

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{em} \quad \Omega \\ u = u_0 & \text{em} \quad S_1(0). \end{cases}$$

Aqui assumimos u_0 contínua em $S_1(0)$ e impomos u contínua e limitada em $\overline{\Omega}$.

27. Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ aberto, $u \in C^2(\Omega)$ e $f \in C^\infty(\Omega)$ tais que $\Delta u = f$. Mostre que $u \in C^\infty(\Omega)$. *Sugestão:* É suficiente mostrar que $u|_B$ é de classe C^∞ para qualquer bola aberta B com fecho contido em Ω. Fixada uma tal bola mostre que existe $g \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$ se anulando no complementar de um compacto de $\mathbb{R}^N$ e coincidindo com f em B (cf. as notas de aula da disciplina "Cálculo Integral"mencionadas no texto). Resolva $\Delta v = g$.

28. Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ aberto e $u \in C^2(\Omega)$. Suponha que vale a seguinte propriedade:

   - dado $x \in \Omega$ existe $\delta = \delta(x) > 0$ tal que

$$u(x) = \frac{1}{\omega_N r^{N-1}} \int_{S_r(x)} u(y) \mathrm{d}\sigma(y), \ 0 < r \leq \delta.$$

Mostre que u é harmônica em Ω.

29. Seja Ω um subconjunto aberto e conexo de $\mathbb{R}^N$ satisfazendo a seguinte propriedade:

$$x = (x_1, \ldots, x_{N-1}, x_N) \in \Omega \implies (x_1, \ldots, x_{N-1}, -x_N) \in \Omega.$$

Seja u uma função harmônica em

$$\Omega_+ = \{x = (x_1, \ldots, x_N) \in \Omega : \, x_N > 0\},$$

contínua em

$$\Omega_\bullet = \{x = (x_1, \ldots, x_N) \in \Omega : \, x_N \geq 0\},$$

e nula quando $x_N = 0$. Conclua que existe uma única função $\tilde{u}$ em Ω que coincide com u em Ω_+.

30. Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ aberto e $u \in C^2(\Omega)$. Mostre que as propriedades abaixo são equivalentes:

   (a) $\Delta u(x) \geq 0$, para todo $x \in \Omega$

   (b) Para todo $x_0 \in \Omega$ e todo $r > 0$ tal que $\overline{B_r}(x_0) \subset \Omega$ vale

$$u(x_0) \leq \frac{1}{\omega_N} \int_{S_1(0)} u(x_0 + ry) \, \mathrm{d}\sigma(y).$$

Sugestão: Para (1) $\Rightarrow$ (2) estude a derivada da função

$$g(t) = \frac{1}{\omega_N} \int_{S_1(0)} u(x_0 + ty) \mathrm{d}\sigma(y), \quad 0 \leq t \leq r.$$

Para (2) $\Rightarrow$ (1) escreva a expansão de Taylor de ordem 2 de u em torno de x_0 e utilize o exercício 6.

31. Seja u uma função harmônica em $B_R(0)$, $u \geq 0$. Mostre que

$$|(\nabla u)(0)| \leq \frac{Nu(0)}{R}.$$

32. Sejam $u \in C(\overline{B_1(0)})$ harmônica em $B_1(0)$ e $x \in S_1(0)$ um ponto onde u assume seu máximo em $\overline{B_1(0)}$. Suponha que exista o limite

$$N_x \doteq \lim_{t \to 1^-} \frac{u(tx) - u(x)}{t - 1} \in [0, \infty[.$$

Use a desigualdade de Harnack para mostrar que $N_x > 0$. *Observação.* Para utilizar Harnack considere $v \doteq u(x) - u$.

33. Sejam Ω um aberto de $\mathbb{R}^N$ e $\mathcal{H}(\Omega)$ o espaço constituído pelas funções harmônicas em Ω que pertencem a $L^2(\Omega)$. Mostre que $\mathcal{H}(\Omega)$ é um subespaço fechado de $L^2(\Omega)$.

34. Sejam Ω um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^N$ e $\mathcal{A} \subset C^\infty(\Omega)$ uma família de funções harmônicas satisfazendo a seguinte propriedade: para todo $K \subset \Omega$ compacto existe $C > 0$ tal que $\sup_K |u| \leq C$, $\forall u \in \mathcal{A}$. Mostre que a mesma propriedade é válida para as famílias

$$\mathcal{A}_j \doteq \left\{ \frac{\partial u}{\partial x_j} : u \in \mathcal{A} \right\}, \quad j = 1, \ldots, N.$$

Conclua, usando o Teorema de Arzelà-Ascoli, que para todo $K \subset \Omega$ compacto, o conjunto $\{u|_K : u \in \mathcal{A}\} \subset C(K)$ é relativamente compacto em $C(K)$. Aqui, como é usual, estamos munindo $C(K)$ com a distância $d(f, g) = \sup_K |f - g|$.

- - - - - oooo - - - - -