Seminários MAP5701
Funções Holomorfas em Várias Variáveis

Setembro 2022

## Sumário

# Superfícies de Riemann

Bruna V. S. Flores

02 de Agosto de 2022

## 1 Funções de uma variável complexa

Nesta seção, com base em [3], estabeleceremos alguns resultados relevantes da teoria de funções de uma variável complexa que serão utilizados ao longo deste trabalho, tais como o teorema da identidade, o príncipio da extensão analítica e o teorema da extensão de Riemann em $\mathbb{C}$.

**Teorema 1.1** Seja $f : U \to \mathbb{C}$ uma função analítica, onde $U \subset \mathbb{C}$ é aberto. Seja $z_0 \in U$ tal que $f(z_0) = 0$ e $f$ não é identicamente nula numa vizinhança de $z_0$. Então $z_0$ é uma ponto isolado de $f^{-1}(0)$.

**Corolário 1.1** Seja $f : U \to \mathbb{C}$ uma função analítica, onde $U$ é aberto e conexo. Se $f^{-1}(0)$ possui algum ponto de acumulação em $U$, então $f^{-1}(0) = U$, ou seja, $f \equiv 0$.

**Corolário 1.2** Sejam $f, g : U \to \mathbb{C}$ duas funções analíticas em $U$, onde $U$ é aberto e conexo. Se $f$ e $g$ coincidem num subconjunto $A$ de $U$ com ponto de acumulação em $U$, então $f \equiv g$ em $U$.

**Teorema 1.2 (Príncipio da Extensão Analítica)** Sejam $f, g : U \to \mathbb{C}$ duas funções analíticas, onde $U$ é aberto conexo. As seguintes afirmações são equivalentes:

(i) $f \equiv g$ em $U$.

(ii) Existe $z_0 \in U$ tal que para todo $n \geq 0$, $f^{(n)}(z_0) = g^{(n)}(z_0)$.

(iii) Existe um aberto não vazio $V \subset U$ tal que $f|_V \equiv g|_V$.

**Teorema 1.3 (Teorema de extensão de Riemann)** Seja $z_0$ uma singularidade isolada de uma função analítica $f : U \to \mathbb{C}$, onde $U \subset \mathbb{C}$ é aberto. Então $z_0$ é uma singularidade removível de $f$ se, e somente se, a função $|f|$ é limitada numa vizinhança perfurada de $z_0$.

## 2 Definição de superfície de Riemann

Nesta seção, introduziremos a noção de superfícies de Riemann, daremos alguns exemplos e listaremos alguns resultados importantes, baseados no livro [1].

Primeiramente, superfícies de Riemann são variedades 2-dimensionais com uma estrutura adicional. Como é bem conhecido, uma variedade n-dimensional é um espaço topológico de Hausdorff $X$ tal que todo ponto $a \in X$ tem uma vizinhança aberta que é homeomorfa a um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^n$.

**Definição 2.1** Seja $X$ uma variedade 2-dimensional. Uma carta complexa em $X$ é um homeomorfismo $\phi : U \to V$ de um subconjunto aberto $U \subset X$ em um subconjunto aberto $V \subset \mathbb{C}$. Duas cartas complexas $\phi_i : U_i \to V_i$, $i = 1, 2$, são ditas holomorficamente compatíveis se a aplicação

$$\phi_2 \circ \phi_1^{-1} : \phi_1(U_1 \cap U_2) \to \phi_2(U_1 \cap U_2)$$

é um biholomorfismo, com $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$.

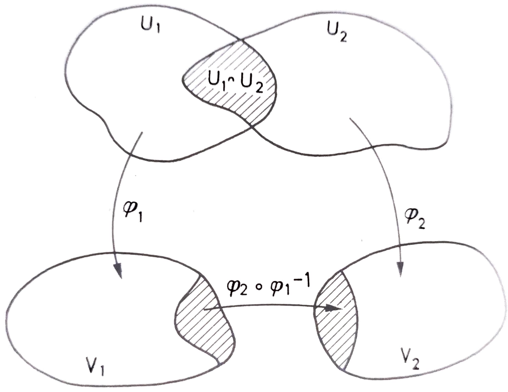



Figura 1: Cartas complexas

Definição 2.2 Um atlas complexo em $X$ é um sistema $\mathcal{U} = \{\phi_i : U_i \to V_i; i \in I\}$ de cartas holomorficamente compatíveis que cobrem $X$, isto é, $\bigcup_{i \in I} U_i = X$.

Definição 2.3 Dois atlas $\mathcal{U}$ e $\mathcal{U}'$ em $X$ são ditos analiticamente equivalentes se toda carta de $\mathcal{U}$ é holomorficamente compatível com toda carta de $\mathcal{U}'$.

Definição 2.4 Uma estrutura complexa em uma variedade 2-dimensional $X$ é uma classe de equivalência de atlas analiticamente equivalentes em $X$.

Assim uma estrutura complexa em $X$ pode ser dada pela escolha de um atlas complexo. Toda estrutura complexa $\Sigma$ em $X$ contém um único atlas maximal $\mathcal{U}^*$. Se $\mathcal{U}$ é um atlas arbitrário em $\Sigma$, então $\mathcal{U}^*$ consiste de todas as cartas complexas em $X$ que são holomorficamente compatíveis com toda carta de $\mathcal{U}$.

Definição 2.5 (Superfície de Riemann) Uma superfície de Riemann é um par $(X, \Sigma)$, onde $X$ é uma variedade 2-dimensional conexa e $\Sigma$ é uma estrutura complexa em $X$.

Observação 2.1 i) Escrevemos $X$ ao invés de $(X, \Sigma)$ sempre que estiver claro qual é a estrutura complexa $\Sigma$.

ii) Algumas vezes escrevemos $(X, \mathcal{U})$, onde $\mathcal{U}$ é um representante de $\Sigma$.

iii) Se $X$ é uma superfície de Riemann, então por uma carta em $X$, nós entendemos uma carta complexa pertencente ao atlas maximal da estrutura complexa em $X$.

Exemplo 2.1 (O plano complexo) Sua estrutura complexa é definida pelo atlas cuja única carta é a aplicação identidade em $\mathbb{C}$.

Exemplo 2.2 (Abertos conexos de uma superfície de Riemann) Seja $X$ uma superfície de Riemann e seja $Y \subset X$ um subconjunto aberto e conexo. Então $Y$ tem uma estrutura complexa natural. A saber, basta tomar como atlas o conjunto de todas as cartas complexas $\phi : U \to V$ em $X$, onde $U \subset Y$.

Exemplo 2.3 (A esfera de Riemann) Seja $\mathbb{P}^1 := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, onde $\infty$ é um elemento não pertencente a $\mathbb{C}$. Introduziremos a seguinte topologia em $\mathbb{P}^1$: Os conjuntos abertos são os abertos usuais de $\mathbb{C}$ e os conjuntos da forma $V \cup \{\infty\}$, onde $V \subset \mathbb{C}$ é o complementar de um compacto de $\mathbb{C}$ (ver [2], página 205). Com essa topologia, $\mathbb{P}^1$ é um espaço topológico de Hausdorff compacto homeomorfo a 2-esfera $S^2$.

Sejam

$$U_1 = \mathbb{P}^1 \setminus \{\infty\} = \mathbb{C},$$
$$U_2 = \mathbb{P}^1 \setminus \{0\} = \mathbb{C}^* \cup \{\infty\}.$$

Sejam as aplicações $\phi_i : U_i \to \mathbb{C}$, $i = 1, 2$, dadas por $\phi_1$ é a aplicação identidade em $\mathbb{C}$ e

$$\phi_2(z) = \begin{cases} 1/z, & \text{se } z \in \mathbb{C}^*, \\ 0, & \text{se } z = \infty. \end{cases}$$

Claramente $\phi_1$ e $\phi_2$ são homeomorfismos e, assim, $\mathbb{P}^1$ é uma variedade 2-dimensional. Como $U_1$ e $U_2$ são conexos e $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$, então $\mathbb{P}^1$ também é conexo.

A estrutura complexa em $\mathbb{P}^1$ é definida pelo atlas que consiste das cartas $\phi_i : U_i \to \mathbb{C}$, $i = 1, 2$. Além disso, $\phi_1$ e $\phi_2$ são holomorficamente compatíveis, pois $\phi_1(U_1 \cap U_2) = \phi_2(U_1 \cap U_2) = \mathbb{C}^*$ e

$$\phi_2 \circ \phi_1^{-1} : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*, \quad z \mapsto 1/z,$$

é biholomorfismo.

Observação 2.2 A notação $\mathbb{P}^1$ vem do fato de que $\mathbb{P}^1$ pode ser considerado como o espaço projetivo 1-dimensional sobre o corpo dos números complexos.

Definição 2.6 Seja $X$ uma superfície de Riemann e seja $Y \subset X$ um aberto. Uma função $f : Y \to \mathbb{C}$ é dita holomorfa, se para toda carta $\psi : U \to V$ em $X$, com $U \cap Y \neq \emptyset$, a função

$$f \circ \psi^{-1} : \psi(U \cap Y) \to \mathbb{C}$$

é holomorfa no sentido usual de abertos $\psi(U \cap Y) \subset \mathbb{C}$. O conjunto de todas as funções holomorfas em $Y$ será denotado por $\mathcal{O}(Y)$.

Observação 2.3 A condição na Definição 2.6 não tem que ser verificada para todas as cartas num atlas maximal em $X$, mas apenas para uma família de cartas que cobre $Y$. Daí, isso é automaticamente realizado para todas as outras cartas.

Observação 2.4 Toda carta $\psi : U \to V$ em $X$ é, em particular, uma função complexa. Ela é trivialmente holomorfa. Podemos também chamar $\psi$ de uma coordenada local e $(U, \psi)$ vizinhança coordenada de algum ponto $a \in U$. Neste contexto, geralmente usamos a letra $z$ ao invés de $\psi$.

O seguinte teorema estabelece um resultado análogo para superfícies de Riemann do Teorema 1.3 da extensão de Riemann em $\mathbb{C}$:

Teorema 2.1 (Teorema das singularidades removíveis de Riemann) Seja $U$ um conjunto aberto de uma superfície de Riemann e seja $a \in U$. Suponha que a função $f \in \mathcal{O}(U \setminus \{a\})$ é limitada em uma vizinhança de $a$. Então $f$ pode ser estendida unicamente a uma função $\tilde{f} \in \mathcal{O}(U)$.

Demonstração:

(Existência) Sendo $f$ limitada em uma vizinhança de $a$, então existe $\tilde{U} \subset U$ vizinhança de $a$ tal que para algum $M > 0$,

$$|f(z)| \leq M,$$

para todo $z \in \tilde{U} \setminus \{a\}$.

Podemos considerar uma carta $\phi : \tilde{U} \to U'$, com $\tilde{U} \subset U$ (se não existir uma tal carta, basta diminuir o conjunto $\tilde{U}$). Como $\phi$ é injetora, temos que $\phi\left(\tilde{U} \setminus \{a\}\right) = \phi\left(\tilde{U}\right) \setminus \phi(a)$. Daí, a aplicação $f \circ \phi^{-1} : \phi\left(\tilde{U}\right) \setminus \phi(a) \to \mathbb{C}$ é holomorfa, uma vez que $f \in \mathcal{O}(U \setminus \{a\})$. Além disso,

$$\left|f \circ \phi^{-1}(w)\right| = \left|f\left(\phi^{-1}(w)\right)\right| \leq M, \quad \text{para } w \in \phi\left(\tilde{U}\right) \setminus \phi(a).$$

Logo, pelo Teorema 1.3 (Extensão de Riemann em $\mathbb{C}$), a função $f \circ \phi^{-1}$ pode ser estendida unicamente a uma função holomorfa em $\phi(\tilde{U})$, pois a aplicação $f \circ \phi^{-1}$ é holomorfa em $\phi(U) \setminus \phi(a)$ e é limitada em uma vizinhança de $\phi(a)$. Daí, é claro que a função $f \circ \phi^{-1}$ pode ser estendida unicamente a uma função $g$ holomorfa em $\phi(U)$.

Seja $\tilde{f} = g \circ \phi$ e seja $\psi : V \to W$ uma carta em $X$, com $U \cap V \neq \emptyset$. Daí

$$\tilde{f} \circ \psi^{-1} = (g \circ \phi) \circ \psi^{-1} = g \circ (\phi \circ \psi^{-1})$$

é holomorfismo. Com isso, segue que $\tilde{f}$ é holomorfa em $U$ que estende $f$.

(Unicidade) Suponha que existem $f_1, f_2 \in \mathcal{O}(U)$ que estendem $f$. Então $f_1(u) = f(u) = f_2(u)$, para todo $u \in U \setminus \{a\}$. Considere uma carta $\psi_1 : U_1 \to V_1$ em torno de $a$, com $U_1$ conexo. Então $f_i \circ \psi_1^{-1} : \psi_1(U_1) \to \mathbb{C}$ é holomorfa para $i = 1, 2$. Como $f_1 \circ \psi_1^{-1}$ e $f_2 \circ \psi_1^{-1}$ coincidem em $\psi_1(U_1) \setminus \psi_1(a)$, então pelo Teorema 1.3, $f_1 \circ \psi_1^{-1} \equiv f_2 \circ \psi_1^{-1}$ em $\psi_1(U_1)$. Daí, segue que $f_1(a) = f_2(a)$. ■

Agora definimos aplicações holomorfas entre superfícies de Riemann:

**Definição 2.7** Suponha que $X$ e $Y$ sejam superfícies de Riemann. Uma aplicação $f : X \to Y$ contínua é holomorfa se para todo par de cartas $\psi_1 : U_1 \to V_1$ em $X$ e $\psi_2 : U_2 \to V_2$ em $Y$ com $f(U_1) \subset U_2$ a aplicação

$$\psi_2 \circ f \circ \psi_1^{-1} : V_1 \to V_2$$

é holomorfa no sentido usual. Uma aplicação $f : X \to Y$ é um biholomorfismo se é bijetora e ambas $f : X \to Y$ e $f^{-1} : Y \to X$ são holomorfas. Duas superfícies de Riemann são isomorfas se existe um biholomorfismo $f : X \to Y$.

O seguinte teorema estabelece um resultado análogo para superfícies de Riemann do Corolário 1.2:

**Teorema 2.2 (Teorema da Identidade)** Suponha que $X$ e $Y$ são superfícies de Riemann e $f_1, f_2 : X \to Y$ são holomorfas que coincidem em um conjunto $A \subset X$ tendo um ponto de acumulação $a \in X$. Então $f_1$ e $f_2$ são identicamente iguais.

Demonstração:

Seja $G$ o conjunto de todos os pontos $x \in X$ tais que existe uma vizinhança $W$ de $x$ com $f_1|_W = f_2|_W$.

Note que $G$ não é vazio. De fato, seja $z_0 \in A$ um ponto de acumulução. Assim, existe uma sequência $(z_n)_{n\geq 1}$ em $A$, com $z_n \neq z_0$, para todo $n \geq 1$, tal que $z_n \to z_0$ e $f_1(z_k) = f_2(z_k)$, para todo $k \geq 1$. Seja $\varphi : Z \to Z'$ carta em torno de $z_0$, com $Z$ aberto conexo. Por continuidade, existe $n_0 \in Z$ tal que $\varphi(z_n) \to \varphi(z_0)$ em $\varphi(Z)$, com $\varphi(z_n) \neq \varphi(z_0)$, para todo $n \geq n_0$. Daí, as funções $f_1 \circ \varphi^{-1}$ e $f_2 \circ \varphi^{-1}$ coincidem em um conjunto com um ponto de acumulação. Logo, pelo Corolário 1.2, $f_1 \circ \varphi^{-1} \equiv f_2 \circ \varphi^{-1}$ em $\varphi(Z)$. Logo $f_1 \equiv f_2$ em $Z$ e, portanto, $G$ é não vazio, pois $z_0 \in G$.

Por definição, $G$ é aberto. Afirmo que $G$ é fechado. De fato, seja $b \in \partial G$. Então $f_1(b) = f_2(b)$, pois $f$ é contínua. Escolha cartas $\phi : U \to V$ em $X$ e $\psi : U' \to V'$ em $Y$ com $b \in U$ e $f_i(U) \subset U'$, $i = 1, 2$. Assumo que $U$ é conexo. As aplicações

$$g_i = \psi \circ f_i \circ \phi^{-1} : V \to V'$$

são holomorfas. Note que $U \cap G \neq \emptyset$, pois existe uma sequência $b_n \to b$ em $G$. Daí, existe $m_0$ tal que $b_n \in U \cap G$, para todo $n \geq m_0$. Assim $g_1 = g_2$ em $\{\phi(b_n) : n \geq m_0\} \cup \{\phi(b)\}$. Pelo Corolário 1.2, $g_1 \equiv g_2$ em $V$. Assim, $f_1|_U \equiv f_2|_U$. Como $b \in G$, segue que $G$ é fechado.

Por fim, sendo $X$ conexo, temos que $X = G$ e, daí, $f_1$ e $f_2$ coincidem em $X$. ■

# 3 Propriedades elementares de aplicações holomorfas

**Teorema 3.1 (Comportamento local das aplicações holomorfas)** Sejam $X$ e $Y$ superfícies de Riemann e $f : X \to Y$ uma aplicação holomorfa não constante. Sejam $a \in X$ e $b := f(a)$. Então existe um inteiro $k \geq 1$ e cartas $\phi : U \to V$ em $X$ e $\psi : U' \to V'$ em $Y$ com as seguintes propriedades:

(i) $a \in U, \phi(a) = 0$; $\quad b \in U', \psi(b) = 0$.

(ii) $f(U) \subset U'$.

(iii) A aplicação $F := \psi \circ f \circ \phi^{-1} : V \to V'$ é dada por $F(z) = z^k$, para todo $z \in V$.

Demonstração: Primeiro, note que existem cartas $\phi_1 : U_1 \to V_1$ em $X$ e $\psi : U' \to V'$ em $Y$ tais que as propriedades (i) e (ii) são satisfeitas se trocar $(U, \phi)$ por $(U_1, \phi_1)$.

Agora, note que a função

$$f_1 := \psi \circ f \circ \phi_1^{-1} : V_1 \to V'$$

é não constante, pois $f$ não é constante e $\phi_1$ e $\psi$ são homeomorfismos. Como $f_1(0) = 0$, existe $k \geq 1$ tal que $f_1(z) = z^k g(z) = \left(zg(z)^{1/k}\right)^k$, onde $g$ é uma função holomorfa em $V_1$ com $g(0) \neq 0$. Para concluir, basta fazer uma mudança de coordenadas. Note que a aplicação

$$h(z) = zg(z)^{1/k} = ze^{1/k \log g(z)}$$

é biholomorfa em uma vizinhança $V_2 \subset V_1$ da origem.

Seja $U := \phi_1^{-1}(V_2)$. Agora substitua a carta $\phi_1 : U_1 \to V_1$ pela carta $\phi : U \to V$, onde $\phi = h \circ \phi_1$. Pondo $w = zg(z)^{1/k}$, obtemos

$$F(w) := \psi \circ f \circ \phi^{-1}(w) = \psi \circ f \circ (h \circ \phi_1)^{-1}(w) = (\psi \circ f \circ \phi_1^{-1}) \circ h^{-1}(w) = f_1 \circ h^{-1}(w) = w^k.$$

■

Corolário 3.1 Sejam $X$ e $Y$ superfícies de Riemann e seja $f : X \to Y$ uma aplicação holomorfa não constante. Então $f$ é aberta, isto é, a imagem de todo conjunto aberto sobre $f$ é aberta.

Demonstração: Seja $A$ um aberto de $X$. Queremos provar que $f(A)$ é um aberto em $Y$. Com efeito, seja $b \in f(A)$. Então, $b = f(a)$, para algum $a \in A$. Segue do Teorema 3.1 anterior que se $U \subset A$ é uma vizinhança de $a \in X$, então $f(U) \subset f(A)$ é uma vizinhança do ponto $f(a)$, pois a aplicação dada por $F(z) = z^k$ do teorema anterior, envia um aberto em torno da origem em subconjunto aberto em torno da origem. Isso implica que $f$ é aberta. ■

Corolário 3.2 Sejam $X$ e $Y$ superfícies de Riemann e seja $f : X \to Y$ uma aplicação holomorfa injetora. Então $f$ é um biholomorfismo de $X$ em $f(X)$.

Demonstração: Como $f$ é injetora, no Teorema 3.1, temos $k = 1$. Daí, a inversa $f^{-1} : f(X) \to X$ é holomorfa. ■

Corolário 3.3 (Príncipio do Máximo) Suponha que $X$ é uma superfície de Riemann e $f : X \to \mathbb{C}$ é uma função holomorfa não constante. Então o valor absoluto de $f$ não atinge seu máximo.

Demonstração: Suponha que exista $a \in X$ tal que

$$R := \left|f(a)\right| = \sup\{|f(x)| : x \in X\}.$$

Então,

$$f(X) \subset K := \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq R\}.$$

Como $f(X)$ é aberto, $f(X)$ pertence ao interior de $K$. Isso contradiz o fato de $f(a) \in \partial K$. ■

Teorema 3.2 Sejam $X$ e $Y$ superfícies de Riemann. Suponha que $X$ é compacta e $f : X \to Y$ é uma aplicação holomorfa não-constante. Então $Y$ é compacta e $f$ é sobrejetora.

Demonstração: Pelo Corolário 3.1, $f(X)$ é aberto. Como $X$ é compacto, $f(X)$ é compacto e, assim, fechado. Como os únicos subconjuntos de um espaço topológico conexo que são abertos e fechados são o vazio e o conjunto todo, segue que $f(X) = Y$. Assim, $f$ é sobrejetora e $Y$ é compacto. ■

**Corolário 3.4** Toda função holomorfa em uma superfície de Riemann compacta é constante.

**Demonstração:** Segue do Teorema 3.2, uma vez que $\mathbb{C}$ não é compacto. ■

**Teorema 3.3 (Teorema de Liouville)** Toda função $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorfa limitada é constante.

**Demonstração:** Pelo Teorema das singularidades removíveis de Riemann 2.1, $f$ pode ser estendida analiticamente a uma aplicação $\tilde{f} : \mathbb{P}^1 \to \mathbb{C}$ holomorfa, já que $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ é limitada. Mas sendo $\mathbb{P}^1$ uma superfície de Riemann compacta, então do Corolário 3.4, segue que $\tilde{f}$ é constante e, portanto, $f$ é constante. ■

**Teorema 3.4 (Teorema Fundamental da Álgebra)** Seja $n \geq 1$ e seja

$$f(z) = z^n + c_{n-1}z^{n-1} + \ldots + c_0$$

um polinômio com coeficientes $c_\nu \in \mathbb{C}$. Então existe ao menos um ponto $a \in \mathbb{C}$ tal que $f(a) = 0$.

**Demonstração:** O polinômio $f$ pode ser considerado como uma aplicação holomorfa $f : \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1$, onde $f(\infty) = \infty$. Pelo Teorema 3.2, $f$ é sobrejetora e, assim, $0 \in f(\mathbb{C})$. ■

# 4 Coberturas com ramificações e sem ramificações

**Definição 4.1** Sejam $X$ e $Y$ espaços topológicos e $p : Y \to X$ uma aplicação contínua. Se $x \in X$, o conjunto $p^{-1}(x)$ é chamado a fibra de $p$ sobre $x$. Se $y \in p^{-1}(x)$, então $y$ está sobre $x$. Se $p : Y \to X$ e $q : Z \to X$ são aplicaçõs contínuas, então a aplicação $f : Y \to Z$ preserva fibras se $p = q \circ f$. Isso significa que qualquer ponto $y \in Y$ que está sobre $x \in X$, é levado em um ponto que também está sobre $x$.

**Definição 4.2** Suponha que $X$ e $Y$ são superfícies de Riemann e $p : Y \to X$ é uma aplicação holomorfa não-constante. Um ponto $y \in Y$ é dito um ponto de ramificação se não existe vizinhança $V$ de $y$ tal que $p|_V$ é injetora. A aplicação $p$ é dita uma aplicação holomorfa sem ramificações se ela não tem pontos de ramificação.

**Teorema 4.1** Sejam $X$ e $Y$ superfícies de Riemann. Então uma aplicação holomorfa não-constante $p : Y \to X$ não tem pontos de ramificação se, e somente se, $p$ é um homeomorfismo local.

**Demonstração:** Seja $p : Y \to X$ sem pontos de ramificação e seja $y \in Y$. Então existe uma vizinhança $V$ de $y$ tal que $p|_V$ é injetora. Como $p$ é contínua e aberta (Corolário 3.1), $p$ mapeia o conjunto $V$ homeomorficamente em um conjunto aberto $U := p(V)$.

Reciprocamente, assuma que $p : Y \to X$ é um homeomorfismo local. Então para qualquer $y \in Y$, existe uma vizinhança $V$ de $y$ que é mapeado homeomorficamente por $p$ em um aberto de $X$. Em particular, $p|_V$ é injetora e $y$ não é um ponto de ramificação de $p$. ■

**Exemplo 4.1** Seja $k \geq 2$ um número natural e seja $p_k : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ dada por $p_k(z) = z^k$. Então $0 \in \mathbb{C}$ é um ponto de ramificação de $p_k$ e a aplicação $p_k : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}$ não tem ramificações.

**Exemplo 4.2** $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^*$ é uma aplicação holomorfa sem ramificações, pois $\exp$ é injetora em todo aberto $V \subset \mathbb{C}$ que não contém dois pontos que diferem entre si por um múltiplo inteiro de $2\pi i$.

# 5 Levantamento de aplicações

**Definição 5.1** Suponha que $X$, $Y$ e $Z$ são espaços topológicos e $p : Y \to X$ e $f : Z \to X$ são aplicações contínuas. Então o levantamento de $f$ com respeito a $p$ é uma aplicação contínua $g : Z \to Y$ tal que $f = p \circ g$, isto é, o seguinte diagrama comuta.

$$\begin{tikzcd} & Y \arrow[d, "p"] \\ Z \arrow[r, "f"'] \arrow[ur, dotted, "g"] & X \end{tikzcd}$$

Figura 2: O levantamento de $f$ com respeito a $p$

**Teorema 5.1** (Unicidade do Levantamento) Sejam $X$ e $Y$ espaços de Hausdorff e seja $p : Y \to X$ um homeomorfismo local. Suponha que $Z$ é um espaço topológico conexo e $f : Z \to X$ é uma aplicação contínua. Se $g_1, g_2 : Z \to Y$ são dois levantamentos de $f$ e $g_1(z_0) = g_2(z_0)$, para algum $z_0 \in Z$, então $g_1 = g_2$.

Demonstração: Seja $T = \{z \in Z \mid g_1(z) = g_2(z)\}$. Note que, $T$ é fechado, pois é pré-imagem da diagonal $\Delta \subset Y \times Y$ sobre a aplicação $(g_1, g_2) : Z \to Y \times Y$.

Agora observe que $T$ é aberto. De fato, seja $z \in T$ e seja $g_1(z) = g_2(z) = y$. Como $p$ é homeomorfismo local, existe uma vizinhança $V$ de $y$ que é levada por $p$ homeomorficamente em uma vizinhança $U$ de $p(y) = f(z)$. Como $g_1$ e $g_2$ são contínuas existe uma vizinhança $W$ de $z$ com $g_i(W) \subset V$. Agora seja $\phi : U \to V$ a inversa de $p|_V : V \to U$. Como $p \circ g_i = f$, temos que $g_i|_W = \phi \circ \left(f|_W\right)$, $i = 1, 2$. Assim, $g_1|_W = g_2|_W$ e $W \subset T$. Daí, $T$ é aberto.

Como $Z$ é conexo e $T$ é não-vazio, então $g_1 = g_2$. ■

**Teorema 5.2** Sejam $X, Y$ e $Z$ superfícies de Riemann, $p : Y \to X$ aplicação holomorfa sem ramificações e $f : Z \to X$ uma aplicação holomorfa qualquer. Então todo levantamento $g : Z \to Y$ de $f$ é holomorfa.

Demonstração: Seja $c \in Z$ arbitrário e seja $b := g(c)$ e $a := p(b) = p \circ g(c) = f(c)$. Como $p$ é uma aplicação holomorfa sem ramificações, existem vizinhanças $V$ de $b$ e $U$ de $a$ tais que $p|_V : V \to U$ é um biholomorfismo. Considere $\phi : U \to V$ a inversa de $p|_V$.

Como $g$ é contínua, existe $W$ aberto de $c$ tal que $g(W) \subset V$. Mas $f = p \circ g$, implica que $g|_W = \phi \circ \left(f|_W\right)$ e, assim, $g$ é holomorfa em $c$. ■

**Corolário 5.1** Sejam $X, Y$ e $Z$ superfícies de Riemann, $p : Y \to X$ e $q : Z \to X$ são aplicações holomorfas sem ramificações. Então toda aplicação contínua $f : Y \to Z$ que preserva fibras é holomorfa. Assim $f$ é um levantamento de $p$ com respeito a $q$.

**Definição 5.2** Sejam $X$ e $Y$ espaços topológicos. Uma aplicação $p : Y \to X$ é uma aplicação de recobrimento se todo ponto $x \in X$ admite uma vizinhança $U$ tal que sua pré-imagem $p^{-1}(U)$ pode ser representada como

$$p^{-1}(U) = \bigcup_{j \in J} V_j,$$

onde $V_j$, $j \in J$, são abertos disjuntos de $Y$ e toda aplicação $p|_{V_j} : V_j \to U$ é homeomorfismo. Em particular, $p$ é homeomorfismo local.

**Exemplo 5.1** Seja $k \geq 2$ um número natural e seja $p_k : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*$ dada por $p_k(z) = z^k$. Então $p_k$ é uma aplicação de recobrimento.

Seja $a \in \mathbb{C}^*$ arbitrário e escolha $b \in \mathbb{C}^*$ tal que $p_k(b) = a$. Como $p_k$ é homeomorfismo local, existem vizinhanças $V_0$ de $b$ e $U$ de $a$ tais que $p_k|_{V_0} : V_0 \to U$ é homeomorfismo. Então

$$p_k^{-1}(U) = V_0 \cup \omega V_0 \cup \ldots \cup \omega^{k-1} V_0,$$

onde $\omega$ é a $k$-ésima raiz da unidade, $w = \exp(2\pi i/k)$. Os conjuntos $V_j = \omega^j V_0$, $j = 0, 1, \ldots, k-1$, são dois a dois disjuntos e cada $p_k|_{V_j} : V_j \to U$ é homeomorfismo.

**Exemplo 5.2** $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^*$ é uma aplicação de recobrimento.

Seja $a \in \mathbb{C}^*$ arbitrário e $b \in \mathbb{C}$ com $\exp(b) = a$. Como exp é homeomorfismo local, existem vizinhanças $V_0$ de $b$ e $U$ de $a$ tais que $\exp|_{V_0} : V_0 \to U$ é homeomorfismo. Então

$$\exp^{-1}(U) = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} V_n,$$

onde $V_n := 2\pi i n + V_0$. Claramente, $V_n$ são dois a dois disjuntos e cada $\exp|_{V_n} : V_n \to U$ é um homeomorfismo.

O seguinte teorema encerra este trabalho. Mesmo admitido sem demonstração, a qual se encontra em [1] página 27, vamos aqui enunciá-lo devido sua importância, pois estabelece a existência e unicidade do levantamento sobre determinadas condições.

**Teorema 5.3** Sejam $X$ e $Y$ espaços de Hausdorff e seja $p : Y \to X$ uma aplicação de recobrimento. Suponha que $Z$ seja um espaço topológico simplesmente conexo, conexo por caminhos e localmente conexo por caminhos e $f : Z \to X$ é uma aplicação contínua. Então para toda escolha de pontos $z_0 \in Z$ e $y_0 \in Y$ com $f(z_0) = p(y_0)$, existe precisamente um levantamento $\tilde{f} : Z \to Y$ tal que $\tilde{f}(z_0) = y_0$.

Um exemplo de aplicação do teorema anterior é o seguinte:

**Exemplo 5.3 (Logaritmo de uma função)** Seja $X$ uma superfície de Riemann simplesmente conexa e seja $f : X \to \mathbb{C}^*$ uma função holomorfa que não se anula em $X$. Vamos encontrar o logaritmo de $f$, isto é, encontrar uma função holomorfa $F : X \to \mathbb{C}$ tal que $\exp(F) = f$. Mas isso significa que $F$ é um levantamento de $f$ com respeito ao recobrimento $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^*$.

Se $x_0 \in X$ e $c \in \mathbb{C}$ é qualquer solução da equação $e^c = f(x_0)$, então pelo Teorema 5.3, existe um levantamento $F : X \to \mathbb{C}$ com $F(x_0) = c$. Por fim, pelo Teorema 5.2, $F$ é holomorfa.

$$\begin{tikzcd} & \mathbb{C} \arrow[d, "\exp"] \\ X \arrow[ur, dotted, "F"] \arrow[r, "f"] & \mathbb{C}^* \end{tikzcd}$$

Figura 3: O logaritmo de uma função

# Referências


[1] FORSTER, Otto. Lectures on Riemann surfaces. Springer Science & Business Media, 2012.

[2] LIMA, Elon Lages. Elementos de Topologia Geral, 2a edição. Rio de Janeiro: IMPA, 1976.

[3] NETO, Alcides Lins. Funções de uma variável complexa. Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 1993.

# The Riemann Mapping Theorem

João Felipe Rodrigues Pereira

September 15, 2022

## Contents



# 1 Topological Aspects of $O(U)$

## 1.1 Locally Convex Spaces

Let $k = \mathrm{R}$ or $\mathrm{C}$ and consider any $k$-vector space $V$. A semi-norm on $V$ is a function $\rho : V \to [0, \infty[$ satisfying two properties for all $\alpha$ $k$ and $x, y$ $V$:

- (Positively Homogeneous): $\rho(\alpha x) = |\alpha|\rho(x)$;
- (Subadditive): $\rho(x + y) \leq \rho(x) + \rho(y)$.

A semi-norm only differs from a norm by the absence of the requirement $\rho(x) = 0$ implying $x = 0$, although the first property implies that $\rho(0) = 0$. Every norm is a semi-norm.

Example. On the real vector space $R[a, b]$ of Riemann-integrable functions on the interval $[a, b]$, define $\rho : R[a, b] \to [0, \infty[$ by:

$$\rho(f) := \int_a^b |f(x)| dx$$

Then $\rho$ is a semi-norm, but not a norm.

We can use these semi-norms to define a topology on $V$:

Definition 1.1. Given a family of semi-norms $(\rho_i)_{i \ I}$, define $W_{i_1,\ldots,i_n,} := \bigcap_{1 \leq j \leq n} \{x \quad V : \rho_j(x) <$ $\}$. Define the family $\tau$ as the collection of all $U$ satisfying the following condition:

"Given $x$ $U$, there is some $W_{i_1,\ldots,i_n,}$ such that $x + W_{i_1,\ldots,i_n,}$ $U$

Then $\tau$ is a topology for $V$, called the locally convex topology of $V$ associated with the semi-norms $\rho_i$.

♣

We need to check that this is in fact a topology. Let us take an arbitrary union of open sets $U = \bigcup_{j \in J} U_j$. Hence, every $x \in U$ is contained in some $U_{j_0}$ for which there are $\varepsilon, i_1, ..., i_n$ such that $x + W_{i_1,...,i_n,\varepsilon} \subset U_{j_0} \subset U$, so $U$ is open.

Now, given two open sets $U_1, U_2$ and some $x \in U_1 \cap U_2$, there are $i_1, ..., i_n, \varepsilon_1$ and $j_1, ..., j_k, \varepsilon_2$ such that $x + W_{i_1,...,i_n,\varepsilon_1} \subset U_1$ and $x + W_{j_1,...,j_k,\varepsilon_2} \subset U_2$, and hence $x + W_{i_1,...,i_n,j_1,...,j_k,\min\{\varepsilon_1,\varepsilon_2\}} \subset U_1 \cap U_2$, so their intersection is open. Obviously, $V$ and $\emptyset$ are open, so $\tau$ is a topology.

If $U$ is open, then for each $x \in U$ we have some $W_{i_1(x),...,i_n(x),\varepsilon(x)}$ such that $x + W_{i_1(x),...,i_n(x),\varepsilon(x)} \subset U$. In special, $U = \bigcup_{\substack{x \in U \\ i_1(x),...,i_n(x) \in I \\ \varepsilon(x) > 0}} (x + W_{i_1(x),...,i_n(x),\varepsilon(x)})$ which implies that the sets $x + W_{i_1,...,i_n,\varepsilon}$ form a topological basis for the locally convex topology as defined before.

Example. For every $x \in V$ and $W_{i_1,...,i_n,\varepsilon}$, the set $x + W_{i_1,...,i_n,\varepsilon}$ is open. In fact, given $y \in x + W_{i_1,...,i_n,\varepsilon}$, then $y = x + z$ with $z \in W_{i_1,...,i_n,\varepsilon}$. Then $y + W_{i_1,...,i_n,\varepsilon - \max_k\{\rho_{i_k}(z)\}} \subset x + W_{i_1,...,i_n,\varepsilon}$, since every element of the set on the left is of the form $x + z + z_1$, with $z \in W_{i_1,...,i_n,\varepsilon}$ and $z_1 \in W_{i_1,...,i_n,\varepsilon - \max_k\{\rho_{i_k}(z)\}}$, and that $z + z_1 \in W_{i_1,...,i_n,\varepsilon}$, since for all $i_k$ we have $\rho_{i_k}(z + z_1) \leq \rho_{i_k}(z) + \rho_{i_k}(z_1) < \rho_{i_k}(z) + \varepsilon - \max_k\{\rho_{i_k}(z)\} < \varepsilon$.

Example. By the triangle inequality, we we have $W_{i_1,...,i_n,\varepsilon_1} + W_{i_1,...,i_n,\varepsilon_2} \subset W_{i_1,...,i_n,\varepsilon_1+\varepsilon_2}$.

By construction, each semi-norm $\rho_i$ is continuous and moreover $V$ is a topological vector space if we endow $V$ with this topology:

Proposition 1.1. Endowing $V$ with a locally convex topology, then the maps $V \times V \ni (x, y) \to x + y \in V$ and $k \times V \ni (\alpha, x) \to \alpha x \in V$ are continuous.

Proof. Take any open $U \subset V$, so we need to verify that the sets $W_1 := \{(x, y) \in V \times V : x + y \in U\}$ and $W_2 := \{(\alpha, x) \in k \times V : \alpha x \in U\}$ are open in $V \times V$ and $k \times V$ respectively.

Let $(x, y) \in W_1$. We need to find open sets $V_1, V_2 \subset V$ such that $(x, y) \in V_1 \times V_2 \subset W_1$. Since $x + y \in U$ and $U$ is open, there is some $W_{i_1,...,i_n,\varepsilon}$ such that $(x + y) + W_{i_1,...,i_n,\varepsilon} \subset U$. Pick $V_1 := x + W_{i_1,...,i_n,\frac{\varepsilon}{2}}$ and $V_2 := y + W_{i_1,...,i_n,\frac{\varepsilon}{2}}$, so that $x \in V_1, y \in V_2$ and, for all $(\overline{x}, \overline{y}) \in V_1 \times V_2$ we have:

$$\overline{x} + \overline{y} \in (x + W_{i_1,...,i_n,\frac{\varepsilon}{2}}) + (y + W_{i_1,...,i_n,\frac{\varepsilon}{2}}) \subset x + y + W_{i_1,...,i_n,\varepsilon} \subset U$$

Therefore $\overline{x} + \overline{y} \in W_1$, so $V_1 \times V_2 \subset W_1$, as we wanted. The case for $W_2$ is similar.

□

As an application, define $T_y : V \to V$ by $T_y(x) := x - y$, which is continuous. Then the map $(\rho_i \circ T_y)(x) = \rho_i(T_y(x)) = \rho_i(x - y)$ is continuous. Hence, for each $i \in I$ and $\varepsilon > 0$ the set $\{x \in V : \rho_i(x - y) < \varepsilon\}$ is open in $V$.

The next lemma gives a condition on the semi-norms to guarantee $V$ is Hausdorff:

Lemma 1.2. If the semi-norms $\rho_i$ separate points in the sense that:

$$x \neq 0 \implies \exists i \in I : \rho_i(x) > 0$$

Then $V$ is a Hausdorff space. Reciprocally, if $V$ is Hausdorff then the semi-norms $\rho_i$ separate points.

Proof. For any distinct $x, y \in V$, we have $x - y \neq 0$ and hence there is some $i \in I$ satisfying $\rho_i(x-y) > 0$ and in special there is $\varepsilon > 0$ such that $\rho_i(x-y) = 2\varepsilon$. Choose $U_x := \{z \in V : \rho_i(x-z) < \varepsilon\}$ and $U_y := \{z \in V : \rho_i(y-z) < \varepsilon\}$. Then, both sets are open, $x \in U_x$, $y \in U_y$ and the sets are disjoint: if there were some $z \in U_x \cap U_y$, we would have:

$$\rho_i(x-y) = \rho_i(x-z+z-y) \leq \rho_i(x-z) + \rho_i(y-z) < 2\varepsilon$$

A contradiction. Now, suppose $V$ is Hausdorff and pick some $x \in V$ such that $\rho_i(x) = 0$, for all $i \in I$. If $x \neq 0$ was the case, then by hypothesis there would be indices $i_1, ..., i_n$ and $j_1, ..., j_m$ and positive real numbers $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$ such that $0 \in W_{i_1,...,i_m,\varepsilon_1}$, $x \in x + W_{j_1,...,j_m,\varepsilon_2}$ and $W_{i_1,...,i_m,\varepsilon_1} \cap (x + W_{j_1,...,j_m,\varepsilon_2}) = \emptyset$ (in special, $x \notin W_{i_1,...,i_m,\varepsilon_1}$). Since $\rho_i(x) = 0$ for all $i \in I$, then $x \in W_{i_1,...,i_m,\varepsilon_1}$ and hence a contradiction. Thus $x = 0$, ending the proof.

□

It goes without saying that Hausdorff topologies are always preferred. In our case, however, the importance is even greater as Hausdorff locally convex topologies are metrizable:

Proposition 1.3. If $\{\rho_i\}_{i \in I}$ is a countable family of semi-norms such that $V$ is Hausdorff with respect to their locally convex topology, then $d : V \times V \to [0, +\infty[$ given by:

$$d(x,y) := \sum_{i=1}^{\infty} 2^{-i} \frac{\rho_i(x-y)}{1+\rho_i(x-y)}$$

Is a metric whose induced topology coincides with the one on $V$.

Proof. All the metric axioms except the triangle inequality and the property $d(x,y) = 0$ implies $x = y$ are trivial. To see the triangle inequality, note that the function $x \mapsto \frac{x}{1+x}$ is increasing, therefore if $x \leq y$ then $\frac{x}{1+x} \leq \frac{y}{1+y}$. Now, given $x, y, z \in V$ we have $\rho_i(x-y) = \rho_i(x-z+z-y) \leq \rho_i(x-z) + \rho_i(z-y)$ which implies the following:

$$\begin{aligned} d(x,y) &= \sum_{i=1}^{\infty} 2^{-i} \frac{\rho_i(x-y)}{1+\rho_i(x-y)} \leq \sum_{i=1}^{\infty} 2^{-i} \frac{\rho_i(x-z)+\rho_i(z-y)}{1+\rho_i(x-z)+\rho_i(z-y)} \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} 2^{-i} \frac{\rho_i(x-z)}{1+\rho_i(x-z)+\rho_i(z-y)} + \sum_{i=1}^{\infty} 2^{-i} \frac{\rho_i(z-y)}{1+\rho_i(x-z)+\rho_i(z-y)} \\ &\leq \sum_{i=1}^{\infty} 2^{-i} \frac{\rho_i(x-z)}{1+\rho_i(x-z)} + \sum_{i=1}^{\infty} 2^{-i} \frac{\rho_i(z-y)}{1+\rho_i(z-y)} = d(x,z) + d(z,y) \end{aligned}$$

Suppose we have now $d(x,y) = 0$. Then since every term in the series is non-negative, the only option is $\frac{\rho_i(x-y)}{1+\rho_i(x-y)} = 0$ for all $i \in I$, which implies directly $\rho_i(x-y) = 0$ for all $i \in I$. Since $V$ is Hausdorff, then the semi-norms separate points, so $x - y = 0$, as we wanted.

At last, let us see why the topologies coincide. First we pick a ball $B(x_0, \varepsilon)$ in the metric topology and prove it is open in the locally convex topology. Take any $x \in B(x_0, \varepsilon)$ and some $r = r(\varepsilon, x_0) > 0$ such that $B(x, r) \subseteq B(x_0, \varepsilon)$. Let $N = N(\varepsilon, x_0) > 0$ be any integer such that

$\sum\limits_{i \geq N+1} 2^{-i} < \frac{r}{2}$. It is enough to prove $x + W_{1,2,...,N,\alpha} \quad B(x, r)$, where $\alpha > 0$ will be chosen appropriately later. In fact, for all $y \quad x + W_{1,2,...,N,\alpha}$ we have $y = x + z$, with $z \quad W_{1,2,...,N,\alpha}$ and hence $\rho_1(z), ..., \rho_N(z) < \alpha$. Hence:

$$d(y, x) = \sum_{i=1}^{N} 2^{-i} \frac{\rho_i(z)}{1 + \rho(z)} + \sum_{i \geq N+1} 2^{-i} \frac{\rho_i(z)}{1 + \rho(z)} \leq \frac{\alpha}{1 + \alpha} \sum_{i=1}^{N} 2^{-i} + \frac{r}{2}$$

Therefore, we only need to chose $\alpha > 0$ such that $\frac{\alpha}{1+\alpha} \sum\limits_{i=1}^{N} 2^{-i} < \frac{r}{2}$. Defining $S := \sum\limits_{i=1}^{N} 2^{-i}$, then $S$ depends only on $r$ and the inequality above is achieved if, and only if:

$$\frac{\alpha}{1 + \alpha} < \frac{r}{2S} \qquad \alpha < \frac{r}{2S} + \alpha \frac{r}{2S} \qquad \alpha < \frac{r/2S}{1 - r/2S} \qquad \alpha < \frac{r}{2S - r}$$

Of course, for small $\quad > 0$ we have $r > 0$ also small, so the term $2S$ is bigger than $r$ and the denominator is well-defined. This gives $x + W_{1,2,...,N,\alpha} \quad B(x, r)$, as we wanted.

Now we only need to show that every set $x + W_{i_1,...,i_n,}$ is open in the metric topology. This will be done in three steps:

1. Fix $i_j$. For each $\quad > 0$, there is $r = r(\quad) > 0$ such that $d(0, x) < r$ implies $\rho_{i_j}(x) < \quad$.

   In fact, from $2^{-i_j} \frac{\rho_{i_j}(x)}{1+\rho_{i_j}(x)} \leq \sum\limits_{i=1}^{\infty} 2^{-i} \frac{\rho_i(x)}{1+\rho_i(x)} = d(0, x)$ it follows that $\rho_{i_j}(x) \leq \frac{2^{i_j} d(x,0)}{1-2^{i_h} d(x,0)}$. The claim follows since $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x}{1-x} = 0$.

2. Fix $i_j$ and $\quad > 0$. If $x_0 \quad V$ is such that $\rho_{i_j}(x_0) < \quad$, then there is $r = r(x_0, \quad) > 0$ such that $d(y, x_0) < r$ implies $\rho_{i_j}(y) < \quad$.

   Set $\quad_1 := \quad - \rho_{i_j}(x_0) > 0$. Then, there is $r = r(\quad, x_0) > 0$ such that $d(0, z) < r$ implies $\rho_{i_j}(z) < \quad_1$. In special, if $d(y, x_0) < r$, then $d(0, x_0 - y) < r$, so that $\rho_{i_j}(x_0 - y) < \quad_1 = \quad - \rho_{i_j}(x_0)$. Rearranging, $\rho_{i_j}(y) \leq \rho_{i_j}(x_0) + \rho_{i_j}(x_0 - y) < \quad$, as wanted.

3. For each $x_0 \quad W_{i_1,...,i_n,}$, there is some $r = r(x_0, \quad) > 0$ such that $B(x_0, r) \quad W_{i_1,...,i_n,}$.

   Since $x_0 \quad W_{i_1,...,i_n,}$, then $\rho_{i_1}(x_0), ..., \rho_{i_n}(x_0) < \quad$. There are $r_{i_1}, ..., r_{i_n} > 0$ depending only on $x_0$ and $\quad$ such that $d(y, x_0) < r_{i_j}$ implies $\rho_{i_j}(y) < \quad$. Defining $r := \min\{r_{i_1}, ..., r_{i_n}\}$, then $d(y, x_0) < r$ implies $d(y, x_0) < r_{i_1}, ..., r_{i_n}$ and hence $\rho_{i_1}(y), ..., \rho_{i_n}(y) < \quad$. In special, $B(x_0, r) \quad W_{i_1,...,i_n,}$, as wanted.

4. Each set $x + W_{i_1,...,i_n,}$ is open in the metric topology.

   Pick any $y_0 \quad x + W_{i_1,...,i_n,}$, so that $y_0 = x + z$ with $z \quad W_{i_1,...,i_n,}$. There is some $r = r(y_0, \quad)$ such that $B(z, r) \quad W_{i_1,...,i_n,}$ and hence $x + B(z, r) \quad x + W_{i_1,...,i_n,}$. The claim follows since $x + B(z, r) = B(x + z, r) = B(y_0, r)$.

   Therefore, the topologies coincide.

$\square$

Our main result in this section can now be stated: if $(\rho_i)_{i \in I}$ is a countable collection of semi-norms separating points, then the locally convex topology $\tau$ in $V$ is metrizable. This fact will be useful in this text since in metric spaces a set is compact if, and only if it is sequentially compact.

Finally, in Hausdorff topologies limits are uniquely defined. As in any topological space, we say that a sequence $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converges to $x$ if for every open set $U \ni x$, there exists some $N \in \mathbb{N}$ sufficiently big such that $n \geq N$ implies $x_n \in U$. Without loss of generality, we can choose each $U$ being a basis element. We can translate the convergence of sequence in terms of the semi-norms as follows:

**Proposition 1.4.** A sequence $x_n$ converges to $x$ in the locally convex topology of $V$ defined by the semi-norms $(\rho_i)_{i \in I}$ if, and only if $\lim\limits_{n \to \infty} \rho_i(x - x_n) = 0$, for every $i \in I$.

*Proof.* Suppose $x_n \to x$ and let $i \in I$ and $\epsilon > 0$ be given. Then, $x + W_{i,\epsilon}$ is an open set containing $x$, so there is some $N > 0$ such that $n \geq N$ implies $x_n \in x + W_{i,\epsilon}$, i.e, $x_n = x + y$, with $y \in W_{i,\epsilon}$. In special, $\rho_i(x - x_n) = \rho_i(y) < \epsilon$ for $n \geq N$, which is the same as $\lim\limits_{n \to \infty} \rho_i(x - x_n) = 0$.

Suppose now $\lim\limits_{n \to \infty} \rho_i(x - x_n) = 0$ for all $i \in I$ and pick any basis element $x + W_{i_1,\dots,i_k,\epsilon}$ containing $x$. For this $\epsilon > 0$, there are $N_{i_1}, \dots, N_{i_k} > 0$ such that $n \geq N_{i_j}$ implies $\rho_{i_j}(x - x_n) < \epsilon$. Let $N := \max\{N_{i_1}, \dots, N_{i_k}\}$, so $n \geq N$ implies $n \geq N_{i_1}, \dots, N_{i_k}$ so that $\rho_{i_1}(x - x_n), \dots, \rho_{i_k}(x - x_n) < \epsilon$. Finally, for $n \geq N$ this implies that $x_n \in x + W_{i_1,\dots,i_k,\epsilon}$, since $x_n = x + (x_n - x)$ and $\rho_{i_j}(x_n - x) < \epsilon$ for $1 \leq j \leq k$.

□

## 1.2 Compact-Open Topology

Let $U \subset \mathbb{C}^n$ be any open set and let $\mathcal{C}(U)$ be the family of all continuous maps $f : U \to E$, where $E$ is some Banach space. Define the family of semi-norms $\rho_K : \mathcal{C}(U) \to \mathbb{R}$ indexed by all compact sets $K \subset U$ by:

$$\rho_K(f) := \sup_{x \in K} ||f(x)||_E$$

The supremum is well-defined since continuous maps in compact sets are bounded and all the properties of semi-norms are readily verified. Moreover, this family of semi-norms even separates points: if $\rho_K(f) = 0$ for all compact $K \subset U$, then since points are compact we would get $||f(x)||_E = \rho_{\{x\}}(f) = 0$ so that $f(x) = 0$, for every $x \in U$ and hence $f \equiv 0$. However, to apply proposition 1.3 we would require the additional property of countability of the family $(\rho_K)$, which is false in general. To fix this problem we introduce the notion of compact exhaustions:

Let $X$ be any topological space. A compact exhaustion of some open $U \subset X$ is a sequence of compact sets $\hat{K}_U = (K_i)_{i \in \mathbb{N}}$ satisfying the following requirements:

1. $U = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} K_i$;

2. $K_i \subset \mathring{K}_{i+1}$, for all $i \geq 1$.

In $\mathbb{C}^n$ it happens that every open set admits a compact exhaustion with an "additional property":

**Lemma 1.5.** Every open $U \subset \mathbb{C}^n$ admits a compact exhaustion $(K_i)_{i \in \mathbb{N}}$ such that every compact set $K \subset U$ is contained in some $K_{i_K}$, for $i_K \in \mathbb{N}$.

Proof. Define $K_i := \{x \quad U : x \quad B[0,i]$ and $d(x, U^c) \geq \frac{1}{i}\}$. Each $K_i$ is the intersection of two closed sets contained in some closed ball. Since in $\mathbb{C}^n$ all closed balls are compact, then each $K_i$ is a closed set contained in some compact set, and hence compact itself.

Moreover, defining $V_i := \{x \quad U : x \quad B(0,i)$ and $d(x, U^c) > \frac{1}{i}\}$, then $K_i \quad V_i \quad K_{i+1}$. Since $V_i$ is open, then each $x \quad K_i$ is contained in $V_i$ and hence in some open ball contained in $V_i \quad K_{i+1}$. Thus, $K_i \quad \mathring{K}_{i+1}$.

Since each $U^c$ is closed, then for each $x \quad U$ we have $d(x, U^c) > 0$. Hence, there is some $i_x \quad \mathbb{N}$ such that $d(x, U^c) \geq \frac{1}{i_x}$. Moreover, there is $i_0 \quad \mathbb{N}$ big enough so that $x \quad B[0, i_0]$, so choosing $i_1 := \max\{i_x, i_0\}$ we have $x \quad K_{i_1}$ and hence $U \quad \bigcup_{i=1}^{\infty} K_i$. The other inclusion is trivial since each $K_i$ is contained in $U$.

This proves that $(K_i)_{i \quad \mathbb{N}}$ is a compact exhaustion of $U$. The special property is proved as follows: by properties (1) and (2) we have $U = \bigcup_{i=1}^{\infty} \mathring{K}_i$. Then, for each compact $K \quad U$ the family $(\mathring{K}_i)_{i \quad \mathbb{N}}$ is an open covering of $K$. By compactness, we have $K \quad \mathring{K}_{i_1} \quad ... \quad \mathring{K}_{i_K} \quad K_{i_1} \quad ... \quad K_{i_K}$. Since the sequence $K_i$ is increasing by property (2), then the last union is just $K_{i_K}$ and hence $K \quad K_{i_K}$.

□

As noted, the "special property" is actually satisfied for every compact exhaustion of $U$. We then define the compact-open topology as follows:

Definition 1.2. Let $U \quad \mathbb{C}^n$ be open and let $(K_i)_{i \quad \mathbb{N}}$ be a compact exhaustion of $U$. The locally convex topology on $\mathcal{C}(U)$ (as continuous maps between $U$ and some fixed Banach space $E$) generated by the semi norms:

$$\rho_{K_i} : \mathcal{C}(U) \to \mathbb{R}$$
$$f \to \sup_{x \quad K_i} ||f||_E$$

Is independent of the compact exhaustion and is called the compact-open topology on $\mathcal{C}(U)$. ♣

Let us show that the topology is in fact independent of the compact exhaustion. Let $\hat{K}_U$ and $\hat{C}_U$ be two compact exhaustions of $U$. First we show that each $W_{\hat{K}_U, i_1, \ldots, i_n,}$ is open in the topology defined by $\hat{C}_U$. Pick some $f \quad W_{\hat{K}_u, i_1, \ldots, i_n,}$, so that $\rho_{K_{i_j}}(f) <$ , for all $1 \leq j \leq n$, and in special $\max_{1 \leq j \leq n}\{\rho_{K_{i_j}}(f)\} <$ . We need to find indices $j_1, \ldots, j_m$ and some $_1 = \ _1(f) > 0$ such that $f + W_{\hat{C}_U, j_1, \ldots, j_m, \ 1} \quad W_{\hat{K}_U, i_1, \ldots, i_n,}$ .

In fact, each compact $K_{i_k}$ is contained in some $C_{j_k}$, so for each $i_k$ we pick the corresponding $j_k$ and set $_1 = \quad - \max_{1 \leq j \leq n}\{\rho_{K_{i_j}}(f)\} > 0$. Every $g \quad f + W_{C, j_1, \ldots, j_n, \ 1}$ is such that $g = f + h_g$, with $h_g \quad W_{C, j_1, \ldots, j_n, \ 1}$. Then, for all $1 \leq k \leq n$:

$$\rho_{K_{i_k}}(g) \leq \rho_{K_{i_k}}(f) + \rho_{K_{i_k}}(h_g) \leq \rho_{K_{i_k}}(f) + \rho_{C_{j_k}}(h_g) < \rho_{K_{i_k}}(f) + \quad - \max_{1 \leq j \leq n}\{\rho_{K_{i_j}}(f)\} \leq$$

Which implies $g \quad W_{\hat{K}_U, i_1, \ldots, i_n,}$ and hence $f + W_{\hat{C}_U, j_1, \ldots, j_m, \ 1} \quad W_{\hat{K}_U, i_1, \ldots, i_n,}$ , as we wanted. Since locally convex topologies have the property that the map $(x, y) \to x + y$ is continuous, then for each open $U$ the set $x + U$ is again open[1]. Thus, every element $f + W_{\hat{K}_U, i_1, \ldots, i_n,}$ of the basis

[1] $x + U$ is the image of $U$ by the homeomorphism $T_x(y) := x + y$.

of the topology generated by $\hat{K}_U$ is open in the topology generated by $\hat{C}_U$. We repeat the same argument to prove the converse, so both topologies must agree.

**Lemma 1.6.** The compact-open topology of $C(U)$ is metrizable.

*Proof.* Let $\hat{K}_U$ be any compact exhaustion of $U$. By proposition 1.3, we only need to check that the semi-norms $\rho_{K_i}$ separate points. Let $f \in C(U)$ be some continuous function such that $\rho_{K_i}(f) = 0$, for all $i \geq 1$. Given any $x \in U$, we pick some $i_0$ such that $x \in K_{i_0}$. Then $||f(x)||_E \leq \sup_{y \in K_{i_0}} ||f(y)||_E = \rho_{K_{i_0}}(f) = 0$ and therefore $f(x) = 0$. Since this was done for an arbitrary $x \in U$, it follows that $f \equiv 0$.

□

In terms of limits, the compact-open topology has the important characterization:

**Proposition 1.7.** A sequence $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset C(U)$ converges to $f$ in the compact-open topology if, and only if for every compact $K \subset U$ we have $f_n\big|_K \to f\big|_K$ uniformly.

*Proof.* Let $\hat{K}_U = (K_i)_{i \in I}$ be a compact exhaustion of $U$. Suppose first $f_n \to f$ in the compact-open topology and pick any compact $K \subset U$. There is some $i_0$ such that $K \subset K_{i_0}$. Then:

$$\sup_{x \in K} ||f(x) - f_n(x)||_E \leq \sup_{x \in K_{i_0}} ||f(x) - f_n(x)||_E = \rho_{K_{i_0}}(f - f_n) \to 0$$

So $f_n|_K \to f|_K$ uniformly. If now for every compact $K$ we have $f_n|_K \to f|_K$ uniformly, then in special $\sup_{x \in K_i} ||f(x) - f_n(x)||_E \xrightarrow{n \to \infty} 0$ for every $i \in \mathbb{N}$, which is the same as $\lim_{n \to \infty} \rho_{K_i}(f - f_n) = 0$.

□

The last proposition is why the compact-open topology is called the topology of compact convergence.

## 1.3 Montel's Theorem

Having a nice topology on $C(U)$, we will investigate compactness on $\mathcal{O}(U)$ endowed with the subspace topology, in the special case $U \subset \mathbb{C}^n$. This will be done by proving Montel's theorem, a generalization of the Heine-Borel theorem for the compact-open topology.

Some definitions will be necessary:

**Definition 1.3.** Let $X$ be a metric space and $E$ any Banach space. Let $\mathcal{F}$ be any set of continuous functions $f : U \to E$, with $U \subset X$ open. Then:

- $\mathcal{F}$ is *bounded* if for every compact $K \subset U$ there is a constant $M_K \geq 0$ such that:

$$\sup_{f \in \mathcal{F}} \sup_{x \in K} ||f(x)||_E \leq M_K$$

  For every $f \in \mathcal{F}$.

- $\mathcal{F}$ is called *equicontinuous* if for every $\epsilon > 0$ there is $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ such that:

$$||f(x) - f(y)||_E < \epsilon$$

  For every $x, y \in U$ such that $d(x, y) < \delta$ and for every $f \in \mathcal{F}$.

- $\mathcal{F}$ is called locally bounded if for every $a \in U$ there is some open $V \ni a$ such that $\mathcal{F}|_V$ is bounded, and $\mathcal{F}$ is called locally equicontinuous if for every $a \in U$ there is $V \ni a$ such that $\mathcal{F}|_V$ is equicontinuous.

♣

It follows that if $\mathcal{F}$ is locally bounded, then so is $\overline{\mathcal{F}}$ when we endow this set with the compact-open topology. In fact, for any $a \in U$ we pick $V \ni a$ open such that $\mathcal{F}|_V$ is bounded. Then, for any compact $K \subset V$ and $f \in \overline{\mathcal{F}}$ we may write $f = \lim_{n\to\infty} f_n$, where the limit is of compact convergence. There is a constant $M_K \geq 0$ such that $\sup_{x\in K} ||f_n(x)||_E \leq M_K$, for every $n \geq 1$ and therefore $\sup_{x\in K} ||f(x)||_E \leq M_K$, so every $f \in \overline{\mathcal{F}}$.

Of course, every equicontinuous $\mathcal{F}$ is such that $\mathcal{F} \subset \mathcal{C}(U)$. In the very special case of holomorphic functions, local boundness is sufficient to ensure local equicontinuity:

**Proposition 1.8.** For $E = \mathbb{C}^m$ and $U \subset \mathbb{C}^n$ open, a locally bounded family $\mathcal{F} \subset \mathcal{O}(U)$ is locally equicontinuous.

*Proof.* We will work with the maximum norm on $E$. Pick any $a \in U$, so by local boundness there is some open neighborhood $V \ni a$ such that $\mathcal{F}|_V$ is bounded. Choose $r > 0$ such that $\overline{P_r(a)} \subset V$, so there is a constant $M \geq 0$ such that $||f|_{\overline{P_r(a)}}||_\infty \leq M$, for all $f \in \mathcal{F}$. Here, $P_r(a) := \{z \in U : ||z-a||_\infty \leq r\}$ and later we shall use $T_r(a) := \{z \in U : |z_k - a_k| = r, \text{ for all } 1 \leq k \leq n\}$.

Fix $K := \overline{P_{\frac{r}{2}}(a)}$. By the Mean Value Theorem for $\mathbb{R}^{2n}$, we have, for any $f \in \mathcal{F}$:

$$||f(x) - f(y)||_\infty \leq ||x-y||_\infty \sup_{z\in K} ||Df_z||$$

Where $||Df_z|| = \sup_{||x||_\infty = 1} ||Df_z(x)||_\infty$ is the operator norm. The main step in the proof is to estimate the operator norm using the Cauchy Integral Formula. We have:

$$Df_z(x) = \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f_1}{\partial z_k} x_k, ..., \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f_m}{\partial z_k} x_k\right)$$

Assume without loss of generality that the maximum in the definition of $||\cdot||_\infty$ is achieved in the first entry. Fixing $x$ such that $||x||_\infty = 1$ and $z \in K$, we get:

$$\begin{aligned}\max_{1\leq l\leq m} \left| \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f_l}{\partial z_k}(z) x_k\right) \right| &= \left|\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f_1}{\partial z_k}(z) x_k\right| \\ &\leq \sum_{k=1}^{n} \left|\frac{\partial f_1}{\partial z_k}(z) x_k\right| \leq n \max_{1\leq k\leq n} \left|\frac{\partial f_1}{\partial z_k}(z)\right|\end{aligned}$$

Taking the supremum in $||x||_\infty = 1$ we have $||Df_z|| \leq n \max_{1\leq k\leq n} \left|\frac{\partial f_1}{\partial z_k}(z)\right|$. To estimate $\left|\frac{\partial f_1}{\partial z_k}(z)\right|$ we first remember that we are only interested in $z \in K = \overline{P_{\frac{r}{2}}}(a)$. For $\xi \in T_r(a)$, the estimate $|\xi_k - z_k| \geq \frac{r}{2}$ holds and Cauchy's Integral Formula reads:

$$\frac{\partial f_1}{\partial z_k}(z) = \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^n \int_{T_r(a)} \frac{f(\xi)}{(\xi_1 - z_1)...(\xi_k - z_k)^2...(\xi_n - z_n)} d\xi$$

The norm of the above is easily seen to be bounded by an expression of the form $\frac{CM}{r}$, where $C$ is some constant. In special, $\sup_{z\in K} ||Df_z|| \leq n\frac{CM}{r}$. Given any $\varepsilon > 0$ and choosing $\delta := \frac{r\varepsilon}{nCM}$, for any $f \in \mathcal{F}$ we have $||f(x) - f(y)||_\infty \leq \varepsilon$, given that $||x-y||_\infty < \delta$.

□

We now state Arzelà-Ascoli's theorem for $\mathbb{C}^n$:

**Theorem 1.9** (Arzelà-Ascoli). Let $K \quad \mathbb{C}^n$ be compact and $E$ be any finite dimensional Banach space. Suppose $\mathcal{F} \quad C(K)$ is equicontinuous. Then, any bounded sequence $(f_n)_{n \quad \mathbb{N}} \quad \mathcal{F}$ contains a subsequence converging uniformly on $K$.

**Corollary 1.9.1.** Given an open $U \quad \mathbb{C}^n$ and a locally bounded and locally equicontinuous sequence $(f_n)_{n \quad \mathbb{N}}$, then there is a subsequence converging locally uniformly.

*Proof.* Set $\mathcal{F} := \{f_1, f_2, ...\}$. Pick some small open neighborhood $V$ of $U$ where $\mathcal{F}|_V$ is both equicontinuous and bounded. Since $\mathbb{C}^n$ is locally compact, we can shrink $V$ if necessary to ensure that $\overline{V} \quad U$ and $\overline{V}$ is compact. We then apply the Arzelà-Ascoli theorem on $\overline{V}$.

□

**Corollary 1.9.2.** Every locally bounded sequence $(f_n)$ of holomorphic maps $f : U \to \mathbb{C}^m$ admits a convergent subsequence in $C(U)$ with the compact-open topology.

*Proof.* By proposition 1.8, the sequence is locally equicontinuous. Then, our last corollary implies that for each $a \quad U$ there is an open neighborhood $V_a \quad a$ such that $f_n|_{V_a}$ converges uniformly to some function $f_{V_a} : V_a \to \mathbb{C}^m$. We then define the global map $f : U \to \mathbb{C}^m$ by $f|_{V_x} := f_{V_x}$ and note that this map is well-defined (since limits are unique as the compact-open topology is Hausdor) and continuous, since for each $a \quad U$ there is a neighborhood $V_a$ of $a$ such that $f|_{V_a} = f_{V_a}$ is continuous.

For any compact set $K \quad U$, choose points $a_1, ..., a_n \quad K$ such that $K \quad V_{a_1} \quad ... \quad V_{a_n}$. Let $\quad > 0$ and choose $N_1(\quad), ..., N_n(\quad) > 0$ such that $x \quad V_{a_i}$ and $n \geq N_i$ implies $|f_n(x) - f(x)| < \frac{}{2}$.

For $N = \max\{N_1, ..., N_n\}$, we have $x \quad K$ and $n \geq N$ implies $|f_n(x) - f(x)| < \quad$, since $x$ is in some $V_i$. Hence, $f_n \to f$ uniformly in compact sets.

□

**Theorem 1.10** (Montel). Let $U \quad \mathbb{C}^n$ be open and consider any family $\mathcal{F}$ of holomorphic maps $f : U \to \mathbb{C}^m$. Then, the following are equivalent:

1. $\mathcal{F}$ is locally bounded in $C(U)$;
2. The family $\mathcal{F}$ is relatively compact on $\mathcal{O}(U)$.

*Proof.* $(1) = \quad (2)$: If $\mathcal{F}$ is locally bounded, so is $\overline{\mathcal{F}}$. Thus, any sequence $(f_n) \quad \overline{\mathcal{F}}$ is locally bounded and hence by the last corolary there is a converging subsequence. Thus, $\overline{\mathcal{F}}$ is sequentially compact. Since the compact-open topology is metrizable, this implies that $\overline{\mathcal{F}}$ is compact.

$(2) = \quad (1)$: Fix an exhaustion $\hat{K}_U$. For any compact $K \quad U$, let $K_0$ be any compact set in the exhaustion containing $K$. Then, the map $\phi : \overline{\mathcal{F}} \to [0, +\infty)$ given by $\phi(f) = \rho_{K_0}(f) = \sup_{x \quad K_0} ||f(x)||$ is continuous since the semi-norms defining the locally convex topology are all continuous. Since $\overline{\mathcal{F}}$ is compact by assumption, then $\phi(\overline{\mathcal{F}})$ is compact in $[0, +\infty)$ and hence bounded. In special:

$$\sup_{f \quad \mathcal{F}} \sup_{x \quad K} ||f(x)|| \leq \sup_{f \quad \overline{\mathcal{F}}} \sup_{x \quad K_0} ||f(x)|| < +\infty$$

So $\mathcal{F}$ is locally bounded.

□

# 2 The Riemman Mapping Theorem

## 2.1 Biholomorphic and Proper Mappings

Let $U$ $C^n$ be open and consider any holomorphic $f : U \to C^m$. Then $f$ is biholomorphic if $f(U)$ is open and $f$ is a bijection onto its image with an holomorphic inverse $f^{-1} : f(U) \to U$. We have the following lemma:

Lemma 2.1. Let $U$ $C^n$ be open and consider a biholomorphic map $f : U \to C^m$. Then $m = n$ and $\det Df_a = 0$ for all $a$ $U$.

Proof. We have $m = n$ since the di□erential is an isomorphism between vector spaces.

Since $1 = \det \mathrm{id}_{C^n} = (\det Df^{-1}_{f(a)})(\det Df_a)$, then $\det Df_a = 0$, as wanted. Another way to see

□

A map $f : U \to V$ with open $U$ $C^n$ and $V$ $C^m$ is proper if it is continuous and $f^{-1}(K)$ is compact, for all compact $K$ $V$. We say that a sequence $(z_n)$ $U$ escapes to infinity if every compact set $K$ contains finitely many terms of $(z_n)$ in the sense[2] that $|\{n \quad N : z_n \quad K\}| < \infty$. From now on, every time we say "$K$ contains finitely many $n$ such that $z_n$ $K$", we really mean "there are finitely many $n$ N such that $z_n$ $K$". The next characterization will be useful:

Lemma 2.2. Let $f : U \to V$ be continuous. Then, $f$ is proper if, and only if for every sequence $(z_n)$ escaping to infinity on $U$, the sequence $(f(z_n))$ escapes to infinity on $V$.

Proof. Suppose $f$ is proper and pick a sequence $(z_n)$ escaping to infinity. Take any compact $K$ $V$ and suppose there are infinite terms $\{f(z_1), f(z_2), ...\}$ on $K$. But then $\{z_1, z_2, ...\}$ $f^{-1}(K)$ is infinite and $f^{-1}(K)$ is compact, so $(z_n)$ cannot escape to infinity, a contradiction. Thus, $(f(z_n))$ escapes to infinity on $V$.

Assume now that for all sequences $(z_n)$ escaping to infinity on $U$, the sequence $(f(z_n))$ escapes to infinity on $V$. Suppose there is some compact $K$ $V$, such that $f^{-1}(K)$ is not compact. Since $f$ is continuous, this would imply that $f^{-1}(K)$ is closed, but not compact and hence unbounded. We can now take a sequence $(z_n)$ $f^{-1}(K)$ such that $|z_n| \geq n$, for all $n \geq 1$. This sequence clearly escapes to infinity, so the sequence $(f(z_n))$ $K$ also escapes to infinity. Hence, there are only finitely many $f(z_n)$ $K$ and thus finitely many $z_n$ $f^{-1}(K)$[3], a contradiction.

□

Lemma 2.3. Let $U$ $C^n$ be open and $(z_n)$ be a convergent sequence in $\overline{U}$. Then $(z_n)$ $U$ escapes to infinity if, and only if $(z_n) \to \partial U$.

Proof. Suppose $(z_n)$ escapes to infinity and suppose $z_n \to z$ with $z$ $U$. Then the set $K := \{z_1, z_2, ...\}$ $\{z\}$ is compact, a contradiction since $K$ contains infinitely many terms of $(z_n)$. Since $z$ $\overline{U}$, it follows that $z$ $\partial U$.

Suppose now that $(z_n) \to \partial U$ and take any compact $K$ $U$. If there were infinite terms of $(z_n)$ in $K$, then there would be a converging subsequence $(z_{n_k}) \to z$ with $z$ $K$. But since $(z_n)$ is convergent and converges on $\partial U$, every subsequence would converge to the same limit in $\partial U$. Since $z$ / $\partial U$, this is a contradiction. Hence, there are finitely many terms on $K$ and $(z_n)$ escapes to infinity.

□

[2] We could instead require $|\{z_1, z_2, ...\} \cap K| < \infty$ for all compact $K$, but this would be a bad definition since any constant sequence would escape to infinity.

[3] We use here the fact that $|\{j \quad N : z_j \quad f^{-1}(K)\}| = |\{k \quad N : f(z_k) \quad K\}|$

## 2.2 Riemman's Theorem

For the rest of the section, we will fix the notations $B_1^n(0) := \{z \quad \mathrm{C}^n : ||z||_2 < 1\}$ and $P_1^n(0) := \{z \quad \mathrm{C}^n : ||z||_\infty < 1\}$. Hence, $B_1^n(0)$ is the euclidean unit open centered at the origin, and $P_1^n(0)$ is the unit polydisc. We will need to lemmas before the main theorem:

Lemma 2.4. Suppose $f : D \to \mathrm{C}^n$ is holomorphic, where $D \quad \mathrm{C}$ is open and connected. Then if $z \to ||f(z)||_2$ is constant, so is $f$.

Proof. Write $f = (f_1, ..., f_n)$. If $||f(z)||_2 = \sum_{j=1}^{n} f_j \overline{f_j}$ is constant, then deriving in $\overline{z}$ we get $\sum_{j=1}^{n} f_j \overline{f_j} = 0$. Deriving this last expression in $z$, we get $0 = \sum_{j=1}^{n} f_j \overline{f_j} = \sum_{j=1} |f_j|^2$, so each component $f_j$ is individually zero. Since our domain is connected, we have that $f$ is constant.

□

Lemma 2.5. Let $U \quad \mathrm{C}$ be open and $f_n : U \to \mathrm{C}^n$ be a sequence of holomorphic functions converging uniformly on compact sets to a holomorphic function $f : U \to \mathrm{C}^n$. Then $\frac{\partial f}{\partial z} = \lim_{n\to\infty} \frac{\partial f_n}{\partial z}$.

Proof. By doing computations component-wise, it is enough to show the theorem for $n = 1$. As the convergence is compact, it is also locally uniform. Let $z_0 \quad U$ be any and choose some open ball $B = B(z_0, \ )$ such that $\overline{B(z_0, \ )} \quad U$ and such that the convergence is uniform inside this ball.

By Cauchy's integral formula, $\frac{\partial f}{\partial z}(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial B} \frac{f(w)}{(z_0-w)^2}dw$. However, the map $w \to \frac{1}{(z_0-w)^2}$ is bounded on $\partial B$, and hence $\frac{f_n(w)}{(z_0-w)^2} \to \frac{f(w)}{(z_0-w)^2}$ uniformly on $\partial B$. We may then pass the limit outside the integral:

$$\frac{\partial f}{\partial z}(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial B} \frac{f(w)}{(z_0 - w)^2}dw = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial B} \frac{f_n(w)}{(z_0 - w)^2}dw = \lim_{n\to\infty} \frac{\partial f_n}{\partial z}$$

□

Theorem 2.6 (Riemann's Mapping Theorem). There is a biholomorphism $F : P_1^n(0) \to B_1^n(0)$ if, and only if $n = 1$.

Proof. For $n \geq 2$, assume there is a biholomorphic map $F : P_1^n(0) \to B_1^n(0)$. We will define two important maps:

- For every $w \quad P_1^1(0)$ define the map $F_w : P_1^{n-1}(0) \to \mathrm{C}^n$ by $z \to \partial_n F(z, w)$;
- Pick any sequence $(\hat{z}_j) \quad P_1^{n-1}(0)$ such that $\hat{z}_j \to \partial P_1^{n-1}(0)$ and define the maps $F_j : P_1^1(0) \to B_1^n(0)$ by $w \to F(\hat{z}_j, w)$.

Note that each $F_j$ is bounded above by $1$, since their image is contained in $B_1^n(0)$, and hence the family $\{F_j\}_{j\geq1}$ is uniformly bounded by $1$. Since the sequence is contained in $O(P_1^1(0), \mathrm{C}^n)$, we may apply Montel's theorem to assert the compactness of $\overline{\{F_1, F_2, ...\}}$. Hence, most certainly there is a convergent subsequence of $(F_j)_{j\geq1}$ in the closure, with respect to the compact-open topology. Call this subsequence $(F_{n_j})_{j\geq1}$ and remember that convergence in this topology is equivalent to compact convergence. As any sequence of holomorphic functions converging uniformly in compact sets, the limit function $\Phi : P_1^1(0) \to \overline{B_1^n(0)}$ is holomorphic. To simplify notation, we will assume that $\Phi = \lim_{j\to\infty} F_j$ in the compact-open topology.

Since $\hat{z_k}$ converges to the boundary $\partial P_1^{n-1}(0) = \{z \quad \mathrm{C}^n : |z_k| = 1, \text{ for some } 1 \leq k \leq n-1\}$, then the sequence $(\hat{z_k}, w)$ converges to $\partial P_1^n(0)$, for any $w \quad P_1^1(0)$. Set $a_w := \Phi(w) \quad \overline{B_1^n(0)}$, and let us prove $a_w \quad \partial B_1^n(0)$. Were this not the case, then $a_w \quad B_1^n(0)$ would be true, and:

$$\lim_{j \to \infty} (\hat{z_j}, w) = F^{-1} \lim_{j \to \infty} F(\hat{z_j}, w) = F^{-1}(a_w) \quad F^{-1}(B_1^n(0)) \quad P_1^n(0)$$

But we just argued $\lim\limits_{j \to \infty} (\hat{z_j}, w) \quad \partial P_1^n(0)$, therefore we would have $P_1^{n-1}(0) \cap \partial P_1^{n-1}(0) = \square$, a contradiction since $P_1^{n-1}(0)$ is open. This implies directly that $\Phi(P_1^1(0)) \quad \partial B_1^n(0)$. As such, the map $w \to ||\Phi(w)||_2$ is constant and equal to 1, but this already implies that $\Phi$ is constant! As such, one has:

$$0 = \Phi\,(w) = \lim_{j \to \infty} F_{n_j}(w) = \lim_{j \to \infty} F_w(\hat{z}_{n_j})$$

Since this is true for any sequence converging to the boundary, we can continuously extend $F_w$ to the boundary $P_1^{n-1}(0)$ by zero. By the Maximum Modulus Theorem, it follows that $F_w \equiv 0$. If $e_n = (0, 0, ..., 0, 1)$ is the last vector of the canonical basis for $\mathbb{C}^n$ and $z \quad P_1^{n-1}(0), w \quad P_1^1(0)$ are any, then:

$$0 = F_w(z) = \frac{\partial F}{\partial w}(z_1, ..., z_{n-1}, w) = \left(\frac{\partial F_1}{\partial w}(z_1, ..., z_{n-1}, w), ..., \frac{\partial F_n}{\partial w}(z_1, ..., z_{n-1}, w)\right) = DF_{(z,w)}(e_n)$$

Then, the last column of the Jacobian matrix of $F$ is zero, so $\det\big(DF_{(z,w)}\big) = 0$. But this cannot happen, since $F$ is biholomorphic.

$\square$

## 2.3 Cartan's Theorem

By our last theorem, one cannot guarantee a biholomorphism between any two open sets of $\mathbb{C}^n$. However, given a suitable generalization of the Schwarz Lemma, one can characterize biholomorphisms in many cases. This generalization is called Cartan's Theorem, and is proved in this section.

A polynomial $P : U \to \mathbb{C}$ with open $U \quad \mathbb{C}^n$ is homogeneous of degree $d$ if $P(sz) = s^d P(z)$, for all $z \quad U$ and $s \quad \mathbb{C}$. An example would be $P(z, w) = z^2 w + i w^3$, which is of degree $3$. A vector-valued polynomial $P : U \to \mathbb{C}^m$ is homogeneous of degree $d$ if each component is.

For every multi-index $\alpha$ with $|\alpha| < d$ and homogeneous polynomial $P$ of degree $d$, we have $D^\alpha P(0) = 0$. Let $U \quad \mathbb{C}^n$ be open, $a \quad U$ and $r \quad \mathbb{R}^n_{>0}$ be a polyradius such that $\overline{P_r(a)} \quad U$. On $P_r(a)$ we have the Taylor expansion of any holomorphic $f : U \to \mathbb{C}^m$ as follows:

$$f(z) = \sum_{\alpha \quad \mathbb{N}^n} \frac{D^\alpha f}{\alpha!}(a)(z - a)^\alpha, \quad z \quad P_r(a)$$

Moreover, we have Cauchy's estimates $|D^\alpha f(a)| \leq \frac{\alpha!}{r^\alpha} \sup\limits_{z \quad T_r(a)} ||f(z)||$.

Theorem 2.7 (Cartan's Theorem). Let $D \quad \mathbb{C}^n$ be a bounded domain, $f : D \to D$ holomorphic such that $f(a) = a$ and $Df_a = \mathrm{id}_D$ for some $a \quad D$. Then $f = \mathrm{id}_D$.

Proof. Without loss of generality, suppose $U \quad 0$ and $a = 0$. We can factor out the Taylor series for $f$ as:

$$f(z) = \sum_{k \geq 0} \sum_{|\alpha| = k} \frac{D^\alpha f}{\alpha!}(0) z^\alpha$$

This expansion is valid in some polydisc $P_r(0)$ such that $\overline{P_r(0)} \quad U$. The part of $k = 0$ is zero since $f(0) = 0$, and the part $k = 1$ equals:

$$\frac{\partial f}{\partial z_1}(0)z_1 + ... + \frac{\partial f}{\partial z_n}(0)z_n = \left(\frac{\partial f_1}{\partial z_1}(0)z_1, ..., \frac{\partial f_n}{\partial z_1}(0)z_1\right)^T + ... + \left(\frac{\partial f_1}{\partial z_n}(0)z_n, ..., \frac{\partial f_n}{\partial z_n}(0)z_n\right)^T$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial z_1}(0) & \frac{\partial f_1}{\partial z_2}(0) & ... & \frac{\partial f_1}{\partial z_n}(0) \\ . & & & . \\ . & & & . \\ . & & & . \\ \frac{\partial f_n}{\partial z_1}(0) & \frac{\partial f_n}{\partial z_2}(0) & ... & \frac{\partial f_n}{\partial z_n}(0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ . \\ . \\ . \\ z_n \end{pmatrix} = Df_0(z) = z$$

There can happen that the terms $k = 3, 4, ..., N - 1$ are all zero. In any case, we are able to write:

$$f(z) = z + p_N(z) + \sum_{k \geq N+1} \sum_{|\alpha|=k} \frac{D^\alpha f}{\alpha!}(0)z^\alpha$$

Defining $p_k(z) := \sum_{|\alpha|=k} \frac{D^\alpha f}{\alpha!}(0)z^\alpha$, then each $p_k$ is an homogeneous polynomial of degree $k$ and we get the expression $f(z) = z + p_N(z) + \sum_{k \geq N+1} p_k(z)$. In special, for any multi-index $\alpha$ with $|\alpha| = N$ we have $D^\alpha f(z) = D^\alpha p_N(z)$. Composing $f$ with itself we get the following expression:

$$f^2(z) = f(f(z)) = f(z + p_N(z) + \sum_{k \geq N+1} p_k(z))$$

$$= z + p_N(z) + \sum_{k \geq N+1} p_k(z) + p_N\left(z + p_N(z) + \sum_{k \geq N+1} p_k(z)\right) + \sum_{k \geq N+1} p_k\left(z + p_N(z) + \sum_{k \geq N+1} p_k(z)\right)$$

$$= z + 2p_N(z) + O(N+1)$$

Where $O(N+1)$ stands for homogeneous polynomials of order $\geq N+1$. Iterating this N times, we get $f\ (z) = z + \ p_N(z) + O(N+1)$. For any multi-index $\alpha$ with $|\alpha| = N$ we have $D^\alpha f\ (z) = \ D^\alpha p_N(z)$, since the derivative of order $N$ at zero of any homogeneous polynomial of order $\geq N+1$ vanish. But it was concluded before the equality $D^\alpha p_N(z) = D^\alpha f(z)$, and hence $D^\alpha f\ (0) = \ D^\alpha f(0)$.

Since $f$ maps $D$ to itself, so does $f^2, f^3, ..., f$. As a consequence, $\{f\ (z) : z \quad D\} \quad \{f(z) : z \quad D\}$, so $||f\ ||_\infty \leq ||f||_\infty$. Since $D$ is bounded, this argument shows that there is some $M \geq 0$, independent of , satisfying $||f\ ||_\infty \leq ||f||_\infty \leq M$. Therefore, by Cauchy's estimates:

$$\frac{\alpha!}{r^\alpha}M \geq ||D^\alpha f\ (0)|| = \ ||D^\alpha f(0)||$$

$$= \quad ||D^\alpha f(0)|| \leq \frac{\alpha!}{r^\alpha}M$$

Taking $\to \infty$, one sees that $D^\alpha f(0) = 0$, for all multi-index $\alpha$ such that $|\alpha| = N$. In special $p_N \equiv 0$. We can now write $f(z) = z + p_{N+1} + \sum_{k \geq N+2} p_k(z)$ and repeat the process to conclude $p_N = p_{N+1} = ... \equiv 0$, and hence $f(z) = z$ at least on $P_r(0)$. Now, $f$ and $\text{id}_D$ are analytic and equal on a small polydisc around the origin, so by analytic continuation they are equal on $D$. Hence, $f = \text{id}_D$.

□

A circular domain is a domain $U \quad \mathrm{C}^n$ such that $z \quad U$ implies $e^{i\theta}z \quad U$, for all $\theta \quad \mathrm{R}$. For example, polydiscs are circular domains.

Corollary 2.7.1. Let $D_1, D_2$ be bounded circular domains on $\mathrm{C}^n$ such that $0 \quad D_1 \cap D_2$ and $f : D_1 \to D_2$ is a biholomorphic mapping satisfying $f(0) = 0$. Then $f$ is linear.

Proof. Let $t \quad \mathrm{R}$ be any and define $F_t : D_1 \to D_2$ by $F_t(z) := f^{-1}(e^{-it}f(e^{it}z))$. Then $F_t(0) = 0$ as is easily seen. Moreover, letting $\rho_t := e^{it}z$, then $F_t = f^{-1} \circ (\rho_{-t}) \circ f \circ (\rho_t)$ and thus:

$$F_t = f^{-1} \circ (\rho_{-t}) \circ f \circ (\rho_t)$$

Of course, the Jacobians of the maps $\rho_t$ are diagonal and hence each $\rho_t$ is in the center of $GL(n, \mathrm{C})$. We may then commute them in the expression of $F_t$ as we like, ending up with $F_t = f^{-1} \circ f = \mathrm{id}$, since $\rho_{-t} = (\rho_t)^{-1}$. We are then in the hypothesis of Cartan's uniqueness theorem, so $F_t(z) = z$. This implies directly $e^{it}f(z) = f(e^{it}z)$.

In a small polydisc $P_r(0)$ such that $\overline{P_r(0)} \quad D_1 \cap D_2$ we may write $f(z) = \sum_{j \geq 0} p_j(z)$, where each $p_j$ is an homogeneous polynomial of degree $j$. Consider the next two equalities:

$$f(e^{it}z) = e^{it}\sum_{j \geq 0} p_j(z) = \sum_{j \geq 0} e^{it}p_j(z)$$

$$f(e^{it}z) = \sum_{j \geq 0} p_j(e^{it}z) = \sum_{j \geq 0} e^{itj}p_j(z)$$

Which implies without trouble $0 = \sum_{j \geq 0}(e^{itj} - e^{it})p_j(z) = \sum_{j \geq 0} p_j(z)e^{it}(e^{i(j-1)t} - 1)$. Hence, for $j = 1$ we must have $p_j \equiv 0$, so $f = p_1$, at least on $P_r(0)$. By analytic continuation, $f = p_1$ on $D_1$ and hence the linearity follows.

□

As an application, let us characterize all biholomorphisms $f : P_1^n(0) \to P_1^n(0)$. We will prove that every such biholomorphism is of the form:

$$f(z) = P\left(e^{i\theta_1}\frac{z_1 - a_1}{1 - \overline{a_1}z_1}, e^{i\theta_2}\frac{z_2 - a_2}{1 - \overline{a_2}z_2}, ..., e^{i\theta_n}\frac{z_n - a_n}{1 - \overline{a_n}z_n}\right)$$

Where $a \quad P_1^n(0)$, $\theta \quad \mathrm{R}^n$ and $P$ is a permutation matrix. Take $\alpha \quad P_1^n(0)$ such that $f(\alpha) = 0$ and define $\phi_a(z) := \left(\frac{z_1 - a_1}{1 - \overline{a_1}z_1}, \frac{z_2 - a_2}{1 - \overline{a_2}z_2}, ..., \frac{z_n - a_n}{1 - \overline{a_n}z_n}\right)$. The map $\phi_\alpha$ satisfies the following properties:

- $\phi_\alpha : P_1^n(0) \to P_1^n(0)$ is a biholomorphism;
- $(\phi_\alpha)^{-1} = \phi_{-\alpha}$.

Set $g := f \circ \phi_\alpha$, and note that $g(0) = 0$. Since $g : P_1^n(0) \to P_1^n(0)$ is linear, let $(b_{ij})_{ij}$ be it's matrix, where each $b_{ij}$ is a complex number. Let $z^{ik} := \left((1 - \frac{1}{k})\frac{\overline{b_{i1}}}{|b_{i1}|}, ..., (1 - \frac{1}{k})\frac{\overline{b_{in}}}{|b_{in}|}\right)$ so that $|z^{ik}| < 1$ for all $1 \leq i \leq n$ and $k \geq 1$. This implies $z^{ik} \quad P_1^n(0)$, so $g(z^{ik})$ makes sense and moreover:

$$g(z^{ik}) = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & ... & b_{1n} \\ . & & & . \\ . & & & . \\ . & & & . \\ b_{n1} & b_{n2} & ... & b_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (1 - \frac{1}{k})\frac{\overline{b_{i1}}}{|b_{i1}|} \\ (1 - \frac{1}{k})\frac{\overline{b_{i2}}}{|b_{i2}|} \\ . \\ . \\ . \\ (1 - \frac{1}{k})\frac{\overline{b_{in}}}{|b_{in}|} \end{pmatrix}$$

The $i$'th component of $g(z^{ik})$ is $(1-\frac{1}{k})|b_{i1}|+...+(1-\frac{1}{k})|b_{in}|$. Since $g(z^{ik}) \to \overline{P_1^n(0)} = \overline{P_1^1(0)} \times ... \times \overline{P_1^1(0)}$ as $k \to \infty$, the $i$'th component goes to $\overline{P_1^1(0)}$ and hence $|b_{i1}|+...+|b_{in}| \leq 1$. Now, consider the points $w^{jk} = (0,0,...,0,(1-\frac{1}{k}),0,...,0)$, where the only non-zero entry in the $j$'th one. Then each $w^{jk}$ lies in $P_1^n(0)$ and converges to $\partial P_1^n(0)$ as $k \to \infty$ and in special escapes to infinity. Since $g$ is proper, $g(w^{jk})$ escapes to infinity as well (and converges, as we will see just bellow), so $g(w^{jk}) \to \partial P_1^n(0)$. However, we have:

$$g(w^{jk}) = \left(\left(1-\frac{1}{k}\right)b_{1j},...,\left(1-\frac{1}{k}\right)b_{nj}\right)$$

The limit point is $(b_{1j},...,b_{nj})$. The boundary of our polydisc consists of all points $(z_1,...,z_n)$ such that $\max\limits_{1\leq i\leq n}|z_i| = 1$ and hence we get $\max\limits_{1\leq i\leq n}|b_{ij}| = 1$. The conditions:

- $|b_{i1}|+...+|b_{in}| \leq 1$;
- $\max\limits_{1\leq i\leq n}|b_{ij}| = 1$

Say that each row of $(|b_{ij}|)$ sums to at most 1 and each column has at least one element of norm $1$. It is not hard to see that this implies that each column has exactly one element of norm $1$ (and the rest is zero!), so $g$ is a permutation matrix. We can define a permutation $\sigma$ by the condition $|b_{j,\sigma(j)}| = 1$.

Now, write $b_{j,\sigma(j)} = e^{i\theta_j}$ so in special $g(z)_k = \sum\limits_{=1}^{n} b_{k,} z = e^{i\theta_k}z_{\sigma(k)}$ and hence $g(z) = (e^{i\theta_1}z_{\sigma(1)},...,e^{i\theta_n}z_{\sigma(n)})$. Then:

$$f(z) = g(\phi_{-\alpha}(z)) = g(\frac{z_1-\beta_1}{1-\overline{\beta_1}z_1},\frac{z_2-\beta_2}{1-\overline{\beta_{\sigma(2)}}z_2},...,\frac{z_n-\beta_n}{1-\overline{\beta_n}z_n})$$
$$= \left(e^{i\theta_1}\frac{z_{\sigma(1)}-\beta_{\sigma(1)}}{1-\overline{\beta_{\sigma(1)}}z_{\sigma(1)}}, e^{i\theta_2}\frac{z_{\sigma(2)}-\beta_{\sigma(2)}}{1-\overline{\beta_{\sigma(2)}}z_{\sigma(2)}},...,e^{i\theta_n}\frac{z_{\sigma(n)}-\beta_{\sigma(n)}}{1-\overline{\beta_{\sigma(n)}}z_{\sigma(n)}}\right)$$

For $\beta = -\alpha$.

# References


[VO05] Scheidemann, Volker. (2005). Introduction to Complex Analysis in Several Variables. DOI: 10.1007/3-7643-7491-8.

[KR01] Krantz, Steven George. Function theory of several complex variables. Vol. 340. American Mathematical Soc., 2001.

# Funções de Várias Variáveis Holomorfas Domínios de Fatou Bieberbach

Rodolfo Cesar Macedo Soares

## 1 Introdução

Dado um domínio (um aberto e conexo) $U \subsetneq \mathbb{C}^N$, podemos perguntar se existe um biholomorfismo, i.e. uma bijeção holomorfa de inversa holomorfa, entre $U$ e $\mathbb{C}^N$.

No caso de $N = 1$, sabemos que isso é impossível pela combinação dos seguintes teoremas clássicos de análise complexa em uma variável:

**Teorema 1.1** (Teorema de Liouville). *Seja $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorfa. Se $|f|$ é limitada, então $f$ é constante.*

**Teorema 1.2** (Teorema do Mapeamento Conforme de Riemann). *Seja $U \subsetneq \mathbb{C}$ conexo e simplesmente conexo, existe $\phi : U \to D(0,1)$ biholomorfa.*

**Afirmação.** *Não existe biholomorfismo entre $\mathbb{C}$ e $U \subsetneq \mathbb{C}$.*

*Demonstração.* Seja $f$ tal função. Pelo teorema de Riemann, existe biholomorfismo $\phi : U \to D(0,1)$, a composição $\phi \circ f : \mathbb{C} \to D(0,1)$ seria holomorfa e limitada, concluímos que seria constante. Isso contradiz que $f$ seja inversível. □

Fazendo a mesma pergunta para o caso $\mathbb{C}^N$ com $N \geq 2$, conseguimos provar a existência de tais domínios que são denominados Domínios de Fatou-Bieberbach. Uma maneira conhecida de construí-los usa recursos de dinâmica pois, surgem como bacia de atração de automorfismos de $\mathbb{C}^N$.

Nesse texto, focaremos no caso $N = 2$, seguindo as ideias apresentadas em [3], onde exploramos a teoria de dinâmica para a construção da prova e os exemplos são (um pouco) mais simples.

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "G"] & V \\ U \arrow[u, "\varphi"] \arrow[r, "F"'] & U \arrow[u, "\varphi"'] \end{tikzcd}$$

Figura 1: Conjugação de mapas

# 2 Um pouco de dinâmica complexa

Estamos interessados na dinâmica por iteradas de funções

Definição 1. Considerando uma função $F : U \subset \mathbb{C}^N \to \mathbb{C}^N$, seja $p \in U$ um ponto fixo de $F$. Dizemos que $p$ é ponto fixo atrator de $F$ se todos os autovalores $\lambda_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ de $F'(p)$ são tais que $0 < |\lambda_i| < 1$.

Definição 2. Sejam $U, V \subset \mathbb{C}^n$ abertos e $F : U \to U$ e $G : V \to V$ mapas holomorfos. Dizemos que $F$ e $G$ são conjugados se existe um biholomorfismo $\Phi$ tal que,

$$G \circ \Phi = \Phi \circ F.$$

Em outras palavras, diagrama na figura 1 comuta.

Observando que, por $\Phi$ ser biholomorfismo, poderíamos escrever:

$$G = \Phi \circ F \circ \Phi^{-1}$$

implicando que estudar $G$ é o mesmo que estudar $F$ sob uma mudança de coordenadas.

Nesse caso, consideramos que as funções representarão o mesmo sistema quando observadas as propriedades que dependem das características topológicas e holomorfas das funções em questão. Em particular, $\Phi$ preserva pontos fixos e seus autovalores.

Fixando $N = 2$, temos interesse em encontrar uma conjugação local para vizinhança de um ponto fixo, a ideia é reduzir as possibilidades de dinâmica local em relação aos pontos fixados. Antes, um lema preliminar:

Lema 2.1. Seja $F : U \subset \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ holomorfa em $U$ e $p \in U$ um ponto fixo atrator. Então existe vizinhança $V \subset U$ conexa e simplesmente conexa, com $p \in V$, tal que $\overline{F(V)} \subset V$.

Demonstração. Por translação, podemos supor que $p = 0 = (0,0) \in \mathbb{C}^2$ e sejam $\lambda$, $\mu$ seus autovalores.

Façamos a seguinte observação, seja $A \in M_2(\mathbb{C})$ inversível, escrevendo como $A(z)$ a transformação linear induzida por essa matriz e $A^{-1}(z)$ sua inversa. Em particular, $A(z)$ é biholomorfismo em $\mathbb{C}^2$.

Pela regra da cadeia temos:

$$(A^{-1} \circ F \circ A)'(z) = A^{-1}.F'(A(z)).A \tag{1}$$

Seja $\varepsilon > 0$ definimos a seguinte matriz:

$$E := \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 \\ 0 & \varepsilon^2 \end{pmatrix}$$

Seja $P \in M_2(\mathbb{C})$ a matriz inversível que leva a matriz $F'(0)$ a forma canônica de Jordan e denotando como $\phi(z)$ a transformação linear induzida pela matriz $PE$, calculamos:

$$(\phi^{-1} \circ F \circ \phi)'(0) = \begin{pmatrix} \lambda & \nu\varepsilon \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$$

com $\nu \in \{0,1\}$.

Seja $G = \phi^{-1} \circ F \circ \phi$, ela é diferenciável na origem e pensando na expressão em série de potências, podemos escrever:

$$G(x,y) = (\lambda x + \nu\varepsilon y, \mu y) + h(x,y) \tag{2}$$

com os termos de $h(x,y)$ todos com ordem maior ou igual a 2.

Por hipótese vale $|\lambda|, |\mu| < 1$. Tomando $\varepsilon$ e $r$ suficientemente pequenos, temos que $\overline{G(B(0,r))} \subset B(0,r)$. Já que $\varphi$ é mudança de coordenadas linear, existe aberto $V$ conexo e simplesmente conexo satisfazendo a propriedade em relação à $F$. □

Notando que a demonstração poderia ser estendida para $N > 2$, e o caso $N = 1$ é análogo (não precisamos pensar na diagonalização).

Definição 3. Sejam $\lambda, \mu \neq 0$ e $k \in \{1,2,\dots\}$, definimos os mapas $\mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$:

$$L_{\lambda,\mu} : (x,y) \mapsto (\lambda x, \mu y) \tag{3}$$

$$E_{\lambda,k} : (x,y) \mapsto (\lambda x, \lambda^k(y + x^k)) \tag{4}$$

Ambos os mapas são biholomorfismos de $\mathbb{C}^2$, tem como único ponto fixo a origem e as constantes determinam a caracterização do ponto fixo.

**Teorema 2.1.** Seja $F : U \subset \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ uma função holomorfa e $p \in U$ seja ponto fixo atrator de $F$ cujos autovalores $\lambda, \mu$ de $F'(p)$ satisfazem

$$0 < |\mu| \leq |\lambda| < 1$$

Existe vizinhança $V \subset U$ onde ocorre uma das possibilidades:

1. Se $\lambda^k \neq \mu$ para todo $k$, então $F$ é conjugada à $L_{\lambda,\mu}$ em $V$
2. Se $\exists k : \lambda^k = \mu$, então $F$ é conjugada à $L_{\lambda,\mu}$ ou à $E_{\lambda,k}$ em $V$.

A ideia da demonstração é, utilizando técnicas de análise, encontrar coordenadas locais por um mapa biholomorfo, que conjugue a função com as funções citadas.

*Demonstração.* Escrevendo $F(z) = F(x, y) = (f(x, y), g(x, y))$ e seguindo a ideia do lema 2.1, podemos assumir que o ponto fixo é a origem, e a matriz $F'(0)$ é dada por:

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ \nu & \mu \end{pmatrix}$$

com $\nu < 1$. Observando que aqui fizemos uma pequena alteração na construção para que a matriz na forma canônica seja triangular inferior, a prova fica um pouco mais limpa dessa forma.

Passo 1: Existe vizinhança $V \subset \mathbb{C}^2$ da origem, onde conseguimos expressar $F$ como série de potências:

$$z = (x, y) \longmapsto (\lambda x + \nu y + \cdots, \mu y + \cdots) \tag{5}$$

observando que os termos omitidos pelas reticências tem ordem $\geq 2$.

Utilizando o lema 2.1, podemos reduzir a vizinhança $V$, de forma que, para algum $\rho < 1$, vale:

$$|F(z)| \leq \rho|z|, \forall z \in V.$$

Denotando as iteradas de $F$ por:

$$\begin{aligned} F^{n+1}(x, y) &= F^n(f(x, y), g(x, y)) = (f_n(x, y), g_n(x, y)) \\ &= (f(F^n(x, y)), g(F^n(x, y))) \end{aligned}$$

*Afirmação.* A sequência $\dfrac{f_n(z)}{\lambda^n}$ com $n = 1, 2, \ldots$ converge uniformemente em $U$.

A partir da expressão em série de potências, escrevemos $f(z) = \lambda x + \phi(z)$ com $\phi$ tendo somente termos de ordem $\geq 2$, portanto, existe constante $K > 0$ tal que:

$$|\phi(z)| \leq K|z|^2.$$

Observando a composição de iteradas:

$$f(F^n(z)) = f_{n+1}(z) = \lambda f_n(z) + \phi(F^n(z))$$

Temos que:

$$\frac{f_{n+1}(z)}{\lambda^{n+1}} - \frac{f_n(z)}{\lambda^n} = \frac{\phi(F^n(z))}{\lambda^{n+1}}$$

como $|F^n(z)| \geq \rho^n |z|$ quando $z \in V$:

$$\left|\frac{\phi(F^n(z))}{\lambda^{n+1}}\right| \leq \frac{K|F^n(z)|^2}{|\lambda|^{n+1}} \leq \frac{K(\rho^n|z|)^2}{|\lambda|^{n+1}} = \frac{K|z|^2}{|\lambda|}.\left(\frac{\rho^2}{|\lambda|}\right)^n.$$

Ajustando $\rho$ tal que: $\rho^2 < |\lambda| < \rho < 1$ e fazendo a soma:

$$\sum_{n=1}^{k-1}\left(\frac{f_{n+1}(z)}{\lambda^{n+1}} - \frac{f_n(z)}{\lambda^n}\right) = \sum_{n=1}^{k-1}\frac{\phi(F^n(z))}{\lambda^{n+1}} = \frac{f_k(z)}{\lambda^k} - \frac{f(z)}{\lambda} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{f_k(z)}{\lambda^k} = x + \frac{\phi(z)}{\lambda} + \sum_{n=1}^{k-1}\frac{\phi(F^n(z))}{\lambda^{n+1}}$$

pelo fato de $\left(\frac{\rho^2}{|\lambda|}\right) < 1$, quando tomamos o limite $k \to \infty$, temos a convergência uniforme. Definimos:

$$\sigma(z) = \lim_{k\to\infty}\frac{f_k(z)}{\lambda^k}.$$

A partir da equação, $\frac{f_n(F(z))}{\lambda^n} = \lambda\frac{f_{n+1}(z)}{\lambda^{n+1}}$ levando $n \to \infty$, temos a equação funcional:

$$\sigma(F(z)) = \lambda\sigma(z)$$

Definimos $\Phi(z) = (\sigma(z), y)$. Pela convergência uniforme, temos que $J\Phi \equiv 1$ e então conseguimos ajustar a vizinhança $V$, usando o teorema da função inversa, para que $\Phi$ seja biholomorfismo em $V$. Conjugando $F$ por $\Phi$ em $V$, temos:

$$\Phi \circ F \circ \Phi^{-1}(x, y) \mapsto (\lambda x, g(\Phi^{-1}(x, y)))$$

e então, podemos supor que $F$ é da forma apresentada.

Passo 2: Supondo que $F(x, y) = (\lambda x, g(x, y))$, existe nova vizinhança $V$ (contida na construida no passo anterior) onde podemos escrever:

$$\frac{\partial g}{\partial y}(z) = \mu(1 + B(z))$$

com $B(z)$ série de potências com todos os termos maiores que 2 e conseguimos constante $L$ tal que: $|B(z)| \leq L||z||^2$.

Observando as regras de composição, temos que:

$$\frac{\partial g_n}{\partial y}(z) = \frac{\partial g_{n-1}}{\partial y}(F(z)).\frac{\partial g}{\partial y}(z) = \prod_{j=0}^{n-1} \frac{\partial g}{\partial y}(F^j(y))$$
$$= \mu^n \prod_{j=0}^{n-1} (1 + B(F^j(z))$$

Usando a estimativa para $B$ combinada com a do passo anterior para $F$, temos:

$$|B(F^j(z))| \leq L||F^j(z)|| \leq L\rho^j||z||^2$$

e isso implica que $\prod_{n=0}^{\infty}(1 + B(F^n(z)))$ converge uniformemente em $V$, daí podemos definir:

$$\eta(z) = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{\mu^n}.\frac{\partial g_n}{\partial y}(z) = \prod_{n=0}^{\infty} (1 + B(F^n(z))).$$

Escrevendo:

$$\frac{\mu}{\mu^n}.\frac{\partial g_n}{\partial y}(z) = \frac{1}{\mu^{n-1}}.\frac{\partial g_{n-1}}{\partial y}(F(z)).\frac{\partial g}{\partial y}(z)$$

e tomando o limite $n \to \infty$, temos a equação:

$$\mu\eta(z) = \eta(F(z))\frac{\partial g}{\partial y}(z).$$

Conseguimos função holomorfa $\psi(z)$ em vizinhança suficientemente pequena do 0 tal que $\psi(0) = 0$ e $\frac{\partial \psi}{\partial y}(z) = \eta(z)$, por exemplo, formulando um problema de Cauchy que inclua essas condições e aplicando o Teorema de Cauchy-Kowalewski. Daí concluimos

$$\frac{\partial(\psi \circ F)}{\partial y}(z) = \frac{\partial \psi}{\partial y}(F(z))\frac{\partial g}{\partial y}(z) = \mu\eta(z) = \mu\frac{\partial \psi}{\partial y}(z)$$

portanto, existe função holomorfa $h$ definida em vizinhança do 0 com $h(0) = 0$ e $\psi(F(z)) = \mu\psi(z) + h(x)$, fazendo a mudança de coordenadas $(x, \psi(z))$ por argumento análogo ao passo anterior o passo estará provado.

Passo 3: Supondo que $F : (x, y) \mapsto (\lambda x, \mu y + h(x))$. Seja $q(x)$ função holomorfa em vizinhança do 0 suficientemente pequena com $q(0) = 0$ e colocando $\gamma(z) = y + q(x)$ e daí, temos:

$$\gamma(F(z)) = \gamma(\lambda x, \mu y + h(x)) = \mu y + h(x) + q(\lambda x)$$

implicando que:

$$\gamma(F(z)) - \mu\gamma(z) = h(x) + q(\lambda x) - \mu q(x) \tag{6}$$

Expandindo $h(x) = \sum h_i x^i$ e $q(x) = \sum q_i x^i$ em série de potências e substituindo no lado direito da equação 6, temos:

$$[h_1 + (\lambda - \mu)q_1]x + [h_2 + (\lambda^2 - \mu)q_2]x^2 + \cdots + [h_j + (\lambda^j - \mu)q_j]x^j + \cdots$$

Primeiro, supondo que $\lambda^j \neq \mu$ para todo $j$ inteiro positivo, podemos colocar que a função $q$ é definida pelas escolhas de constantes

$$q_j = \frac{h_j}{\mu - \lambda^j}$$

e observamos que terá o mesmo raio de convergência que a função $h$.

Dessa forma, o lado direito da equação se anula e temos $\gamma(F(z)) = \mu\gamma(z)$, e passando para as coordenadas locais $(x, \gamma(z))$ (novamente usando argumentos análogos aos passos anteriores) $F$ estará na forma $L_{\lambda,\mu}$.

Por outro lado, se existe $k$ tal que $\lambda^k = \mu$. Definindo $q$ colocando $q_j$ com $j \neq k$ como no caso anterior e $q_k$ um número complexo arbitrário. O lado direito da equação 6 se reduz à $h_k x^k$ e assim:

$$\gamma(F(z)) = \lambda^k\gamma(z) + h_k x^k$$

se $h_k \neq 0$, trocamos $\frac{\lambda^k}{h_k}\gamma(z)$ por $\gamma(z)$ e obtemos

$$\gamma(F(z)) = \lambda^k(\eta(z) + x^k$$

Por fim, considerando as coordenadas locais $(x, \gamma(z))$, conseguimos reduzir $F$ à $L_{\lambda,\mu}$ se $h_k = 0$ e à $E_{\lambda,k}$ caso contrário. □

Em particular, esse resultado nos dá que a dinâmica de um automorfismo qualquer em uma vizinhança do ponto crítico se reduz a uma dessas formas, notando que, $L_{\lambda,\mu}$ e $E_{\lambda,k}$ não são conjugados, mesmo quando $\mu = \lambda^k$.

# 3 Construindo os Domínios

Se $F : \mathbb{C}^N \to \mathbb{C}^N$ é um biholomorfismo, dizemos que $F$ é um automorfismo de $\mathbb{C}^N$ e denotamos por $\mathrm{Aut}(\mathbb{C}^N)$. No caso $N = 1$, sabemos que:

$$\mathrm{Aut}(\mathbb{C}) = \{z \mapsto az + b : a, b \in \mathbb{C}\}.$$

No caso $N \geq 2$ é mais complicado explicitar a estrutura desse grupo.

Restringindo nossa atenção especificamente para esse tipo de mapa, definimos:

**Definição 4.** Seja $F \in \mathrm{Aut}(\mathbb{C}^N)$ com ponto fixo atrator $p \in \mathbb{C}^N$. Seja $U$ vizinhança conexa e simplesmente conexa de $p$ tal que: $\overline{F(U)} \subset U$, definimos a bacia de atração de $p$ em relação a $F$ como:

$$\Omega := \bigcup_{n=0}^{\infty} F^{-n}(U)$$

*Observação.* A escolha de $U$ não importa, já que $F$ é homeomorfismo e outro aberto que satisfaz a hipótese contém ou será contido por $F^{-n}(U)$ para algum $n$.

**Proposição 3.1.** Nas definições acima, valem as propriedades:

1. $\Omega$ é aberto e não vazio.
2. $\Omega$ é conexo e simplesmente conexo.
3. $\Omega = \{z \in \mathbb{C}^2 : F^n(z) \to a \text{ quando } n \to \infty\}$, ou seja, as iteradas convergem uniformemente pra função constante igual à a em $\Omega$

*Demonstração.* 1. Direto.

2. Temos que $F^{-n}(U)$ é conexo e simplesmente conexo por $F$ ser um homeomorfismo, e a hipótese $\overline{F(U)} \subset U$ nos garante que teremos sequência aninhada de abertos, portanto, $\Omega$ é conexo e simplesmente conexo.

3. Se $z \in \bigcup_{n=0}^{\infty} F^{-n}(U)$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $F(z) \in U$ e, por hipótese, $F$ se comporta como contração em $U$ e então $F^n(z) \to a$.

   Por outro lado, se $z \in \{z \in \mathbb{C}^2 : F^n(z) \to a \text{ quando } n \to \infty\}$ existe vizinhança $U$ conexa e simplesmente conexa de $p$ tal que $z \in U$ e vale que $\overline{F((U)} \subset U$, pela convergência, e então $z \in \bigcup_{n=0}^{\infty} F^{-n}(U)$.

$\square$

Exemplo 3.1. Voltando aos mapas 3 e 4, supondo que $|\lambda|, |\mu| < 1$ e não nulos, e calculando as iteradas, temos que:

$$L^n_{\lambda,\mu}(x, y) = (\lambda^n x, \mu^n y) \tag{7}$$

$$E^n_{\lambda,k}(x, y) = (\lambda^n x, \lambda^{kn}(y + nx^k)) \tag{8}$$

daí, é direto concluir que, em relação à origem, $\Omega = \mathbb{C}^2$.

Fixando $N = 2$, vamos usar as conjugações para mostrar a existência dos domínios em questão.

Teorema 3.1. Seja $F \in \mathrm{Aut}(\mathbb{C}^2)$ com ponto fixo atrator $p$. Sejam $\lambda$, $\mu$ os autovalores de $F'(p)$ e supondo que $|\lambda|, |\mu| < 1$ e não nulos. Então existe um biholomorfismo $\Phi$ entre a bacia de atração $\Omega$ e $\mathbb{C}^2$ tal que:

$$\Phi \circ F|_\Omega = G \circ \Phi$$

onde $G$ é $L_{\lambda,\mu}$ ou $E_{\lambda,k}$.

Demonstração. Pelo teorema 2.1, conseguimos biholomorfismo $\Phi$ que conjuga $F$ com $G$ que é um dos mapas $L_{\lambda,\mu}$ ou $E_{\lambda,k}$.

Seja $U$ vizinhança de $p$ tal que $\overline{F(U)} \subset U$, temos que $V = \Phi(U)$ satisfaz $\overline{G(V)} \subset V$. Assim, conseguimos sequência de abertos para ambos os casos:

$$U \subset F^{-1}(U) \subset \cdots \subset F^{-n}(U) \subset \cdots \subset \bigcup_n F^{-n}(U) = \Omega$$

$$V \subset G^{-1}(V) \subset \cdots \subset G^{-n}(V) \subset \cdots \subset \bigcup_n G^{-n}(V) = \mathbb{C}^2$$

Como $G$ é automorfismo de $\mathbb{C}^2$, possui inversa e podemos escrever:

$$\Phi \circ F|_U = G \circ \Phi|_U \Rightarrow G^{-1} \circ \Phi \circ F|_U = \Phi|_U$$

Definimos a seguinte sequência de mapas biholomorfos:

$$\begin{aligned} \Phi_n : F^{-n}(U) &\to G^{-n}(V) \\ z &\mapsto G^{-n} \circ \Phi \circ F^n(z) \end{aligned}$$

Notando que se $z \in F^{-n}(U)$ então $F^n(z) \in U$ e vale:

$$\begin{aligned} \Phi_{n+1}(z) &= G^{-n} \circ G^{-1} \circ \Phi \circ F \circ F^n(z) \\ &= G^{-n} \circ \Phi \circ F^n(z) = \Phi_n(z) \end{aligned}$$

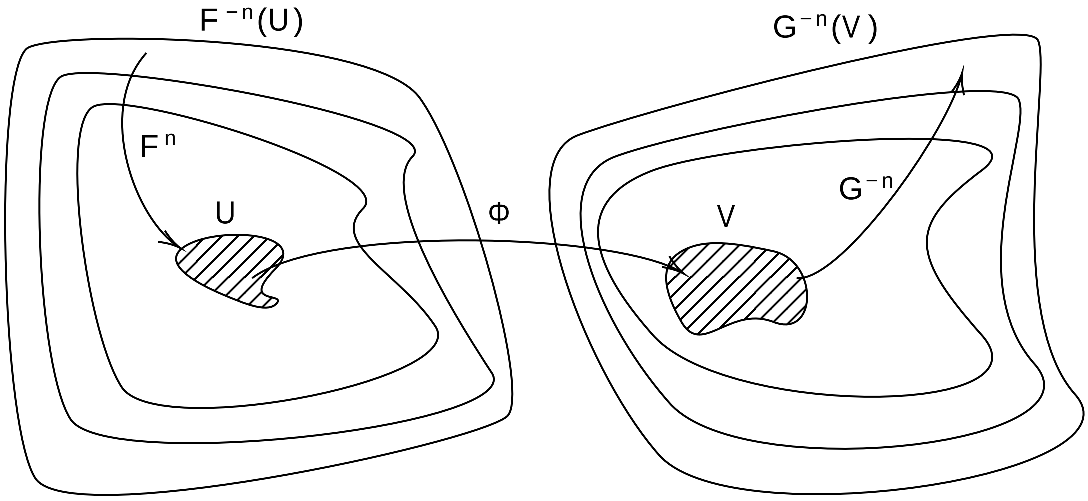



Figura 2: Diagrama transformação $\Phi_n$

já que estamos restritos ao aberto $U$, concluindo que $\Phi_{n+1}|_{F^{-n}(U)} = \Phi_n$.

Seja $z \in \Omega$, tomando $n$ tal que: $z \in F^{-n}(U)$, definimos $\phi(z) = \Phi_n(z)$. Pelas conclusões anteriores, temos que $\phi$ está bem definido já que independe da escolha de $n$ e, pelo fato de $\bigcup G^{-n}(V) = \mathbb{C}^2$ e $G^{-1}$ ser expansivo, temos biholomorfismo $\Phi : \Omega \to \mathbb{C}^2$. □

**Corolário 3.1.1.** Temos o caso onde a bacia de atração $\Omega = \mathbb{C}^2$ se, e só se, $F$ é conjugado (globalmente) a $L_{\lambda,\mu}$ ou $E_{\lambda,k}$ por automorfismo de $\mathbb{C}^2$.

Esse resultado surge direto dessa construção aliado a como o mapa foi construído no teorema 2.1.

# 4 Relação com Domínios de Holomorfia e exemplos

Seja $U \subset \mathbb{C}^N$ aberto e $K \subset U$ compacto, definimos a envoltória convexa holomorfa de $K$ como:

$$\hat{K}_U = \{z \in \mathbb{C}^N : |f(z)| \leq \sup_K |f|, \forall f \text{ holomorfa em } U).\}$$

Um aberto $U \subset \mathbb{C}^N$ é chamado domínio de holomorfia se $\forall K \subset U$ compacto temos que $\hat{K}_U$ é compacto em $U$.

**Lema 4.1.** Sejam $U$ e $V$ abertos de $\mathbb{C}^N$, supondo que $U$ seja domínio de holomorfia e que existe biholomorfismo $\Phi : U \to V$, então $V$ também é domínio de holomorfia. [5]

*Demonstração.* Seja $K \subset V$ compacto. Como $\Phi$ é biholomorfismo, temos que $K' = \Phi^{-1}(K) \subset U$ é compacto em $U$.

Por $U$ ser domínio de holomorfia, temos que $\hat{K}'_U$ é compacto em $U$. Se ocorrer que:

$$\hat{K}_V \subset \Phi(\hat{K}'_U)$$

o lema estará provado, já que $\Phi(\hat{K}'_U)$ é compacto e $\hat{K}_V$ é fechado dentro de compacto e, portanto, compacto em $U$.

De fato, mostramos que $V \setminus \Phi(\hat{K}'_U) \subset V \setminus \hat{K}_V$.

Se $w \in V \setminus \Phi(\hat{K}'_U)$, temos que $z = \Phi^{-1}(w) \in U \setminus \hat{K}'_U$ portanto, existe $f$ holomorfa tal que:

$$|f(z)| > \sup_{K'} |f|.$$

Escrevendo $g = f \circ \Phi^{-1}$, temos que $g$ é holomorfa em $V$ e:

$$|g(w)| > \sup_{K} |g|$$

e, portanto, $w \in V \setminus \hat{K}_V$. □

Concluímos, então, que domínios de Fatou-Bieberbach também são domínios de holomorfia. Vejamos alguns exemplos:

**Exemplo 4.1.** Seja $h : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorfa e $\delta \neq 0$. Definindo:

$$F : (x, y) \longmapsto (y, h(y) - \delta x)$$

temos que $F \in \mathrm{Aut}(\mathbb{C}^2)$.

De fato, é fácil ver que $F$ é holomorfa em $\mathbb{C}^2$, além disso, sejam $x, y, x', y'$ tais que:

$$(y(y, h(y) - \delta x) = (y', h(y') - \delta x')$$

temos que $y = y'$ e substituindo para a outra coordenada, concluímos que $F$ é injetiva.

Seja $(a, b) \in \mathbb{C}^2$ fixado, tomamos

$$(x, y) = \left(\frac{h(a) - b}{\delta}, a\right) \in \mathbb{C}^2$$

e concluímos que $F$ é sobrejetiva.

Por fim, utilizamos o seguinte Lema, enumerado como 6.13 em [2]:

Lema 4.2. Seja $U \subset C^N$ aberto e $F : U \to C^N$ injetiva, então, para todo $z \in U$ temos que $J(F'(z)) \neq 0$.

No exemplo, como $F$ é injetiva em $C^N$, ela é inversível localmente em todos os pontos pelo teorema da função inversa, além disso, por ser bijeção deve existir inversa global.

Concluímos (já que a inversa de uma função é única), que essa é inversa é holomorfa em todo $C^N$. Portanto, $F$ é automorfismo de $C^N$.

Verificamos que $(x, y)$ é ponto fixo de $F$ se, e somente se, $x = y$ e $h(x) = x(1 + \delta)$ e então tais pontos são da forma $(w, w)$ com $w$ sendo um zero da função:

$$g : x \mapsto h(x) - x(1 + \delta)$$

com $x \in C$.

Estamos interessado em escolhas de $h$ tal que $g$ possua zeros e, assim, e podemos construir bacia de atração para $F$. Observando o caso particular onde $0 < |\delta| < 1$ e:

$$h(x) = (1 + \delta)x + \mathrm{sen}(x)$$

temos que $g(x) = \mathrm{sen}(x)$ e então os pontos fixos da função $F$ são da forma $(n\pi, n\pi)$ com $n \in Z$, todos atratores.

Se $\Omega$ é bacia de atração por $F$ de algum deles, como um ponto fixo não pode pertencer a bacia de atração de outro ponto fixo, temos $\Omega \subsetneq C^2$ e então é domínio de Fatou-Bieberbach.

Em particular, construímos quantidade enumerável desses domínios relacionados a $F$, já que as bacias de atração desses pontos são disjuntas entre si.

Exemplo 4.2. Sejam $g, h : C \to C$ funções holomorfas, não constantes, que nunca se anulam e tais que $|g(0)| < 1$ e $|h(0)| < 1$. (por exemplo, $z \mapsto \lambda e^z$ com $0 < |\lambda| < 1$).

Definindo a função:

$$F : (x, y) \mapsto (h(g(x)y)x, g(x)y)$$

com $x, y \in C$, vale que $F \in \mathrm{Aut}(C^2)$ usando argumento similar ao do exemplo anterior.

O ponto $(a, b)$ é ponto fixado para $F$ se, e somente se, $(a, b) = (0, 0)$ ou ocorra $h(b) = 1$ e $g(a) = 1$. Pelo Grande Teorema de Picard de análise em uma variável, essas equações possuem infinitas soluções.

Temos que $(0, 0)$ é ponto fixo atrator, e as retas complexas $(x, 0)$ e $(0, y)$ estão na bacia de atração $\Omega$ da origem, de fato, computando as iteradas:

$$F^n(x, 0) = (h(0)^n x, 0)$$
$$F^n(0, y) = (0, h(0)^n y)$$

elas convergem para a origem. Logo, $\Omega \subsetneq \mathbb{C}^2$ e, portanto, é domínio de Fatou-Bieberbach que contém duas retas complexas.

# 5 Outros Resultados

Em [4], Rosay e Rudin provam dois resultados sobre essas questões.

**Teorema 5.1.** Seja $F \in Aut(\mathbb{C}^N)$, $p \in \mathbb{C}^N$ tal que $F(p) = p$ e os autovalores $\lambda_i$ de $F'(p) = A$ satisfazem:

1. $|\lambda_1| \geq \cdots \geq |\lambda_n|$
2. $|\lambda_1|^2 < |\lambda_j|$ para $j \in \{1, \cdots, N\}$

Definindo $\Omega = \{z \in \mathbb{C}^N : \lim_{k\to\infty} F^k(z) = p\}$ temos que $\Omega$ é um domínio de $\mathbb{C}^N$ e existe biholomorfismo $\Phi : \Omega \to \mathbb{C}^N$ dado por:

$$\Phi = \lim_{k\to\infty} A^{-k}F^k$$

e a convergência é uniforme nos compactos de $\Omega$.

A prova é elementar, porém, existe certa restrição nos casos pelas desigualdades dos autovalores. Como exemplo, no caso do mapa $F : (x, y) \mapsto (\lambda x, \mu y + x^2)$ com $0 < \mu < \lambda < 1$, a função $\Phi$ não converge uniformemente nos compactos.

Além disso, o caso generalizado é provado:

**Teorema 5.2.** Seja $F \in Aut(\mathbb{C}^N)$ tal que $F(0) = 0$ e os autovalores $\lambda_i$ de $F'(0)$ são tais que $|\lambda_i| < 1$ para $i = 1, \cdots, N$. Então existe biholomorfismo, $\Phi$ de $\mathbb{C}^N$ na região:

$$\Omega = \{z \in \mathbb{C}^N : \lim_{k\to\infty} F^k(z) = 0\}$$

Além disso, $\Phi$ pode ser escolhida tal que $J\Phi \equiv 1$ sempre que $JF$ seja constante.

A prova desse resultado passa utiliza os conceitos de automorfismo triangular, definidos de forma que a derivada da função seja sempre uma matriz triangular inferior e por técnicas de análise funcional aplicadas a mapas holomorfos cujas coordenadas são polinômios homogêneos.

A segunda parte do resultado sobre o Jacobiano é interessante pois automorfismos polinomiais, i.e. funções $F = (f_1, \cdots, f_N) \in Aut(\mathbb{C}^N)$ sendo cada $f_i$ um polinômio, possuem jacobiano constante.

Esse assunto foi estudado com detalhes, tanto no caso real quanto complexo, por Friedland e Milnor em [1].

# Referências

[1] S. Friedland and J. Milnor. Dynamical properties of plane polynomial automorphisms. Ergodic Theory & Dynamical Systems, 9:67–99, 1989.

[2] Y. Imayoshi and M. Taniguchi. An Introduction to Teichmuller Spaces. Springer-Verlag, 1992.

[3] S. Morosawa, Y. Nishimura, M. Taniguchi, and T. Ueda. Holomorphic Dynamics. Cambridge University Press, 2000.

[4] J. Rosay and W. Rudin. Holomorphic maps from $C^N$ to $C^N$. Transactions of the American Mathematical Society, 310(1):47–86, 1988.

[5] B. Shabat. Translations of Mathematical Monographs, Introduction to Complex Analysis Part II. Functions of Several Variables. American Mathematical Society, 1992.

[6] E. M. Stein and R. Shakarchi. Princeton Lectures in Analysis II: Complex Analysis. Princeton University Press, 2003.

# TEORIA LOCAL DAS FUNÇÕES HOLOMORFAS: O TEOREMA DE OKA

VINÍCIUS NOVELLI

Sumário



## 1. Introdução

Nestas notas, vamos expor a teoria pontual das funções holomorfas, fazendo uso de métodos algébricos. Investigamos a álgebra das séries formais e seus homomorfismos, e também fazemos as necessárias considerações sobre convergência. Os principais resultados são os teoremas de preparação e divisão de Weierstrass, que permitem descrever os ideais de álgebras de séries de potências em termos de polinômios de Weierstrass. A demonstração que apresentamos é elementar e essencialmente algébrica.

Depois disso, apresentamos brevemente o *yoga* dos feixes coerentes (também adicionamos um apêndice com resultados básicos sobre feixes, a maioria com demonstração). A teoria culmina com a prova do teorema de Oka, que diz que o feixe estrutural ${}_N\mathcal{O}_0$ de $\mathbb{C}^N$ é coerente.

As referências principais para a elaboração deste trabalho foram os livros [2] e [1]. Alguns resultados sobre a teoria de feixes foram baseados em [Stacks].

## 2. Teoria local de Weierstrass

### 2.1. Álgebras de séries formais e convergentes.

Nesta seção, vamos demonstrar os importantes teoremas de preparação e divisão de Weierstrass. Estes resultados são os que permitem produzir argumentos por indução na dimensão em várias variáveis complexas.

**Definição 2.1.1.** Denotamos por $\mathbb{C}[[X_1,\dots,X_N]] = \mathbb{C}[[X]] = \mathcal{F}_N$ o conjunto das séries formais em $N \in \mathbb{Z}_{\geqslant 1}$ indeterminadas sobre $\mathbb{C}$, cujos elementos consistem de expressões da forma

$$P := \sum_{\nu\in\mathbb{Z}_+^N} a_\nu X^\nu,\ a_\nu \in \mathbb{C},\ \nu \in \mathbb{Z}_+^N.$$

Com as operações de adição, multiplicação e produto por escalar naturais, $\mathbb{C}[[X]]$ se torna uma $\mathbb{C}$-álgebra comutativa. Se $P = \sum_{\nu\in\mathbb{Z}_+^N} a_\nu X^\nu \in \mathcal{F}_N$, definimos a *ordem* $o(P)$ de $P$ por

$$o(P) = \begin{cases} \infty, & P \equiv 0, \\ \min\{|\nu|;\ a_\nu \neq 0\}, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

**Proposição 2.1.2.** *A ordem satisfaz as seguintes propriedades: sejam $P, Q \in \mathbb{C}[[X]]$ e $z \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$. Então,*

(1) $o(P+Q) \geqslant \min\{o(P), o(Q)\}$.
(2) $o(P\cdot Q) = o(P) + o(Q)$.
(3) $o(zP) = o(P)$.

*Observação* 2.1.3. Estamos usando implicitamente as seguintes relações: $a+\infty = \infty$ para $a \in \mathbb{Z}_+ \cup \{\infty\}$ e $a \leqslant \infty$ para todo $a \in \mathbb{Z}_+ \cup \{\infty\}$.

*Demonstração.* Para todos os itens, podemos supor que $P = \sum_{\nu \in \mathbb{Z}_+^N} a_\nu X^\nu$ e $Q = \sum_{\nu \in \mathbb{Z}_+^N} b_\nu X^\nu$ são não-nulos. Item 1): se $d = o(P+Q)$, então existe $\nu \in \mathbb{Z}_+^N$ com $|\nu| = d$ e tal que $a_\nu + b_\nu \neq 0$. Desta forma, ou $a_\nu \neq 0$ (donde $o(P) \leqslant d$) ou $b_\nu \neq 0$ (donde $o(Q) \leqslant d$), e portanto, $\min\{o(P), o(Q)\} \leqslant d$.

Para o segundo item, escrevendo $R = P \cdot Q = \sum_{\nu \in \mathbb{Z}_+^N} c_\nu X^\nu$, temos $c_\nu = \sum_{\nu_1+\nu_2=\nu} a_{\nu_1} b_{\nu_2}$. Sejam $d = o(R)$ e $\nu \in \mathbb{Z}_+^N$, $|\nu| = d$, tal que $c_\nu \neq 0$. Então, existem $\nu_1, \nu_2 \in \mathbb{Z}_+^N$, $\nu_1 + \nu_2 = \nu$, de modo que $a_{\nu_1} \neq 0$ e $b_{\nu_2} \neq 0$. Temos $o(P) + o(Q) \leqslant |\nu_1| + |\nu_2| = |\nu| = d$. Reciprocamente, sejam $d_1 = o(P)$, $d_2 = o(Q)$. Podemos introduzir em $\mathbb{Z}_+^N$ a ordem lexicográfica, e tomar $|\nu_i| = d_i$ satisfazendo $a_{\nu_1} \neq 0$ e $b_{\nu_2} \neq 0$ e mínimos com respeito a esta ordem. Afirmamos que $c_{\nu_1+\nu_2} \neq 0$. De fato, considere o conjunto

$$A = \left\{(\mu_1, \mu_2) \in \mathbb{Z}_+^N \times \mathbb{Z}_+^N;\ \mu_1 + \mu_2 = \nu_1 + \nu_2,\ a_{\mu_1} \neq 0,\ b_{\mu_2} \neq 0,\ |\mu_i| = d_i,\ i = 1, 2\right\}.$$

Seja $(\mu_1, \mu_2) \in A$ e suponha que $\mu_1 \neq \nu_1$. Então, existe $j_0 \in \{1, \dots, N\}$ tal que $\mu_1^j = \nu_1^j$ para $1 \leqslant j < j_0$ e $\mu_1^{j_0} > \nu_1^{j_0}$ (pela minimalidade de $\nu_1$). Isto implica que $\mu_2^j = \nu_2^j$ para $1 \leqslant j < j_0$ e que $\mu_2^{j_0} < \nu_2^{j_0}$ (já que $\mu_1^j + \mu_2^j = \nu_1^j + \nu_2^j$ para todo $1 \leqslant j \leqslant N$). Mas isto contradiz a minimalidade de $\nu_2$. Assim, $\mu_1 = \nu_1$ e $\mu_2 = \nu_2$, ou seja, $A = \{(\nu_1, \nu_2)\}$. Como

$$c_{\nu_1+\nu_2} = \sum_{(\mu_1,\mu_2) \in A} a_{\mu_1} b_{\mu_2} = a_{\nu_1} b_{\nu_2} \neq 0,$$

obtemos $o(P \cdot Q) \leqslant d_1 + d_2$ e assim o item 2) está demonstrado. Como o terceiro item é trivial, a proposição está demonstrada. □

Uma família $(P_j)_{j \in J}$ de séries formais $P_j = \sum_{\nu \in \mathbb{Z}_+^N} a_{\nu,j} X^\nu$ é dita *somável* se, para cada $q \in \mathbb{Z}_+$,

$$\{j \in J;\ o(P_j) \leqslant q\}$$

for um conjunto finito (em particular, $P_j \neq 0$ para, no máximo, um conjunto enumerável de $j \in J$). Neste caso, o conjunto $\{j \in J;\ a_{\nu,j} \neq 0\}$ é finito para cada $\nu \in \mathbb{Z}_+^N$, e definimos

$$P = \sum_{j \in J} P_j := \sum_{\nu \in \mathbb{Z}_+^N} \left( \sum_{j \in J} a_{\nu,j} \right) X^\nu.$$

Sejam $P \in \mathbb{C}[[X]]$ e $(P_j)_{j \in J}$ e $(Q_j)_{j \in J}$ famílias somáveis em $\mathbb{C}[[X]]$. Então, $(P_j + Q_j)_{j \in J}$ e $(P \cdot P_j)_{j \in J}$ são famílias somáveis e as seguintes identidades são válidas:

$$\sum_{j \in J} P_j + \sum_{j \in J} Q_j = \sum_{j \in J} (P_j + Q_j), \quad P \cdot \sum_{j \in J} P_j = \sum_{j \in J} P \cdot P_j.$$

Toda família $(P_j)_{j \in J}$ de polinômios homogêneos de grau $j$ (i.e., da forma $P_j = \sum_{|\nu|=j} a_\nu X^\nu$) é somável. Além disso, todo elemento $P \in \mathbb{C}[[X]]$ tem uma representação única da forma $P = \sum_{j=0}^\infty P_j$, onde $P_j$ é homogêneo de grau $j$. Se $P = \sum_{j=0}^\infty P_j$ e $Q = \sum_{j=0}^\infty$ são as representações homogêneas de $P, Q \in \mathbb{C}[[X]]$, então

$$P \cdot Q = \sum_{k=0}^\infty \left( \sum_{i+j=k} P_i \cdot Q_j \right).$$

**Proposição 2.1.4.** $\mathbb{C}[[X]]$ *é uma* $\mathbb{C}$*-álgebra local sem divisores de zero. Seu ideal maximal é*

$$\mathfrak{m}_{\mathbb{C}[[X]]} = \left\{P \in \mathbb{C}[[X]];\ P(0) = 0\right\}.$$

*Observação* 2.1.5. Estamos usando a notação $P(0)$ para o termo constante $a_0$ na representação $P = \sum_{\nu \in \mathbb{Z}_+^N} a_\nu X^\nu$. Lembre que um anel é dito *local* quando possui um único ideal maximal. Uma $\mathbb{C}$-álgebra é dita local se for um anel local e a composição $\mathbb{C} \cdot 1_R \to R \to R/\mathfrak{m}$ for um isomorfismo de corpos ($\mathfrak{m}$ é o ideal maximal de $R$).

*Demonstração.* É evidente que $\mathbb{C}[[X]]$ é uma $\mathbb{C}$-álgebra. Para demonstrar que não possui divisores de zero, usamos a proposição 2.1.2. Se $P, Q \in \mathbb{C}[[X]]$ são ambos não nulos, então $o(P \cdot Q) = o(P) + o(Q) < \infty$, donde $P \cdot Q \neq 0$. Resta demonstrar que $\mathbb{C}[[X]]$ é um anel local. Para isto, provamos a seguinte afirmação:
Afirmação: Seja $P \in \mathbb{C}[[X]]$ com $P(0) \neq 0$. Então, existe $Q \in \mathbb{C}[[X]]$ tal que $P \cdot Q = 1$. Em particular, os elementos invertíveis de $\mathfrak{m}_{\mathbb{C}[[X]]}$ são precisamente os que satisfazem $P(0) \neq 0$.

*Prova da afirmação:* Podemos supor que $P(0) = 1$. Considere a família $\left((1-P)^j\right)_{j\in \mathbb{Z}_+}$. Como

$$o((1-P)^j) = j \cdot o(1-P) \geqslant j, \ j \in \mathbb{Z}_+,$$

a família é somável. Assim,

$$P \cdot \sum_{j=0}^{\infty}(1-P)^j = (1-(1-P)) \cdot \sum_{j=0}^{\infty}(1-P)^j = \sum_{j=0}^{\infty}(1-P)^j - \sum_{j=0}^{\infty}(1-P)^{j+1} = 1.$$

Colocando $Q = \sum_{j=0}^{\infty}(1-P)^j$, obtemos o resultado. □

Note que $\mathfrak{m}_{\mathbb{C}[[X]]}$ é um ideal, e a afirmação acima mostra que é maximal. Finalmente, se $I \subset \mathbb{C}[[X]]$ é um ideal próprio, então $I$ não contém nenhuma unidade, o que implica que $I \subset \mathfrak{m}_{\mathbb{C}[[X]]}$. A proposição está demonstrada, já que o isomorfismo $\mathbb{C} \to \mathbb{C}[[X]] \to \mathbb{C}[[X]]/\mathfrak{m}_{\mathbb{C}[[X]]}$ é claro. □

Gostaríamos de identificar os elementos de $\mathbb{C}[[X]]$ que convergem numa vizinhança de zero. Dado $r \in (\mathbb{R}_{>0})^N$, definimos a seguinte pseudonorma (o pseudo significa que a norma pode admitir o valor infinito):

$$\begin{aligned} \|\cdot\|_r : \mathbb{C}[[X]] &\longrightarrow [0,\infty] \\ \sum_{\nu\in\mathbb{Z}_+^N} a_\nu X^\nu &\longmapsto \sum_{\nu\in\mathbb{Z}_+^N} |a_\nu| r^\nu. \end{aligned}$$

**Definição 2.1.6.** Uma série formal $P \in \mathbb{C}[[X]]$ é dita *convergente* se existir $r \in (\mathbb{R}_{>0})^N$ tal que $\|P\|_r < \infty$. O conjunto das séries formais convergentes é denotado por $\mathbb{C}\{X\} = \mathcal{O}_0 = {}_N\mathcal{O}_0$.

*Observação* 2.1.7. Como mostramos no apêndice A, também podemos identficar este conjunto de séries convergentes com o conjunto dos germes de funções holomorfas em $0 \in \mathbb{C}^N$.

Provemos algumas propriedades da função $\|\cdot\|_r$:

**Lema 2.1.8.** *A função $\|\cdot\|_r$ satisfaz as seguintes propriedades:*

(1) *Se $(P_j)_{j\in J}$ é uma família somável em $\mathbb{C}[[X]]$, então*

$$\left\|\sum_{j\in J} P_j\right\|_r \leqslant \sum_{j\in J}\|P_j\|_r,$$

*com igualdade se cada $X^\nu$ aparece em no máximo um $P_j$.*

(2) *$\|P\cdot Q\|_r \leqslant \|P\|_r\|Q\|_r$ para $P,Q \in \mathbb{C}[[X]]$, com igualdade se $P = a_\nu X^\nu$.*

(3) *Se $P \in \mathbb{C}\{X\}$, então $|P(0)| = \lim_{r\to 0^+}\|P\|_r$.*

*Demonstração.* Item 1): Escreva $P_j = \sum_{\nu\in\mathbb{Z}_+^N} a_{\nu,j}X^\nu$. Pela não-negatividade dos termos, podemos fazer a seguinte manipulação:

$$\begin{aligned} \left\|\sum_{j\in J} P_j\right\|_r &= \sum_{\nu\in\mathbb{Z}_+^N}\left|\sum_{j\in J} a_{\nu,j}\right| r^\nu \\ &\leqslant \sum_{\nu\in\mathbb{Z}_+^N}\sum_{j\in J}|a_{\nu,j}|r^\nu \\ &= \sum_{j\in J}\left(\sum_{\nu\in\mathbb{Z}_+^N}|a_{\nu,j}|r^\nu\right) \\ &= \sum_{j\in J}\|P_j\|_r. \end{aligned}$$

Para o segundo item, escrevemos $P = \sum_{\nu \in \mathbb{Z}_+^N} a_\nu X^\nu$ e $Q = \sum_{\nu \in \mathbb{Z}_+^N} b_\nu X^\nu$. Então,

$$\begin{aligned}
\|P \cdot Q\|_r &= \sum_{\nu \in \mathbb{Z}_+^N} \left| \sum_{\nu_1+\nu_2=\nu} a_{\nu_1} b_{\nu_2} \right| r^\nu \\
&\leqslant \sum_{\nu \in \mathbb{Z}_+^N} \sum_{\nu_1+\nu_2=\nu} |a_{\nu_1}||b_{\nu_2}| r^{\nu_1} r^{\nu_2} \\
&= \left( \sum_{\nu \in \mathbb{Z}_+^N} |a_\nu| r^\nu \right) \left( \sum_{\nu \in \mathbb{Z}_+^N} |b_\nu| r^\nu \right) \\
&= \|P\|_r \|Q\|_r.
\end{aligned}$$

Para o último item, observe que a sequência $\|P\|_r$ é decrescente em $r$. Além disso, como $\|P\|_r = \|P - P(0)\|_r + |P(0)|$, podemos supor sem perda de generalidade que $P(0) = 0$. Podemos construir uma representação $P = \sum_{i=1}^N P_i X_i$ onde cada monômio de $P$ aparece em um único termo $P_i X_i$. Pelos itens 1) e 2), temos $\|P\|_r = \sum_{i=1}^N \|P_i\|_r r_i$. Assim, como $\|P_i\|_r < \infty$ se $\|P\|_r < \infty$ e a sequência $\|\cdot\|_r$ é decrescente em $r$, obtemos $\lim_{r \to 0^+} \|P\|_r = 0$, como queríamos. □

**Proposição 2.1.9.** *${}_N\mathcal{O}_0$ é uma $\mathbb{C}$-álgebra local, com ideal maximal dado por $\mathfrak{m}_{{}_N\mathcal{O}_0} = \{P \in {}_N\mathcal{O}_0;\ P(0) = 0\}$.*

*Demonstração.* É suficiente mostrar que, se $P \in {}_N\mathcal{O}_0$ é tal que $P(0) \neq 0$, então a inversa formal $\sum_{j=0}^\infty (1-P)^j$ é convergente. De fato, supondo que $P(0) = 1$ sem perda de generalidade, podemos escolher $r$ tal que $\|1-P\|_r < 1$ pelo lema 2.1.8. Desta forma, $\|\sum_{j=0}^\infty (1-P)^j\|_r \leqslant \sum_{j=0}^\infty \|1-P\|_r^j < \infty$, e o resultado está demonstrado. □

Vamos agora brevemente investigar homomorfismos entre álgebras de séries formais. Antes, demonstramos um lema auxiliar sobre potências do ideal maximal.

**Lema 2.1.10.** *Seja $\mathfrak{m}$ o ideal maximal de $\mathbb{F}_N$ ou de $\mathbb{C}\{X\}$. Então,*
(1) $\mathfrak{m}^j = \{P;\ o(P) \geqslant j\}$.
(2) $\bigcap_{j=1}^\infty \mathfrak{m}^j = \{0\}$.

*Demonstração.* Note que o item 2) é consequência imediata do item 1). Para demonstrar o item 1), observe que a inclusão $\subset$ segue da propriedade $o(P \cdot Q) = o(P) + o(Q)$. Para a inclusão $\supset$, dado $P$ com $o(P) \geqslant j$, podemos escrever $P = \sum_{|\nu|=j} P_\nu X^\nu$ onde cada monômio de $P$ aparece em um único termo $P_\nu X^\nu$. Como $X^\nu \in \mathfrak{m}^j$ (para $|\nu| = j$), obtemos $P \in \mathfrak{m}^j$. Além disso, se $P$ é convergente, então cada $P_\nu$ é convergente, como segue da igualdade $\|P\|_r = \sum_{|\nu|=j} \|P_\nu\|_r r^\nu$. □

**Proposição 2.1.11.** *Seja $\phi : \mathbb{F}_N \to \mathbb{F}_M$ um homomorfismo de $\mathbb{C}$-álgebras. Então,*
(1) *$\phi$ é local (ou seja, $\phi(\mathfrak{m}_{\mathbb{F}_N}) \subset \mathfrak{m}_{\mathbb{F}_M}$) e se $(P_j)_{j \in J}$ é uma família somável, então $\left(\phi(P_j)\right)_{j \in J}$ é somável e satisfaz $\phi\left(\sum_{j \in J} P_j\right) = \sum_{j \in J} \phi(P_j)$.*
(2) *Se $Q_1, \ldots, Q_N \in \mathfrak{m}_{\mathbb{F}_M}$, existe precisamente um homomorfismo de $\mathbb{C}$-álgebras $\phi : \mathbb{F}_N \to \mathbb{F}_M$ que satisfaz $\phi(X_i) = Q_i$ para $i = 1, \ldots, N$. Além disso, $\phi\left(\sum_{\nu \in \mathbb{Z}_+^N} a_\nu X^\nu\right) = \sum_{\nu \in \mathbb{Z}_+^N} a_\nu Q^\nu$.*
(3) *$\phi$ se restringe para um homomorfismo $\phi : {}_N\mathcal{O}_0 \to {}_M\mathcal{O}_0$ se, e somente se, $\phi(X_i) \in {}_M\mathcal{O}_0$ para todo $i = 1, \ldots, N$. Reciprocamente, todo homomorfismo de $\mathbb{C}$-álgebras ${}_N\mathcal{O}_0 \to {}_M\mathcal{O}_0$ admite uma única extensão para um homomorfismo de $\mathbb{C}$-álgebras $\mathbb{F}_N \to \mathbb{F}_M$.*

*Demonstração.* Item 1): Observe que $\mathfrak{a} := \phi^{-1}(\mathfrak{m}_{\mathbb{F}_M})$ é um ideal próprio de $\mathbb{F}_N$, pois não contém o elemento 1 (nossos homomorfismos satisfazem $\phi(1) = 1$ por definição). Além disso, o mapa induzido $\overline{\phi} : \mathbb{F}_N/\mathfrak{a} \to \mathbb{F}_M/\mathfrak{m}_{\mathbb{F}_M} \simeq \mathbb{C}$ é uma bijeção entre espaços $\mathbb{C}$-lineares de dimensão 1. Concluímos que $\mathfrak{a}$ é maximal e que $\phi(\mathfrak{m}_{\mathbb{F}_N}) \subset \mathfrak{m}_{\mathbb{F}_M}$. Em particular, $\phi(\mathfrak{m}^j_{\mathbb{F}_N}) \subset \mathfrak{m}^j_{\mathbb{F}_M}$. Pelo lema 2.1.10, concluímos que $(\phi(P_j))_{j \in J}$ é somável. A igualdade das somas segue do fato de $\phi$ ser um homomorfismo.

Item 2): A existência do homomorfismo é clara escrevendo $\phi(\sum a_\nu X^\nu) := \sum a_\nu Q^\nu$. Isto define um homomorfismo já que $(Q^\nu)_\nu$ é uma família somável. Para a unicidade, escreva $R := \mathbb{F}_N$. Suponha que o $R$-módulo $\mathfrak{m} := \mathfrak{m}_R$ seja gerado por $f_1, \ldots, f_l$. Então, se $k \geqslant 1$, vale a condição

$$R = \sum_{|\nu|<k} \mathbb{C} \cdot f^\nu + \mathfrak{m}^k.$$

(esta igualdade pode ser demonstrada facilmente por indução em $k$). Existe, no máximo, um homomorfismo que leva $f_j$ em $Q_j$: se $\phi, \psi$ são dois homomorfismos com esta propriedade, a aplicação C-linear $\sigma := \phi - \psi$ satisfaz $\sigma(\sum_{|\nu|<k} \mathbb{C} f^\nu) = 0$, e pela igualdade acima, temos $\sigma(R) \subset \mathfrak{m}^k$ para todo $k$. O lema 2.1.10 implica então que $\sigma = 0$.

Item 3): Basta demonstrar que se $Q_j := \phi(X_j) \in \mathbb{C}\{Y_1, \ldots, Y_M\}$, então $\phi(\mathbb{C}\{X_1, \ldots, X_N\}) \subset \mathbb{C}\{Y_1, \ldots, Y_M\}$, o que novamente segue facilmente da propriedade de homomorfismo.

□

2.2. **Os teoremas de Weierstrass.** Em uma variável, uma série não-nula $P = \sum_{j=0}^\infty a_j X^j$ admite uma decomposição da forma

$$P = X^b (a_b + a_{b+1} X + \ldots), \ a_b \neq 0,$$

ou seja, uma decomposição da forma $P = X^b e$, onde $e \in \mathbb{C}[[X]]$ é uma unidade que é convergente se, e somente se, $P$ é convergente. Assim, todo ideal não-nulo de $\mathbb{C}[[X]]$ é principal, gerado por um único monômio $X^b$.

Em mais variáveis, os ideais de $\mathsf{F}_N$ (ou de ${}_N\mathcal{O}_0$) não são mais necessariamente principais, e a teoria é mais complicada. O teorema de Preparação de Weierstrass que provaremos diz que, após uma mudança linear de coordenadas, todo ideal principal em $\mathsf{F}_N$ (ou de ${}_N\mathcal{O}_0$) é gerado por um polinômio mônico da forma

$$X_N^b + a_1 X_N^{b-1} + \ldots + a_b \in \mathsf{F}_{N-1}[X_N], \ a_j(0) = 0, \ j = 1, \ldots, b.$$

(analogamente em ${}_N\mathcal{O}_0$). Introduzimos a seguinte notação: sejam $g \in \mathbb{Z}_+^N$ e $R$ um anel comutativo.

$$R[X]_g = R[X_1, \ldots, X_N]_{(g_1, \ldots, g_N)} = \left\{ P \in R[X]; \deg_{X_j} P \leqslant g_j - 1 \right\}.$$

(por convenção, o grau do polinômio nulo é $-\infty$). No caso de uma variável, temos o clássico teorema da divisão euclidiana.

**Proposição 2.2.1.** *Seja $R$ um anel comutativo com unidade. Se $P \in R[X]$ é um polinômio mônico de grau $b$, então a aplicação*

$$\begin{aligned} R[X] \cdot P \oplus R[X]_b &\to R[X] \\ (q \cdot P, r) &\mapsto qP + r \end{aligned}$$

*é um isomorfismo de $R$-módulos.*

Usamos também as seguintes notações:

$$\mathbb{C}[[X, Y]] := \mathbb{C}[[X_1, \ldots, X_N, Y]], \ \mathbb{C}\{X, Y\} := \mathbb{C}\{X_1, \ldots, X_N, Y\}.$$

**Definição 2.2.2.** Uma série $P \in \mathbb{C}[[X, Y]]$ é dita

(1) *distinguida em $Y$ de ordem $b \in \mathbb{Z}_+$* se $P(0, \ldots, 0, Y) = Y^b \cdot e$, onde $e \in \mathbb{C}[[Y]]$ é uma unidade.
(2) um *polinômio de Weierstrass de grau $b \geqslant 1$ em $Y$* se

$$P = Y^b + \sum_{j=1}^b a_j Y^{b-j},$$

onde $a_j \in \mathfrak{m}_{\mathbb{C}[[X]]}$ para todo $j = 1, \ldots, b$.

**Lema 2.2.3.** *Sejam $P_1, \ldots, P_m \in \mathbb{C}[[X, Y]]$ e $P := P_1 \cdot \ldots \cdot P_m$. Então, $P$ é distinguido em $Y$ se, e somente se, cada $P_j$ é distinguido em $Y$. Se, além disso, $P_j \in \mathbb{C}[[X]][Y]$ for mônico para todo $j = 1, \ldots, m$, então $P$ é um polinômio de Weierstrass se, e somente se, $P_j$ é polinômio de Weierstrass para todo $j = 1, \ldots, m$.*

*Demonstração.* Note que uma série $Q \in \mathbb{C}[[X, Y]]$ só é não-distinguida em $Y$ para alguma ordem $b \in \mathbb{Z}_+$ se $Q(0, Y)$ for identicamente nula. Assim, a primeira parte do lema é trivial. Para a segunda parte, é claro que se $P_j$ é de Weierstrass para todo $j$, então $P = P_1 \cdot \ldots \cdot P_m$ é de Weierstrass. Reciprocamente, suponha que

$$P_1 \cdot \ldots \cdot P_m = Y^b + \sum_{j=1}^b a_j Y^{b-j}, \ a_j \in \mathfrak{m}_{\mathbb{C}[[X]]}, \ j = 1, \ldots, b. \tag{2.2.1}$$

Por hipótese, temos $P_j = Y^{d_j} + \sum_{l=0}^{d_j - 1} b_{lj} Y^l$, onde $b_{lj} \in \mathbb{C}[[X]]$. Repetindo este processo, concluímos que $b_{lj} \in \mathfrak{m}_{\mathbb{C}[[X]]}$ para todo $l, j$, e os polinômios $P_j$ são de Weierstrass. □

Podemos agora enunciar e demonstrar os principais teoremas desta seção.

**Teorema 2.2.4** (Preparação de Weierstrass). *Seja $P \in \mathrm{C}[[X,Y]]$ distinguido em $Y$ de ordem $b$. Então, existem um único polinômio de Weierstrass $\omega \in \mathrm{C}[[X]][Y]$ de grau $b$ e uma única unidade $e \in \mathrm{C}[[X,Y]]$ tais que $P = e{\cdot}\omega$. Além disso, se $P \in \mathrm{C}\{X,Y\}$ (respectivamente, $\mathrm{C}\{X\}[Y]$), então $\omega \in \mathrm{C}\{X\}[Y]$ e $e \in \mathrm{C}\{X,Y\}$ (respectivamente, $e \in \mathrm{C}\{X\}[Y]$).*

**Teorema 2.2.5** (Divisão de Weierstrass). *Seja $P \in \mathrm{C}[[X,Y]]$ distinguido em $Y$ de ordem $b$. Então, a aplicação*

$$\mathrm{C}[[X,Y]] \cdot P \oplus \mathrm{C}[[X]][Y]_b \to \mathrm{C}[[X,Y]]$$
$$(q \cdot P, r) \mapsto qP + r$$

*é um isomorfismo de $\mathrm{C}[[X]]$-módulos. Se $P \in \mathrm{C}\{X,Y\}$, então a aplicação acima induz um isomorfismo*

$$\mathrm{C}\{X,Y\} \cdot P \oplus \mathrm{C}\{X\}[Y]_b \simeq \mathrm{C}\{X,Y\}$$

*de $\mathrm{C}\{X\}$-módulos. Se $P \in \mathrm{C}\{X\}[Y]$, a aplicação acima induz um isomorfismo*

$$\mathrm{C}\{X\}[Y] \cdot P \oplus \mathrm{C}\{X\}[Y]_b \simeq \mathrm{C}\{X\}[Y]$$

*de $\mathrm{C}\{X\}$-módulos.*

Estes teoremas têm o seguinte corolário imediato:

**Corolário 2.2.6.** *Seja $P \in \mathrm{C}[[X,Y]]$ distinguido em $Y$ de ordem $b$. Então, a aplicação canônica*

$$\mathrm{C}[[X]]_b \to \mathrm{C}[[X,Y]]$$
$$(Q_0, \ldots, Q_{b-1}) \mapsto \sum_{j=0}^{b-1} Q_j Y^j$$

*induz um isomorfismo de $\mathrm{C}[[X]]$-módulos*

$$\mathrm{C}[[X]]_b \to C[[X,Y]]/\mathrm{C}[[X,Y]] \cdot P$$

*(analogamente para $P \in \mathrm{C}\{X,Y\}$, onde obtemos isomorfismos de $\mathrm{C}\{X\}$-módulos).*

Vamos explicar brevemente a ideia para demonstrar os teoremas de Weierstrass, olhando primeiro para o caso de uma variável (em que $N = 0$). Podemos supor que $b \geqslant 1$ (já que com $b = 0$, as séries $P$ envolvidas são unidades).Neste caso, $Y^b$ é o único polinômio de Weierstrass de ordem $b$, e existe precisamente uma unidade $e \in \mathrm{C}[[Y]]$ tal que $P = eY^b$. Além disso, $e$ é convergente (respectivamente, polinomial) se, e somente se, $P$ é convergente (respectivamente, polinomial). Isto mostra 2.2.4 no caso $N = 0$, e 2.2.5 segue facilmente substituindo $P$ por $Y^b$.

No caso em que $N \geqslant 1$, vamos alterar $P$ com uma mudança de coordenadas injetiva

$$\phi : \mathrm{C}[[X,Y]] \to \mathrm{C}[[S,T]],$$

obtendo $\phi(P) = e'T^b$. A representação $P = e\omega$ como produto de uma unidade e um polinômio de Wierstrass vem da representação $\phi(P) = eT^b$ em $\mathrm{C}[[S,T]]$, que será dada de forma elementar e explícita. Como $\phi$ preserva convergência e polinômios, os resultados adicionais (com $P$ convergente ou polinomial) seguirão facilmente.

Para implementar formalmente esta estratégia, precisamos de algumas preliminares: seja $b \in \mathrm{N}$ um número positivo e denote por $S$ as variáveis $S_1, \ldots, S_N$. Considere o homomorfismo de álgebras dado por

$$\phi : \mathrm{C}[[X,Y]] \to \mathrm{C}[[S,T]],$$

com $\phi(X_j) = S_j T^b$ e $\phi(Y) = T$ (a existência deste homomorfismo segue da proposição 2.1.11). As propriedades essenciais deste homomorfismos serão descritas por meio de um *peso* $\gamma$: dado um monômio da forma $aS^\sigma T^\tau$ (onde $a \neq 0$), definimos

$$\gamma(aS^\sigma T^\tau) := \tau - b|\sigma| \in \mathrm{Z}.$$

Para uma série $P = \sum a_{\sigma\tau} S^\sigma T^\tau$ e $m \in \mathrm{Z}$, escrevemos

$$\gamma(P) \geqslant m$$

para indicar que apenas monômios com peso $\geqslant m$ aparecem em $P$ (analogamente para $>, \leqslant, <$). Observe que $\gamma(P)$ *não é um número* (a não ser que $P$ seja um monômio): a sentença $\gamma(P) \geqslant m$ é apenas uma abreviação para a afirmação de que não há em $P$ monômios com peso menor do que $m$. Em particular, são válidas as sentenças $\gamma(0) \geqslant m$, $\gamma(0) < m$, $\gamma(0) \leqslant m$ e $\gamma(0) > m$ para todo $m \in \mathrm{Z}$. O lema fundamental é o seguinte:

**Lema 2.2.7.** *O homomorfismo $\phi$ satisfaz as seguintes propriedades:*

(1) *$\phi$ é injetiva.*
(2) $\text{Im}\,\phi = \{P \in \mathbb{C}[[S,T]]; \gamma(P) \geqslant 0\}$.
(3) *Os seguintes resultados são válidos para $P \in \mathbb{C}[[X,Y]]$:*
   (a) *$P$ é convergente se, e somente se, $\phi(P)$ é convergente: mais precisamente, se $(r,s) \in \mathbb{R}^N_{>0} \times \mathbb{R}_{>0}$, então*
$$\|P\|_{(r,s)} = \|\phi(P)\|_{(\tilde{r},s)}, \ \tilde{r} := rs^{-b}.$$
   (b) *$P \in \mathbb{C}[[X]][Y]_{d+1}$ se, e somente se, $\gamma(\phi(P)) < d+1$.*
   (c) *$P$ é distinguido em $Y$ com ordem $b$ se, e somente se, $\phi(P) = eT^b$, $e \in \mathbb{C}[[S,T]]$ unidade.*
   (d) *$P$ é um polinômio de Weierstrass de grau $b$ em $Y$ se, e somente se, $\phi(P) = (1+u)T^b$ para algum $u \in \mathbb{C}[[S,T]$ com $\gamma(u) < 0$ (em particular, $u \in \mathfrak{m}_{\mathbb{C}[[S,T]]}$).*
   (e) *Se $P$ é convergente, então $e$ e $u$ são convergentes nos itens anteriores.*
(4) *Para cada $m \in \mathbb{Z}$ e $P \in \mathbb{C}[[S,T]]$, existe uma única decomposição $P = P_1 + P_2$ em $\mathbb{C}[[S,T]]$ com $\gamma(P_1) < m$ e $\gamma(P_2) \geqslant m$. Se $P$ é convergente, então $P_1$ e $P_2$ também são.*
(5) *Se as séries $P_1, P_2 \in \mathbb{C}[[S,T]]$ são tais que $\gamma(P_j) \geqslant m_j \in \mathbb{Z}$, então $\gamma(P_1P_2) \geqslant m_1 + m_2$. O resultado análogo vale com $\leqslant$.*
(6) *Cada unidade $e \in \mathbb{C}[[S,T]]$ tem uma única decomposição da forma $e = (1+u)\tilde{e}$, onde $\tilde{e}$ é uma unidade com $\gamma(\tilde{e}) \geqslant 0$ e $\gamma(u) < 0$. Se $e$ é convergente, então $\tilde{e}$ e $u$ também são.*

Vejamos como este lema implica os teoremas de Weierstrass:

*Demonstração de 2.2.4:* Se $b = 0$, não há o que provar. Suponha então que $P$ é distinguido em $Y$ com ordem $b \geqslant 1$. Pelo item $3) - c)$ do lema 2.2.7, existe precisamente uma unidade $e' \in \mathbb{C}[[S,T]]$ tal que $\phi(P) = e'T^b$. Aplicando os itens $6)$ e $2)$ do lema, obtemos uma decomposição
$$\phi(P) = e'T^b = (1+u)\tilde{e}T^b = \phi(e)(1+u)T^b,$$
onde $e \in \mathbb{C}[[X,Y]]$ é uma unidade (já que $\phi$ é local). Pelo item $3) - d)$, a série $\omega = e^{-1}P \in \mathbb{C}[[X,Y]]$ é um polinômio de Weierstrass de grau $b$. Para a unicidade, suponha que $P = e^\bullet\omega^\bullet$ seja outra decomposição. Então, pelo item $3) - c)$,
$$\phi(e)(1+u)T^b = \phi(P) = \phi(e^\bullet)\phi(\omega^\bullet) = \phi(e^\bullet)(1+u^\bullet)T^b$$
e $\phi(e) = \phi(e^\bullet)$ pela unicidade do item $6)$. Como $\phi$ é injetiva pelo item $1)$, obtemos $e = e^\bullet$. Para as questões de convergência, os itens $3)$ e $6)$ do lema 2.2.7 implicam que $e$ e $\omega$ são convergentes se $P$ for. Se $P$ é um polinômio em $Y$, é fácil ver que $e$ será um polinômio também (basta aplicar o algoritmo de Euclides em uma variável (proposição 2.2.1) com o anel $R = \mathbb{C}\{X\}$, obter a fatoração e usar a unicidade da divisão de Weierstrass). □

*Demonstração de 2.2.5.* Novamente, no caso $b = 0$ não há o que demonstrar. Pelo teorema 2.2.4, podemos assumir que $P$ é um polinômio de Weierstrass de grau $b \geqslant 1$. Pelo item $3) - d)$ do lema 2.2.7, existe uma unidade $e \in \mathbb{C}[[S,T]]$ tal que $\phi(P) = eT^b$. Provemos a existência da divisão: usando o item $4)$ do lema, dado $Q \in \mathbb{C}[[X,Y]]$, existe uma decomposição (aplicada a $e^{-1}\phi(Q)$)
$$e^{-1}\phi(Q) = N + M,$$
onde $\gamma(N) \geqslant b$ e $\gamma(M) < b$. Como $\gamma(N) \geqslant b$, todo monômio em $N$ possui (pelo menos) $T^b$, logo podemos escrever $N = LT^b$. Como $\gamma(N) \geqslant b$, é claro então que $\gamma(L) \geqslant 0$. Além disso, temos $\gamma(eM) \geqslant 0$: de fato, como $\phi(P) = eT^b$, os itens $2)$ e $5)$ do lema 2.2.7 implicam que $\gamma(LeT^b) \geqslant 0+0 = 0$. Assim, $\gamma(eM) = \gamma(\phi(Q) - eLT^b) \geqslant 0$. Assim, usando o item $2)$, existem $q, r \in \mathbb{C}[[X,Y]]$ com $\phi(q) = L$ e $\phi(r) = eM$. Desta maneira,
$$\phi(qP + r) = LeT^b + eM = \phi(Q),$$
logo $Q = qP + r$ pelo item $1)$. Finalmente, $\gamma(\phi(r)) = \gamma(eM)$, mas $\gamma(e) \leqslant 0$ (pois podemos supor que $e = 1+u$, onde $\gamma(u) < 0$, o que implica que $\gamma(e) \leqslant 0$), donde $\gamma(eM) \leqslant 0 + b - 1 = b - 1$. Assim, pelo item $3) - b)$ do lema, $r \in \mathbb{C}[[X]][Y]_b$.

Provemos a unicidade: se $Q = qP + r$, então $\phi(P) = eT^b$ e temos a decomposição
$$e^{-1}\phi(Q) = e^{-1}\phi(q)\phi(P) + e^{-1}\phi(r) = \phi(q)T^b + e^{-1}\phi(r).$$
Como $\phi$ é injetiva, $q$ e $r$ ficam unicamente determinados desde que $\gamma(\phi(q)T^b) \geqslant b$ e $\gamma(e^{-1}\phi(r)) < b$ (conforme o item $4)$ do lema). Note que $\gamma(\phi(q)T^b) \geqslant 0 + b = b$ (pois $\gamma(T^b) = b$ e $\phi(q)$ está na imagem de $\phi$, logo o item $2)$ do lema implica que $\gamma(\phi(q)) \geqslant 0$). Para o outro termo, podemos escrever $u = e - 1$ com $\gamma(u) < 0$, e portanto, $e^{-1} = \sum_{j=0}^{\infty}(-u)^j$. Como $\gamma(u^0) = \gamma(1) = 0$ e $\gamma(u) < 0$, obtemos $\gamma(u^j) < 0$, logo $\gamma(e^{-1}) \leqslant 0$. Segue então que $\gamma(e^{-1}\phi(r)) \leqslant 0 + b - 1 = b - 1$.

Se $P$ e $Q$ forem convergentes, então $LT^b$ e $M$ também são, logo $q$ e $r$ também são. Se $Q$ é um polinômio em $Y$, novamente aplicamos o algoritmo de Euclides (proposição 2.2.1) e usamos a unicidade da fatoração de Weierstrass. A demonstração está completa. □

Resta agora demonstrar o lema:

*Demonstração de 2.2.7:* Item 1) : A injetividade é uma consequência imediata do fato do mapa $f : \mathbb{Z}_+^N \times \mathbb{Z}_+ \to \mathbb{Z}_+^N \times \mathbb{Z}_+$ dado por $f(\sigma,\tau) = (\sigma, \tau + b|\sigma|)$ ser sobrejetivo (de fato, é uma bijeção).

Item 2): Vamos provar a inclusão $\subset$: se $P \in \mathbb{C}[[X,Y]]$, então todo monômio que aparece em $\phi(P)$ é da forma $S^\sigma T^{\tau+b|\sigma|}$, que tem peso $\gamma(S^\sigma T^{\tau+b|\sigma|}) = \tau + b|\sigma| - b|\sigma| = \tau \geqslant 0$. Para a inclusão $\supset$, considere uma série $Q = \sum a_{\sigma\tau} S^\sigma T^\tau$ com $\gamma(Q) \geqslant 0$. Isto implica que $a_{\sigma\tau} \neq 0$ somente se $\tau - b|\sigma| \geqslant 0$. Definimos então

$$P = \sum_{(\sigma,\tau)\in\mathbb{Z}_+^{N+1}} a_{\sigma\tau} X^\sigma Y^{\tau - b|\sigma|}.$$

Observe que $P$ está bem definido, pois onde $\tau - b|\sigma| < 0$, o coeficiente $a_{\sigma\tau}$ se anula. É claro que $\phi(P) = Q$, donde $Q \in \operatorname{Im}\phi$.

Item $3) - a)$ : Basta provar a fórmula para monômios $X^\sigma Y^\tau$. Neste caso, dados $(r,s) \in \mathbb{R}_{>0}^N \times \mathbb{R}_{>0}$,

$$\|\phi(X^\sigma Y^\tau)\|_{(\tilde{r},s)} = \tilde{r}^\sigma s^{\tau+b|\sigma|} = r^\sigma s^{-b|\alpha|} s^{\tau+b|\alpha|} = r^\sigma s^\tau = \|X^\sigma Y^\tau\|_{(r,s)},$$

onde $\tilde{r} := rs^{-b}$. Para o item $3) - b)$, seja $P \in \mathbb{C}[[X]][Y]_{d+1}$. Podemos escrever

$$P = \sum_{\sigma\in\mathbb{Z}_+^N} \sum_{j=0}^{d} a_{\sigma j} X^\sigma Y^j,\ a_{\sigma j} \in \mathbb{C}.$$

Assim, $\phi(P) = \sum a_{\sigma j} X^\sigma Y^{j+b|\sigma|}$, e o peso de cada monômio destes é $j + b|\sigma| - b|\sigma| = j \leqslant d < d+1$. Assim, $\gamma(\phi(P)) < d+1$. Reciprocamente, se $P = \sum a_{\sigma\tau} X^\sigma Y^\tau$ é tal que $\gamma(\phi(P)) < d+1$, então $\tau + b|\sigma| - b|\sigma| = \tau < d+1$ para todo $\tau$, ou seja, $a_{\alpha\tau} = 0$ para $\tau \geqslant d+1$, logo $P \in \mathbb{C}[[X]][Y]_{d+1}$. Para o item $3) - c)$, fazemos a seguinte observação: uma série $P = \sum a_{\sigma\tau} X^\sigma Y^\tau$ é distinguida em $Y$ de ordem $b$ se, e somente se, $a_{0\tau} = 0$ para $\tau < b$ e $a_{0b} \neq 0$. Desta forma, todos os monômios em $\phi(P) = \sum a_{\sigma\tau} S^\sigma T^{\tau+b|\sigma|}$ contém $T^b$ (isto é claro se $\sigma \neq 0$, e quando $\sigma = 0$ segue da observação que acabamos de fazer), ou seja, $\phi(T) = eT^b$. Como o termo constante de $e \in \mathbb{C}[[S,T]]$ é $a_{0b} \neq 0$, $e$ é uma unidade. Reciprocamente, se $\phi(P) = eT^b$ para alguma unidade $e$, então $a_{0\nu} = 0$ para $\nu < b$ e $a_{0b} \neq 0$, provando que $P$ é distinguido de ordem $b$ em $Y$. Para o item $3) - d)$, escreva $P = Y^b + f_1 Y^{b-1} + \ldots + f_b$, onde $f_j \in \mathfrak{m}_{\mathbb{C}[[X]]}$. Então, pelo item $3) - c)$,

$$eT^b = \phi(P) = T^b + \sum_{j=1}^{b} \phi(f_j) T^{b-j}.$$

Como $\phi(f_j)$ não depende de $T$, temos $e(0) = 1$. Colocando $u := e - 1 = T^{-b}\phi(\sum f_j Y^{b-j})$, o valor $u(0)$ é 0. Como $\sum f_j Y^{b-j} \in \mathbb{C}[[X]][Y]_b$, usando o item $3) - b)$ temos $\gamma(\phi(\sum f_j Y^{b-j})) \leqslant b-1$. Isto implica que $\gamma(u) < 0$, como queríamos. Reciprocamente, se $\phi(P) = (1+u)T^b$ com $\gamma(u) < 0$, pelo item $3) - c)$, $P$ é distinguido em $Y$ de grau $b$. Além disso, $\phi(P - Y^b) = uT^b$ com $\gamma(u) < 0$. Isto implica que $\gamma(uT^b) \leqslant b-1$, e pelo item $3) - b)$, $P - Y^b \in \mathbb{C}[[X]][Y]_b$, donde $P$ é polinômio de Weierstrass. Para o item $3) - e)$, o lema 2.1.8 implica que $QT^b$ é convergente se, e somente se, $Q$ é convergente. Desta forma, pela injetividade de $\phi$ obtemos o resultado.

Item 4): Fixado $P$, denote por $P_1$ a soma dos monômios de $P$ com peso menor do que $m$ e defina $P_2 = P - P_1$. Obtemos $\|P\|_r = \|P_1\|_r + \|P_2\|_r$, donde $P_1$ e $P_2$ são convergentes se, e somente se, $P$ for.

Item 5): É trivial da definição de $\phi$.

Item 6): Podemos supor, sem perda de generalidade, que $e(0) = 1$. Vamos introduzir o logaritmo e a exponencial. Se $u \in \mathbb{C}[[S,T]]$, podemos definir

$$\log(1+u) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^{j-1} u^j}{j},\quad \exp(u) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{u^j}{j!}$$

(as famílias são claramente somáveis pois $u(0) = 0$). É formal verificar que as regras computacionais usuais destas funções são válidas (i.e., $\exp(\log u) = u$, $\log(uv) = \log u + \log v$ e $\exp(u+v) = \exp(u)\exp(v)$). Considere a decomposição $\log e = P_1 + P_2$ com $\gamma(P_1) < 0$ e $\gamma(P_2) > 0$ (conforme o item 4)). Coloque $\tilde{e} = \exp P_2 := \exp(P_2(0)) \cdot \exp(P_2 - P_2(0))$ e $u = \exp(P_1) - 1$. Como $\gamma(P_2^j) \geqslant 0$ para todo $j$, $\gamma(\tilde{e}) \geqslant 0$ e $\gamma(u) < 0$. Assim,

$$e = \exp\log e = \exp(P_1 + P_2) = (1+u)\tilde{e},$$

como queríamos. Já para a unicidade, suponha que $e = (1+u)\tilde{e}$ com $\gamma(\tilde{e}) \geqslant 0$ e $\gamma(u) < 0$ (note que $\tilde{e}(0) = 1$ também). Desta forma, $\log e = \log(1+u) + \log \tilde{e}$. Como $\gamma(u) < 0$, $\gamma(\log(1+u)) < 0$ e $\gamma(\log \tilde{e}) \geqslant 0$. Aplicando o resultado de unicidade do item 4), segue que a decomposição é única. A demonstração está (finalmente) completa! □

Dada uma série não-nula $P \in \mathbb{C}[[X,Y]]$, ela não será (em geral) distinguida em $Y$, mas sempre podemos aplicar uma mudança de coordenadas para obter uma série distinguida: dado $c = (c_1, \ldots, c_N) \in \mathbb{C}^N$, definimos a mudança de coordenadas

$$\sigma_c : \mathbb{C}[[X,Y]] \to \mathbb{C}[[X,Y]]$$

dada por $\sigma_c(X_j) = X_j + c_j Y$ e $\sigma_c(Y) = Y$. É claro que $\sigma_c$ é um automorfismo de $\mathbb{C}[[X,Y]]$, com inversa $\sigma_{-c}$.

**Proposição 2.2.8.** *Sejam $P_1, \ldots, P_m \in \mathbb{C}[[X.Y]] \backslash \{0\}$. Então, existe uma mudança de coordenadas $\sigma_c$ que faz todos os $P_i$ distinguidos em $Y$.*

*Demonstração.* Coloque $P := P_1 \cdot \ldots \cdot P_m$, que é não-nulo já que $\mathbb{C}[[X,Y]]$ é um domínio (ver a prova de 2.1.4). Escrevemos $P = \sum_{j=b}^{\infty} P_j$, onde $P_j$ é um polinômio homogêneo de grau $j$ e $P_b \neq 0$. Então, o polinômio $P_b(X,1) \in \mathbb{C}[X]$ não é nulo: se $P_b(z,1) = 0$ para todo $z \in \mathbb{C}^N$, então teríamos $P_b(z, z_{N+1}) = 0$ para todo $z \in \mathbb{C}^N$ e $z_{N+1} \neq 0$, o que implicaria que $P_b = 0$ por continuidade. Escolha então $c \in \mathbb{C}^N$ com $P_b(c,1) \neq 0$. Temos

$$\sigma_c(P) = \sum_{j=b}^{\infty} P_j(X_1 + c_1 Y, \ldots, X_N + c_N Y, Y).$$

Fazendo $X = 0$, temos (por homogeneidade)

$$\sigma_c(P)(0,Y) = P_b(c,1)Y^b + \ldots.$$

Como $P_b(c,1) \neq 0$, $\sigma_c(P)$ é distinguido em $Y$ (de ordem $b$), e portanto, $P_j$ é distinguido em $Y$ para $j = 1, \ldots, m$. □

## 3. Propriedades algébricas de ${}_N\mathcal{O}_0$ e $\mathcal{F}_N$

Usando os teoremas de Weierstrass que demonstramos, podemos investigar a estrutura algébrica de ${}_N\mathcal{O}_0$.

**Definição 3.0.1.** Um anel $R$ é *noetheriano* se todo ideal $I \subset R$ for finitamente gerado. Um módulo $M$ sobre um anel $R$ é noetheriano se todo $R$-submódulo de $M$ é finitamente gerado.

Vamos mostrar um lema útil sobre $R$-módulos noetherianos:

**Lema 3.0.2.** *Sejam $R$ um anel comutativo com unidade e*

$$0 \to M' \xrightarrow{\alpha} M \xrightarrow{\beta} M'' \to 0$$

*uma sequência exata de $R$-módulos. Então, $M$ é noetheriano se, e somente se, $M'$ e $M''$ forem noetherianos. Em particular, somas diretas finitas, submódulos e quocientes de módulos noetherianos são noetherianos.*

*Demonstração.* Suponha que $M$ é noetheriano. Seja $T' \subset M'$ um submódulo. Então, $\alpha(T') \subset M$ é um submódulo, e existem $m_1, \ldots, m_p \in \alpha(T')$ que geram $\alpha(T')$. Escolhendo $m'_j \in T'$ com $\alpha(m'_j) = m_j$ e usando a injetividade de $\alpha$, segue que $m'_1, \ldots, m'_p$ geram $T'$. Seja agora $T'' \subset M''$ um submódulo. Então, $\beta^{-1}(T'')$ é um submódulo de $M$, que é finitamente gerado por $m_1, \ldots, m_r \in \beta^{-1}(T'')$. Definindo $m''_j = \beta(m_j) \in T''$, obtemos geradores para $T''$ (usando a sobrejetividade de $\beta$). Reciprocamente, suponha que $M'$ e $M''$ sejam noetherianos e seja $T \subset M$ um submódulo. Então, $T'' := \beta(T)$ e $T' := \alpha^{-1}(T)$ são submódulos de $M''$ e $M'$, respectivamente. Sejam $n'_1, \ldots, n'_l \in T'$ e $n''_1, \ldots, n''_p \in T''$ conjuntos de geradores. Como $\beta$ é sobrejetiva, podemos tomar $m_1, \ldots, m_p \in M$ com $\beta(m_j) = n''_j$ para todo $j$. Escreva $\tilde{m}_k := \alpha(n'_k)$ para todo $k$. Afirmamos que $\{m_1, \ldots, m_p, \tilde{m}_1, \ldots, \tilde{m}_l\}$ geram $T$. De fato, dado $t \in T$, podemos encontrar $\alpha_1, \ldots, \alpha_p \in R$ tais que $t - \sum_{j=1}^{p} \alpha_j m_j \in \ker \beta \cap T = \operatorname{img} \alpha \cap T$. Existe então $t' \in T'$ com $\alpha(t') = t - \sum_{j=1}^{p} \alpha_j m_j$. Escrevendo $t' = \sum_{k=1}^{l} \beta_k n'_k$, obtemos

$$t = \sum_{j=1}^{p} \alpha_j m_j + \sum_{k=1}^{l} \beta_k \tilde{m}_k,$$

como queríamos. As afirmações restantes seguem considerando as sequências exatas óbvias. □

Em analogia com o teorema da base de Hilbert (que diz que se $R$ é noetheriano então $R[X]$ é noetheriano), temos o

**Teorema 3.0.3.** *Os aneis ${}_N\mathcal{O}_0$ e $\mathcal{F}_N$ são noetherianos.*

*Demonstração.* Fazemos o caso ${}_N\mathcal{O}_0$, já que o caso de $\mathcal{F}_N$ é completamente análogo. Procedemos por indução em $N$: se $N = 0$, então ${}_0\mathcal{O}_0 = \mathbb{C}$, que é um corpo (em particular, noetheriano). Suponha agora que $N \geqslant 1$ e que ${}_{N-1}\mathcal{O}_0$ é noetheriano. Seja $\mathfrak{a} \subset {}_N\mathcal{O}_0$ um ideal não-nulo. Considere o caso em que existe $f \in \mathfrak{a}$ distinguido com respeito a $X_N$. Então, pelo corolário 2.2.6, $R := {}_N\mathcal{O}_0/({}_N\mathcal{O}_0 \cdot f)$ é um ${}_{N-1}\mathcal{O}_0$-módulo livre e finitamente gerado, logo pelo lema 3.0.2 e pela hipótese de indução, $R$ é noetheriano como ${}_{N-1}\mathcal{O}_0$-módulo. Considerando a projeção $\bar{\mathfrak{a}} \subset R$ de $\mathfrak{a}$ no quociente, esta é gerada por um número finito de elementos $\{\overline{f}_1, \ldots, \overline{f}_s\} \in \bar{\mathfrak{a}}$ sobre ${}_{N-1}\mathcal{O}_0$ (em particular, sobre ${}_N\mathcal{O}_0$). Escolhendo representantes $f_j \in \mathfrak{a}$, obtemos $\mathfrak{a}$ gerado por $\{f, f_1, \ldots, f_s\}$.

No caso de $\mathfrak{a}$ não conter um elemento distinguido em $X_N$, escolhemos $f \neq 0$ em $\mathfrak{a}$ e, usando a proposição 2.2.8, existe uma mudança de coordenadas $\sigma_c$ tal que $\sigma_c(f)$ é distinguido em $X_N$. Desta forma, $\sigma(\mathfrak{a})$ é finitamente gerado, e portanto $\mathfrak{a}$ também é. □

## 4. Feixes coerentes

Fixamos, nesta seção, um espaço topológico $T$ e um feixe de aneis comutativos unitais $\mathcal{R}$ em $T$.

**Definição 4.0.1.** Um $\mathcal{R}$-módulo sobre $T$ é um feixe de conjuntos $\mathcal{G}$ em $T$ tal que $\mathcal{G}(U)$ é um $\mathcal{R}(U)$-módulo para todo aberto $U \subset V$, e as aplicações de restrição $\mathcal{G}(U) \to \mathcal{G}(V)$ são homomorfismos compatíveis com a restrição $\mathcal{R}(U) \to \mathcal{R}(V)$ para $V \subset U$ abertos de $T$.

**Exemplo 4.0.2.** Um exemplo de $\mathcal{R}$-módulo é o *feixe livre* $\mathcal{R}^p$, dado por $\mathcal{R}^p(U) = \underbrace{\mathcal{R}(U) \times \ldots \times \mathcal{R}(U)}_{p}$ ($R^0(U) = \{0\}$) para $U \subset T$ aberto, com a estrutura usual de $\mathcal{R}(U)$-módulo. O stalk deste feixe num ponto $t \in T$ é, evidentemente, $\mathcal{R}^p_t = (\mathcal{R}_t)^p$, onde $\mathcal{R}_t$ é o stalk do feixe $\mathcal{R}$ em $t$.

**Definição 4.0.3.** Um $\mathcal{R}$-módulo $\mathcal{G}$ sobre $T$ é de *tipo finito* se, para todo $t \in T$, existirem uma vizinhança $U \subset T$ aberta de $t$ e uma sequência exata

$$\mathcal{R}^p\big|_U \to \mathcal{G}\big|_U \to 0.$$

Vejamos uma condição equivalente a esta:

**Lema 4.0.4.** *Seja $\mathcal{G}$ um $\mathcal{R}$-módulo sobre $T$. Então, $\mathcal{G}$ é de tipo finito se, e somente se, para cada ponto $t_0 \in T$ existem uma vizinhança aberta $U \subset T$ de $t_0$ e um número finito de seções $s_1, \ldots, s_p \in \mathcal{G}(U)$ tais que $\operatorname{span}_{\mathcal{R}_t}\{(s_1)_t, \ldots, (s_p)_t\} = \mathcal{G}_t$ para todo $t \in U$.*

*Demonstração.* Suponha que $\mathcal{G}$ seja de tipo finito. Dado $t_0 \in T$, sejam $U$ a vizinhança de $t_0$ e $\phi : \mathcal{R}^p\big|_U \to \mathcal{G}\big|_U$ o epimorfismo dados pela definição. Considere as seções canônicas $e_i \in \mathcal{R}^p(U)$ dadas por $e_i = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$, com 1 na $j$-ésima posição. Defina $s_i := \phi(e_i) \in \mathcal{G}(U)$. Dados $t \in T$ e $v_t \in \mathcal{G}_t$, existem elementos $a_1, \ldots, a_p \in \mathcal{R}_t$ tais que

$$v_t = \phi_t\left(\sum_{j=1}^{p} a_j(e_j)_t\right) = \sum_{j=1}^{p} a_j(s_j)_t,$$

pois $\phi_t$ é homomorfismo de $\mathcal{R}_t$-módulos e $(\phi(e_i))_t = \phi_t((e_i)_t)$. Reciprocamente, se existem as seções $s_1, \ldots, s_p$ indicadas, basta definir $\phi(V) : \mathcal{R}^p(V) \to \mathcal{G}(U)$ por

$$\phi(b_1, \ldots, b_p) = \sum_{j=1}^{p} b_i \rho_{UV}(s_i),$$

onde $V \subset U$ é aberto. □

**Proposição 4.0.5.** *Seja $\mathcal{G}$ um $\mathcal{R}$-módulo de tipo finito sobre $T$. Se $s_1, \ldots, s_p \in \mathcal{G}(T)$ geram um stalk $\mathcal{G}_a$ sobre $\mathcal{R}_a$, então existe uma vizinhança $U \subset T$ de $a$ tal que $s_1, \ldots, s_p$ geram o stalk $\mathcal{G}_y$ sobre $\mathcal{R}_y$ para todo $y \in U$.*

*Demonstração.* Como $\mathcal{G}$ tem tipo finito, dado $a \in T$ existe uma vizinhança $V$ de $a$ e um número finito de seções $r_1, \ldots, r_q$ que geram (sobre $\mathcal{R}_y$) os stalks $\mathcal{G}_y$ para todo $y \in V$ (pelo lema 4.0.4). Por hipótese, podemos escrever

$$r_i = \sum_{j=1}^{p} a_{ij} s_j, \ a_{ij} \in \mathcal{R}_a.$$

Como este número finito de equações vale em $a$, também vale numa vizinhança de $a$ (o conjunto dos pontos onde duas seções coincidem é aberto, conforme A.0.9). $\square$

Vejamos alguns exemplos.

**Exemplo 4.0.6.** Seja $\phi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ um morfismo de $\mathcal{R}$-módulos. Se $\mathcal{F}$ é de tipo finito, então $\operatorname{Im}\phi$ é de tipo finito (de fato, basta aplicar o morfismo $\phi$ ao conjunto de geradores locais de $\mathcal{F}$).

**Exemplo 4.0.7.** Nem todo $\mathcal{R}$-módulo de tipo finito é gerado por seções globais. Para ver isto, considere $X = \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ o espaço projetivo complexo de dimensão 1, com a estrutura usual de superfície de Riemann. Seja $\mathcal{R} = \mathcal{O}_X$ o feixe das funções holomorfas, e considere o $\mathcal{R}$-módulo $\mathcal{I}$ dado por

$$\mathcal{I}(U) = \begin{cases} \left\{ f \in \mathcal{O}_X(U);\ f(0) = 0 \right\}, & 0 \in U, \\ \mathcal{O}_X(U), & 0 \notin U. \end{cases}$$

Este feixe é de tipo finito (nos abertos contendo zero, ele é gerado pela função coordenada $z$) e não-nulo, porém não possui geradores globais, já que toda função holomorfa em $X$ é constante.

Precisamos selecionar na categoria dos $\mathcal{R}$-módulos de tipo finito uma subcategoria plena apropriada em que núcleos e conúcleos de homomorfismos existam. Considere um número finito $s_1, \ldots, s_p$ de seções globais de um $\mathcal{R}$-módulo $\mathcal{G}$ em $T$. O núcleo do homomorfismo

$$\begin{aligned} \phi : \mathcal{R}^p &\to \mathcal{G} \\ \sum_{j=1}^{p} r_j e_j &\mapsto \sum_{j=1}^{p} r_j s_j \end{aligned}$$

é chamado de *feixe de relações* entre as seções $s_1, \ldots, s_p$, e o denotamos por $\ker(s_1, \ldots, s_p)$.

**Definição 4.0.8.** Um $\mathcal{R}$-módulo de tipo finito $\mathcal{G}$ sobre $T$ é *coerente* se, para todo aberto $U \subset T$ e para toda coleção $s_1, \ldots, s_p \in \mathcal{G}(U)$ de seções sobre $U$, o feixe $\ker(s_1, \ldots, s_p)$ for de tipo finito em $U$.

*Observação* 4.0.9. Um submódulo $\mathcal{F}$ de um $\mathcal{R}$-módulo coerente $\mathcal{G}$ é coerente se, e somente se, for de tipo finito.

*Observação* 4.0.10. Note também que coerência é uma propriedade local: um feixe $\mathcal{G}$ de $\mathcal{R}$-módulos é coerente se, e somente se, para cada ponto $t \in T$ existir um aberto $U \subset T$ contendo $t$ tal que $\mathcal{G}\big|_U$ é coerente.

*Observação* 4.0.11. Se $\mathcal{G}$ é um $\mathcal{R}$-módulo coerente, então se $\phi : \mathcal{R}^p \to \mathcal{G}$ é um homomorfismo qualquer de $\mathcal{R}$-módulos, $\ker\phi$ é de tipo finito .

*Observação* 4.0.12. Se $\phi : S \to T$ é uma função contínua entre espaços topológicos e $\mathcal{G}$ é um $\mathcal{R}$-módulo coerente sobre $T$, então $\phi^{-1}\mathcal{G}$ é um $\phi^{-1}\mathcal{R}$-módulo coerente sobre $S$.

**Lema 4.0.13.** *Para dois $\mathcal{R}$-homomorfismos $\phi : \mathcal{R}^p \to \mathcal{G}$ e $\psi : \mathcal{R}^q \to \mathcal{G}$ com mesma imagem, $\ker\phi$ é de tipo finito se, e somente se, $\ker\psi$ é de tipo finito.*

*Demonstração.* Podemos supor sem perda de generalidade que $\mathcal{G} = \operatorname{Im}\phi$. Suponha que $\ker\phi$ é globalmente finitamente gerado, ou seja, existe um epimorfismo $\mathcal{R}^{\tilde{p}} \to \ker\phi$ (o caso geral será repetir este argumento considerando a restrição dos feixes a um aberto $U \subset T$). Considere a composição (denotada por $\gamma$)

$$\mathcal{R}^{\tilde{p}} \ \square\ \ker\phi \hookrightarrow \mathcal{R}^p.$$

Sejam $e_i$ e $f_j$ os geradores canônicos de $\mathcal{R}^p$ e $\mathcal{R}^q$, respectivamente. Por hipótese, existem seções $a_{ij}, b_{ji} \in \mathcal{R}(T)$ para $i = 1, \ldots, p$, $j = 1, \ldots, q$ tais que

$$\phi(e_i) = \sum_{j=1}^{q} \alpha_{ij}\psi(f_j), \quad \psi(f_j) = \sum_{i=1}^{p} \beta_{ji}\phi(e_i).$$

Definimos então os morfismos $\lambda : \mathcal{R}^p \to \mathcal{R}^q$ e $\mu : \mathcal{R}^q \to \mathcal{R}^p$ por

$$\lambda(e_i) = \sum_{j=1}^{q} \alpha_{ij} f_j, \quad \mu(f_j) = \sum_{i=1}^{q} \beta_{ji} e_i$$

(com extensão $\mathcal{R}$-linear). Finalmente, defina $\delta : \mathcal{R}^{\tilde{p}} \oplus \mathcal{R}^q \to \mathcal{R}^q$ por

$$\delta(r, s) = s + \lambda(\gamma(r) - \mu(s)).$$

Afirmamos que o diagrama

$$\begin{tikzcd} R^{\tilde{p}} \arrow[r, "\gamma"] & R^p \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, bend right, "\lambda"'] & G \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\ R^{\tilde{p}} \oplus R^q \arrow[r, "\delta"] & R^q \arrow[r, "\psi"] \arrow[u, bend right, "\mu"'] & G \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

é comutativo (de fato, temos $\psi \circ \lambda = \phi$ e $\phi \circ \mu = \psi$, já que coincidem nos geradores por definição dos morfismos $\lambda$ e $\mu$). Afirmamos que a segunda linha é exata, ou seja, que $\operatorname{Im} \delta = \ker \psi$. De fato, se $(r, s) \in R^{\tilde{p}} \oplus R^q$, então

$$\psi(\delta(r, s)) = \psi\left(s + \lambda(\gamma(r) - \mu(s))\right) = \psi(s) + \phi(\gamma(r)) - \psi(s) = \phi(\gamma(r)) = 0,$$

já que a primeira linha é evidentemente exata, e temos $\operatorname{Im} \delta \subset \ker \psi$. Reciprocamente, tome $s \in \ker \psi$. Então, $\mu(s) \in\in \ker \phi$, pois $\phi(\mu(s)) = \psi(s) = 0$. Como temos um epimorfismo $R^{\tilde{p}}$ □ $\ker \phi$, existe $r \in R^{\tilde{p}}$ tal que $\gamma(r) = \mu(s)$. Desta forma,

$$\delta(r, s) = s + \lambda(\gamma(r) - \mu(s)) = s.$$

Assim, $\ker \psi \subset \operatorname{Im} \delta$ e a sequência é exata. Desta forma, temos um epimorfismo $R^{\tilde{p}+q} = R^{\tilde{p}} \oplus R^q$ □ $\ker \psi$, e $\ker \psi$ tem tipo finito. A outra direção segue invertendo os papeis de $\phi$ por $\psi$ no argumento acima. □

*Observação* 4.0.14. Observe que, se o espaço topológico $T$ se reduz a um ponto, estamos apenas estudando módulos coerentes sobre um anel.

Até agora, é difícil dar exemplos de feixes coerentes (além do feixe nulo). Entretanto, vamos investigar as propriedades algébricas que a categoria dos feixes coerentes possui. O teorema a seguir é fundamental.

**Teorema 4.0.15.** *Seja*

$$0 \to G' \to G \to G'' \to 0$$

*uma sequência exata de* $R$*-módulos sobre* $T$*. Se dois dos três feixes* $G', G, G''$ *forem coerentes, então o terceiro também é.*

Este resultado será consequência da seguinte

**Proposição 4.0.16.** *Seja*

$$G_1 \xrightarrow{\varphi_1} G_2 \xrightarrow{\varphi_2} G \xrightarrow{\varphi} G_3 \xrightarrow{\varphi_3} G_4$$

*uma sequência exata de* $R$*-módulos, e suponha que* $G_i$ *é coerente para* $i = 1, 2, 3, 4$*. Então,* $G$ *é coerente.*

É evidente que a proposição 4.0.16 implica o teorema 4.0.15, já que o feixe nulo é coerente.

*Demonstração de 4.0.16.* Vamos mostrar inicialmente que $G$ é de tipo finito. Fixe um ponto $t \in T$. Existe uma vizinhança de $t$ tal que restringindo os feixes a esta vizinhança, temos o seguinte diagrama:

(4.0.1)
$$\begin{tikzcd} R^{p_2} \arrow[d, two heads, "\chi"] & R^p \arrow[r, two heads, "\psi"] \arrow[d, dashed, "\omega"] & \ker(\phi_3 \circ \tau) \arrow[r, hook] & R^{p_3} \arrow[d, two heads, "\tau"] \arrow[dr, "\varphi_3 \circ \tau"] & \\ G_2 \arrow[r, "\varphi_2"] & G \arrow[rr, "\varphi"] & & G_3 \arrow[r, "\varphi_3"] & G_4 \end{tikzcd}$$

Usamos no diagrama acima o fato de $G_2$ e $G_3$ serem de tipo finito e, como $G_4$ é coerente, o núcleo $\ker(\phi_3 \circ \tau)$ também é de tipo finito (ver observação 4.0.11). Como

$$\tau\left(\psi(R^p)\right) \subset \ker \phi_3$$

e $\ker \phi_3 = \operatorname{Im} \phi$, podemos encontrar $g_1, \ldots, g_p \in G$ tais que $\phi(g_j) = \tau(\psi(e_j))$ (onde $e_1, \ldots, e_p$ são os geradores canônicos de $R^p$). Definindo $\omega : R^p \to G$ por $\omega(e_j) = g_j$ (e estendendo por $R$-linearidade), concluímos que o diagrama 4.0.1 é comutativo. Para mostrar que $G$ é de tipo finito, vamos provar que o mapa

$$\begin{aligned} \phi_2 \chi + \omega : R^{p_2} \oplus R^p &\longrightarrow G \\ (r, s) &\longmapsto \phi_2(\chi(r)) + \omega(s) \end{aligned}$$

é sobrejetivo. De fato, seja $g \in G$. Como $\tau$ é sobrejetiva, existe $r_3 \in R^{p_3}$ com $\tau(r_3) = \phi(g)$. Pela exatidão da sequência, $\phi(g) \in \ker \phi_3$ e então $\tau(r_3) \in \ker \phi_3$, donde $r_3 \in \ker(\phi_3 \circ \tau)$. Como $\psi$ é sobrejetiva, existe $s \in R^p$ tal que $\psi(s) = r_3$. Considere agora $g - \omega(s)$. Aplicando $\phi$, obtemos

$$\phi(g - \omega(s)) = \phi(g) - \tau \circ \psi(s) = \phi(g) - \tau(r_3) = 0.$$

Novamente, pela exatidão da sequência, existe $g_2 \in \mathsf{G}_2$ com $\phi_2(g_2) = g - \omega(s)$, e como $\chi$ é sobrejetivo, existe $r \in \mathsf{R}^{p_2}$ tal que $\chi(r) = g_2$. Assim, $g - \omega(s) = \phi_2(\chi(r))$, e o mapa $\phi_2\chi + \omega$ é sobrejetor. Isto demonstra que $\mathsf{G}$ tem tipo finito.

Demonstramos agora que o feixe de relações de $\mathsf{G}$ tem tipo finito. Pelo exemplo 4.0.6, $\operatorname{Im}\phi_1$ é de tipo finito (pois $\mathsf{G}_1$ é de tipo finito). Pela observação 4.0.9, $\operatorname{Im}\phi_1$ é coerente. Assim, podemos substituir $\mathsf{G}_1$ por $\operatorname{Im}\phi_1$ e $\phi_1$ pela inclusão $\operatorname{Im}\phi_1 \hookrightarrow \mathsf{G}_2$, preservando a exatidão da sequência e a coerência dos feixes. Continuamos denotando $\operatorname{Im}\phi_1$ por $\mathsf{G}_1$. Dado um homomorfismo $\beta : \mathsf{R}^p \to \mathsf{G}$, temos o seguinte diagrama (numa vizinhança de um ponto $t \in T$):

(4.0.2)
$$\begin{tikzcd}
\mathsf{R}^{p_1} \arrow[d, two heads, "\chi"] & \mathsf{R}^{\tilde p} \arrow[r, two heads, "\psi"] \arrow[d, dotted, "\omega"] & \ker(\phi \circ \beta) \arrow[r, hook] & \mathsf{R}^p \arrow[d, "\beta"] \arrow[dr, "\varphi\circ\beta"] & \\
\ker\phi_2 = \mathsf{G}_1 \arrow[r, hook] & \mathsf{G}_2 \arrow[rr, "\varphi_2"] & & \mathsf{G} \arrow[r, "\varphi"] & \mathsf{G}_3
\end{tikzcd}$$

Usamos no diagrama o fato de $\mathsf{G}_1$ ser de tipo finito e $\mathsf{G}_3$ ser coerente. Construímos o homomorfismo $\omega$ da mesma forma que fizemos na parte anterior. Como $\mathsf{G}_2$ é coerente, $\ker(\chi + \omega) \subset \mathsf{R}^{p_1} \oplus \mathsf{R}^{\tilde p}$ é de tipo finito. Seja $\mathrm{pr}_2 : \mathsf{R}^{p_1} \oplus \mathsf{R}^{\tilde p} \to \mathsf{R}^{\tilde p}$ a projeção no segundo fator. Vamos mostrar que

$$\ker\beta = \psi\Big(\mathrm{pr}_2\left(\ker(\chi + \omega)\right)\Big),$$

e concluiremos que $\ker\beta$ é de tipo finito (por ser imagem de um módulo de tipo finito por um homomorfismo). Seja $(a_1, a_2) \in \ker(\chi + \omega)$, ou seja, $\chi(a_1) = 0 = \omega(a_2)$. Como o diagrama 4.0.2 é comutativo, temos

$$\beta\left(\psi(\mathrm{pr}_2(a_1, a_2))\right) = \beta\left(\psi(a_2)\right) = \phi_2(\omega(a_2)) = \phi_2(0) = 0,$$

ou seja, $\psi\Big(\mathrm{pr}_2\left(\ker(\chi + \omega)\right)\Big) \subset \ker\beta$. Para a outra inclusão, seja $a \in \ker\beta \subset \ker(\phi \circ \beta)$. Como $\psi$ é sobrejetiva, existe $b \in \mathsf{R}^{\tilde p}$ tal que $\psi(b) = a$. Assim,

$$0 = \beta(\psi(b)) = \phi_2(\omega(b)),$$

ou seja, $\omega(b) \in \ker\phi_2$. Como $\chi$ é sobrejetiva, existe $c \in \mathsf{R}^{p_1}$ com $\chi(c) = \omega(b)$. Assim, temos $(-c, b) \in \ker(\chi + \omega)$ e

$$\psi\left(\mathrm{pr}_2(-c, b)\right) = \psi(b) = a.$$

A demonstração está completa. □

O teorema 4.0.15 tem uma míriade de consequências:

**Corolário 4.0.17.** *A soma direta de uma família finita de* $\mathsf{R}$*-módulos coerentes é coerente.*

*Demonstração.* Se $\mathsf{G}_1$ e $\mathsf{G}_2$ são coerentes, temos a sequência exata

$$0 \to \mathsf{G}_1 \to \mathsf{G}_1 \oplus \mathsf{G}_2 \to \mathsf{G} \to 0,$$

onde $\mathsf{G}_1 \to \mathsf{G}_1 \oplus \mathsf{G}_2$ é a aplicação $g_1 \mapsto (g_1, 0)$ e $\mathsf{G}_1 \oplus \mathsf{G}_2 \to \mathsf{G}_2$ é a projeção $(g_1, g_2) \to g_2$. O resultado está provado. □

**Corolário 4.0.18.** *Seja* $\phi : \mathsf{F} \to \mathsf{G}$ *um homomorfismo de* $\mathsf{R}$*-módulos coerentes. Então,* $\ker\phi, \operatorname{coker}\phi$ *e* $\operatorname{Im}\phi$ *são* $\mathsf{R}$*-módulos coerentes.*

*Demonstração.* Já sabemos que $\operatorname{Im}\phi$ é coerente e temos a sequência exata

$$0 \to \ker\phi \hookrightarrow \mathsf{F} \xrightarrow{\varphi} \operatorname{Im}\phi \to 0.$$

Já para o conúcleo, temos a sequência exata

$$0 \to \operatorname{Im}\phi \hookrightarrow \mathsf{G} \to \operatorname{coker}\phi \to 0.$$

□

**Corolário 4.0.19.** *Seja* $\mathsf{F}$ *um* $\mathsf{R}$*-submódulo coerente de um* $\mathsf{R}$*-módulos coerente* $\mathsf{H}$*. Então,* $\mathsf{H}/\mathsf{F}$ *é coerente.*

*Demonstração.* Temos a sequência exata

$$0 \to \mathsf{F} \to \mathsf{H} \to \mathsf{H}/\mathsf{F} \to 0.$$

□

**Corolário 4.0.20.** *Sejam* $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ $\mathcal{R}$*-submódulos coerentes de um* $\mathcal{R}$*-módulo coerente* $\mathcal{H}$*. Então,* $\mathcal{F} + \mathcal{G}$ *e* $\mathcal{F} \cap \mathcal{G}$ *são coerentes.*

*Demonstração.* Considere o mapa de adição $A : \mathcal{F} \oplus \mathcal{G} \to \mathcal{H}$. Este é um homorfismo entre $\mathcal{R}$-módulos coerentes (pelo corolário 4.0.18), e portanto sua imagem, $\mathcal{F} + \mathcal{G}$, é coerente. Para a intersecção, basta observar que ela é o kernel do homomorfismo natural $\mathcal{F} \to \mathcal{H}/\mathcal{G}$ e usar o corolário 4.0.19. □

**Corolário 4.0.21.** *Sejam* $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ $\mathcal{R}$*-módulos coerentes. Então,* $\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{R}} \mathcal{G}$ *é coerente. Se* $\mathcal{I} \subset \mathcal{R}$ *é um* $\mathcal{R}$*-ideal coerente, então* $\mathcal{I} \cdot \mathcal{F}$ *é coerente.*

*Demonstração.* Podemos supor que existe uma sequência exata da forma $\mathcal{R}^p \xrightarrow{\varphi} \mathcal{R}^q \to \mathcal{F} \to 0$ (após restrição para uma vizinhança de um ponto, como sempre). Como o produto tensorial é um funtor exato à direita, a seguinte sequência é exata:

$$\mathcal{R}^p \otimes_{\mathcal{R}} \mathcal{G} \xrightarrow{\varphi \otimes \mathrm{Id}_{\mathcal{G}}} \mathcal{R}^q \otimes_{\mathcal{R}} \mathcal{G} \to \mathcal{F} \otimes_{\mathcal{R}} \mathcal{G} \to 0.$$

Como $\mathcal{R}^p \otimes \mathcal{G} \simeq \mathcal{G}^p$ e $\mathcal{R}^q \otimes \mathcal{G} \simeq \mathcal{G}^p$, ambos estes feixes são coerentes pelo corolário 4.0.17. Como $\mathcal{F} \otimes \mathcal{G} = \operatorname{coker} \phi \otimes \mathrm{Id}$, segue que o produto tensorial é coerente. Para ver que $\mathcal{I} \cdot \mathcal{F}$ é coerente, basta notar que é a imagem do homomorfismo natural $\mathcal{I} \otimes \mathcal{F} \to \mathcal{F}$. □

**Proposição 4.0.22.** *Sejam* $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ *dois submódulos de tipo finito de um* $\mathcal{R}$*-módulo* $\mathcal{H}$*. Então, se* $\mathcal{F}_a = \mathcal{G}_a$ *para* $a \in T$*, existe uma vizinhança* $U \subset T$ *de* $a$ *em que* $\mathcal{F}_y = \mathcal{G}_y$ *para todo* $y \in U$*.*

*Demonstração.* Se $s_1, \dots, s_p \in \mathcal{F}_a = \mathcal{G}_a$ são geradores desses $\mathcal{R}_a$-módulos, então eles também são geradores numa vizinhança pela proposição 4.0.5. □

**Corolário 4.0.23.** *Seja* $\mathcal{F} \xrightarrow{\varphi} \mathcal{G} \xrightarrow{\psi} \mathcal{H}$ *uma sequência de* $\mathcal{R}$*-módulos coerentes. Se esta sequência é exata em* $a \in T$*, então ela é exata numa vizinhança de* $a$*.*

*Demonstração.* Como $\operatorname{Im} \phi$ e $\ker \psi$ são de tipo finito, basta aplicar a proposição 4.0.22. □

Vamos agora considerar o caso particular em que o $\mathcal{R}$-módulo $\mathcal{G}$ é o próprio feixe de aneis. Neste caso, o feixe é trivialmente de tipo finito.

**Definição 4.0.24.** Um feixe de aneis $\mathcal{R}$ sobre um espaço topológico é *coerente* se for coerente como um $\mathcal{R}$-módulo sobre si mesmo.

*Observação* 4.0.25. Assim, $\mathcal{R}$ é coerente se, e somente se, para todo homomorfismo $\phi : \mathcal{R}^p\big|_U \to \mathcal{R}\big|_U$, o feixe de relações $\ker \phi$ é de tipo finito.

**Proposição 4.0.26.** *Um* $\mathcal{R}$*-módulo* $\mathcal{G}$ *sobre um feixe de aneis coerente* $\mathcal{R}$ *em* $T$ *é coerente se, e somente se, existe uma cobertura aberta de* $T$ *por abertos* $U$ *tais que existe uma sequência exata*

$$\mathcal{R}^q\big|_U \to \mathcal{R}^p\big|_U \to \mathcal{G}\big|_U \to 0.$$

*Demonstração.* Já sabemos que se $\mathcal{G}$ é coerente então existe a cobertura aberta de $T$ e as sequências exatas indicadas. Suponha agora que existe esta cobertura. Como $\mathcal{R}$ é coerente, temos $\mathcal{R}^p\big|_U$ e $\mathcal{R}^q\big|_U$ coerentes também. Assim, a sequência acima exibe $\mathcal{G}\big|_U$ como um conúcleo, e a coerência de $\mathcal{G}\big|_U$ segue do corolário 4.0.18. □

## 5. O teorema da coerência de Oka

Vamos agora ao principal teorema deste trabalho, que fornece o primeiro exemplo não-trivial de um feixe coerente de aneis.

**Teorema 5.0.1** (Coerência de Oka)**.** *O feixe das funções holomorfas* $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^N}$ *é coerente.*

*Demonstração.* Como coerência é uma propriedade local (ver 4.0.10), é suficiente demonstrar a coerência de ${}_N\mathcal{O}$ numa vizinhança aberta $U \subset \mathbb{C}^N$ da origem (a ser diminuída apropriadamente no decorrer da demonstração). Note que ${}_N\mathcal{O}$ é claramente de tipo finito (gerado numa vizinhança da origem pelas funções $1, z_1, \dots, z_N$). Assim, precisamos demonstrar que

- o núcleo do homomorfismo

$$\begin{aligned}\phi : \left({}_N\mathcal{O}\big|_U\right)^m &\to {}_N\mathcal{O}\big|_U\\ (g_1, \ldots, g_m) &\mapsto \sum_{j=1}^m g_j f_j,\end{aligned}$$

é de tipo finito para $(f_1, \ldots, f_m) \in \left({}_N\mathcal{O}\big|_U\right)^m$.

Procedemos por indução em $N$. Se $N = 0$, o subespaço linear $\ker\phi \subset \mathbb{C}^m$ é claramente de tipo finito sobre $\mathbb{C}$ (pois é um subespaço vetorial). Suponha agora que o teorema é válido em dimensão $N-1$. Vamos demonstrar inicialmente que podemos supor que $m \geqslant 2$ e que $f_1(0) = \ldots = f_m(0) = 0$. De fato, se $m = 1$, então ou $\phi = 0$, ou $\phi$ é o mapa de multiplicação por um germe não-nulo, e $\ker\phi = 0$. Em ambos os casos, $\ker\phi$ tem tipo finito. Por outro lado, se (digamos) $f_1(0) \neq 0$, então podemos (reduzindo $U$) supor que $f_1$ é uma unidade em ${}_N\mathcal{O}\big|_U$. Neste caso, a aplicação

$$\begin{aligned}\left({}_N\mathcal{O}\big|_U\right)^{m-1} &\to \ker\phi\\ (g_2, \ldots, g_m) &\mapsto \left(-\frac{1}{f_1}\sum_{j=2}^m g_j f_j, g_2, \ldots, g_m\right)\end{aligned}$$

é um isomorfismo de feixes, e $\ker\phi$ é de tipo finito. A próxima redução que faremos é supor que, após uma mudança linear de coordenadas, todos os $f_j$ são polinômios de Weierstrass em $\left({}_{N-1}\mathcal{O}_0\right)[z_N]$. De fato, aplicando a proposição 2.2.8 e o teorema da Preparação 2.2.4, podemos escrever $f_j = e_j \cdot \omega_j$, onde $e_j$ é uma unidade. Basta notar que os feixes $\ker(f_1, \ldots, f_m)$ e $\ker(\omega_1, \ldots, \omega_m)$ são isomorfos.

Finalmente, escreva $U = U' \times U''$, onde $U' \subset \mathbb{C}^{N-1}$ e $U'' \subset \mathbb{C}$ são vizinhanças abertas da origem, com $f_j \in \left({}_{N-1}\mathcal{O}(U')\right)[z_N]$ e $r = \max\deg f_j$. Por hipótese de indução, o feixe ${}_{N-1}\mathcal{O}$ é coerente e, portanto, $\mathcal{R} := \mathrm{pr}^{-1}_{\mathbb{C}^{N-1}}\left({}_{N-1}\mathcal{O}\right)$ é coerente sobre $\mathbb{C}^N$ (pela observação 4.0.12). Observando que

$$\mathcal{R}[z_N]_{2r} \simeq \bigoplus_{2r} \mathcal{R} \subset {}_N\mathcal{O},$$

segue do corolário 4.0.17 que $\mathcal{R}[z_N]_{2r}$ é um $\mathcal{R}$-módulo coerente. O homomorfismo $\phi$ induz (via restrição) o seguinte diagrama:

$$\begin{tikzcd} {}_N\mathcal{O}^m \arrow[r, "\varphi"] & {}_N\mathcal{O} \\ \left(\mathcal{R}[z_N]_{2r}\right)^m \arrow[u, hook] \arrow[r, "\psi"] & \mathcal{R}[z_N]_{3r}, \arrow[u, hook] \end{tikzcd}$$

já que $\deg f_j \leqslant r$. Pelo corolário 4.0.18, o núcleo de $\psi$ é de tipo finito, e existem seções $g_1, \ldots, g_s \in (\ker\psi)(U)$ com

$$\ker\psi = \mathcal{R}g_1 + \ldots + \mathcal{R}g_s.$$

Resta então demonstrar que

$$(\ker\phi)_u = {}_N\mathcal{O}_0 \cdot (\ker\psi)_u, \quad u \in U. \tag{5.0.1}$$

De fato, isto implicará que $\ker\phi = {}_N\mathcal{O}\cdot(\mathcal{R}g_1 + \ldots + \mathcal{R}g_s) = {}_N\mathcal{O}\cdot g_1 + \ldots + {}_N\mathcal{O}\cdot g_s$, e segue que $\ker\phi$ é de tipo finito.

Para provar 5.0.1, fixe $u \in U$ e escreva, para simplificar a notação, $R := \mathcal{R}_u \subset {}_N\mathcal{O}_u =: S$. Considere o diagrama induzido em $u$

$$\begin{tikzcd} \ker\phi_u \arrow[r, hook] & S^m \arrow[r, "\varphi_u"] & S \\ \ker\psi_u \arrow[u, hook] \arrow[r, hook] & \left(R[z_N]_{2r}\right)^m \arrow[u, hook] \arrow[r, "\psi_u"] & R[z_N]_{3r}. \arrow[u, hook] \end{tikzcd}$$

Suponha inicialmente que $f_1$ é um polinômio de Weierstrass de grau $\rho \leqslant r$ no ponto $u$. Pelo teorema de divisão 2.2.5, fixados elementos $(\chi_1, \ldots, \chi_m) \in \ker\phi_u \in S^m$, existem únicas representações da forma

$$\chi_j = f_1 \cdot a_j + b_j, \; a_j \in S, \; b_j \in R[z_N]_\rho, \tag{5.0.2}$$

para todo $j \geqslant 2$. Desta forma, colocando $b_1 := \chi_1 + \sum_{j=2}^m a_j f_j$, temos

$$\begin{aligned}
0 &= \sum_{j=1}^m \chi_j f_j \\
&= f_1\chi_1 + \sum_{j=2}^m \left(f_1 a_j f_j + f_j b_j\right) \\
&= f_1\left(\chi_1 + \sum_{j=2}^m a_j f_j\right) + \sum_{j=2}^m f_j b_j \\
&= \sum_{j=1}^m f_j b_j.
\end{aligned}$$

Assim, obtemos

$$f_1 b_1 = -\sum_{j=2}^m f_j b_j \in R[z_N]_{\rho+r},$$

e como $f_1$ é um polinômio de Weierstrass, isto implica que $b_1 \in R[z_N]_r$. Colocando $A_j = (-f_j, 0, \ldots, 0, f_1, 0, \ldots, 0)$ (com $f_1$ na $j$-ésima posição), obtemos $A_j \in \ker \psi_u$ e a equação 5.0.2 mostra que

$$(\chi_1, \ldots, \chi_m) = (b_1, \ldots, b_m) + \sum_{j=2}^m a_j A_j.$$

Como $A_j$ e $(\chi_1, \ldots, \chi_m)$ estão em $\ker \phi_u$, obtemos $(b_1, \ldots, b_m) \in \ker \phi_u \cap \left(R[z_N]_r\right)^m \subset \ker \psi_u$. Assim, $(\chi_1, \ldots, \chi_m)$ é uma combinação linear de elementos de $\ker \psi_u$ com coeficientes em $S$, e a equação 5.0.1 está provada.

Para o caso em que $f_1$ não é um polinômio de Weierstrass em $u$, existe uma representação da forma $f_1 = e \cdot f$, onde $e, f \in R[z_N]_r$, $f$ um polinômio de Weierstrass em $u$ e $e$ uma unidade em $S$. Considere o homomorfismo

$$\begin{aligned}
\theta : S^m &\longrightarrow S \\
(\chi_1, \ldots, \chi_m) &\mapsto \phi_u(\chi_1 e^{-1}, \chi_2, \ldots, \chi_m) = f\chi_1 + \sum_{j=2}^m f_j \chi_j.
\end{aligned}$$

Note que

$$(\chi_1, \ldots, \chi_m) \in \ker \phi_u \iff (\chi_1, \chi_2 e^{-1}, \ldots, \chi_m e^{-1}) \in \ker \theta.$$

Pelo caso que demonstramos anteriormente (em que $f_1$ era de Weierstrass em $u$), existem para cada $(\chi_1, \ldots, \chi_m) \in \ker \phi_u$ elementos $d_j \in S$ e $B_j = (B_{j1}, \ldots, B_{jm}) \in \left(R[z_N]_r\right)^m \cap \ker \theta$ tais que

$$(\chi_1, \chi_2 e^{-1}, \ldots, \chi_m e^{-1}) = \sum_{j=1}^m d_j B_j.$$

Colocando $\widetilde{B}_j := (B_{j1}, B_{j2}e, \ldots, B_{jm}e) \in \left(R[z_N]_{2r}\right)^m \cap \ker \phi_u \subset \ker \psi_u$, obtemos

$$(\chi_1, \ldots, \chi_m) = \sum_{j=1}^m d_j \widetilde{B}_j,$$

a representação que desejávamos. O teorema está demonstrado. □

## Apêndice A. Teoria básica de feixes

Fixamos nesta seção um espaço topológico $T$ e um anel unital e comutativo $R$ (não excluímos o anel nulo, em que $1_R = 0_R$).

**Definição A.0.1.** Um *pré-feixe* $(\mathsf{G}, \rho)$ de $R$-módulos sobre $T$ consiste dos seguintes dados:

(1) Para cada aberto $U \subset T$ associamos um $R$-módulo $\mathsf{G}(U)$ (chamado de conjunto de *seções* de $\mathsf{G}$ sobre $U$).

(2) Dados abertos $V \subset U \subset T$, temos um homomorfismo de $R$-módulos

$$\rho_V^U : \mathsf{G}(U) \to \mathsf{G}(V),$$

chamado de *morfismo de restrição*, que satisfaz as seguintes propriedades: $\rho_U^U = \mathrm{Id}_{\mathsf{G}(U)}$ e $\rho_W^V \circ \rho_V^U = \rho_W^U$ para todos os abertos $W \subset V \subset U \subset T$.

*Observação* A.0.2. Em geral vamos denotar o pré-feixe $(\mathsf{G}, \rho)$ apenas por $\mathsf{G}$, e se $V \subset U$ são abertos de $T$ e $f \in \mathsf{G}(U)$, escrevemos $\rho_V^U(f) = f|_V$ (mesmo quando $\rho$ não for o homomorfismo de restrição em espaços de funções). Podemos modificar a definição acima e considerar feixes de grupos, espaços vetoriais, aneis, etc.[1]

Um feixe em $T$ será um pré-feixe com propriedades adicionais, conforme a seguinte

**Definição A.0.3.** Seja $\mathsf{G}$ um pré-feixe de $R$-módulos em $T$. Dizemos que $\mathsf{G}$ é um *feixe* de $R$-módulos em $T$ se, dados um aberto $U \subset T$ e uma cobertura aberta $U = \bigcup_{i \in I} U_i$ de $U$, forem válidas:

(1) (Unicidade) Duas seções $s, r \in \mathsf{G}(U)$ são iguais se, e somente se, $s|_{U_i} = r|_{U_i}$ para todo $i \in I$.
(2) (Existência) Para toda família de seções $s_i \in \mathsf{G}(U_i)$ que satisfaz $s_i|_{U_{ij}} = s_j|_{U_{ij}}$ [2] para todos os índices $i, j \in I$, existe uma seção $s \in \mathsf{G}(U)$ tal que $s|_{U_i} = s_i$ para todo $i \in I$.

*Observação* A.0.4. Observe que, escolhendo a cobertura vazia $\varnothing = \bigcup_{i \in \varnothing} \varnothing$, o espaço de seções $\mathsf{G}(\varnothing)$ é o $R$-módulo nulo $\{0\}$.

Uma definição equivalente pode ser obtida da seguinte forma:

**Proposição A.0.5.** *Seja* $\mathsf{G}$ *um pré-feixe de* $R$*-módulos em* $T$*. Então,* $\mathsf{G}$ *é um feixe se, e somente se, para todo aberto* $U \subset T$ *e cobertura aberta* $U = \bigcup_{i \in I} U_i$*, a sequência*

$$0 \to \mathsf{G}(U) \xrightarrow{\alpha} \prod_{i \in I} \mathsf{G}(U_i) \xrightarrow{\beta} \prod_{(i,j) \in I^2} \mathsf{G}(U_{ij}) \tag{A.0.1}$$

*é exata, onde* $\alpha(f) = \left(f|_{U_i}\right)_{i \in I}$ *e* $\beta\left((f_i)_{i \in I}\right) = \left(f_i|_{U_{ij}} - f_j|_{U_{ij}}\right)_{(i,j) \in I^2}$.[3].

*Demonstração.* Observe que a aplicação $\alpha$ é injetiva se, e somente se, for válida a propriedade de unicidade das seções. A inclusão $\mathrm{img}\,\alpha \subset \ker \beta$ é válida para qualquer pré-feixe. A inclusão $\ker \beta \subset \mathrm{img}\,\alpha$ é válida se, e somente se, vale a propriedade de existência de seções. □

Dado um (pré-)feixe $\mathsf{G}$ em $T$, podemos restringí-lo para um aberto $U \subset T$, considerando $\mathsf{G}|_U(V) = \mathsf{G}(V)$ para todo aberto $V \subset U$, obtendo um (pré-)feixe em $U$.

**Definição A.0.6.** Sejam $(\mathsf{F}, \rho)$ e $(\mathsf{G}, \eta)$ dois (pré-)feixes de $R$-módulos em $T$. Um *morfismo* $\phi : \mathsf{F} \to \mathsf{G}$ *de (pré-)feixes* consiste de uma família de homomorfimos

$$\phi(U) : \mathsf{F}(U) \to \mathsf{G}(U)$$

para todo aberto $U \subset T$, de modo que o diagrama

$$\begin{tikzcd} \mathsf{F}(U) \arrow[r, "\varphi(U)"] \arrow[d, "\rho_V^U"] & \mathsf{G}(U) \arrow[d, "\eta_V^U"] \\ \mathsf{F}(V) \arrow[r, "\varphi(V)"] & \mathsf{G}(V) \end{tikzcd}$$

seja comutativo para todos os abertos $V \subset U \subset T$. Vamos denotar por $\mathrm{Hom}(\mathsf{F}, \mathsf{G})$ o (pré-)feixe de morfismos entre $\mathsf{F}$ e $\mathsf{G}$.

[1]Em linguagem categórica, definimos $\mathbf{OP}(T)$ como a categoria cujos objetos são abertos de $T$ e os morfismos $\mathrm{Hom}(U, V)$ consistem do conjunto vazio se $V \not\subset U$ e da inclusão $i : V \to U$ se $V \subset U$. Dada uma categoria $\mathbf{C}$, um *pré-feixe* em $T$ com valores em $\mathbf{C}$ é apenas um funtor contravariante $\mathsf{G} : \mathbf{OP}(T) \to \mathbf{C}$.

[2]Se $(A_i)_{i \in I}$ é uma família indexada de conjuntos, escrevemos $A_{i_0 \ldots i_p} := A_{i_0} \cap \ldots \cap A_{i_p}$ para $p \in \mathbb{Z}_+$.

[3]Se uma categoria $\mathbf{C}$ admitir todos os limites, um pré-feixe $\mathsf{G}$ com valores em $\mathbf{C}$ é um feixe se, e somente se, o diagrama $\mathsf{G}(U) \to \prod_i \mathsf{G}(U_i) \rightrightarrows \prod_{i,j} \mathsf{G}(U_{ij})$ for um equalizador para todo aberto $U$ com cobertura aberta $(U_i)_{i \in I}$.

Seja $\mathsf{G}$ um pré-feixe de $R$-módulos sobre $T$ e seja $u \in T$. Denote por $\mathsf{U}_u$ o conjunto dos abertos de $T$ que contém $u$ e coloque neste a relação $U \leqslant V$ se $V \subset U$. Isto faz de $\mathsf{U}_u$ um conjunto dirigido, e o sistema $\{\rho_{UV} : \mathsf{G}(U) \to \mathsf{G}(V);\, U, V \in \mathsf{U}_u,\, U \leqslant V\}$ é um sistema direto de $R$-módulos. Podemos então formar o limite direto

$$\mathsf{G}_u = \varinjlim_{U \in \mathsf{U}_u} \mathsf{G}(U).$$

Este é um $R$-módulo que, concretamente, é dado pelo quociente da reunião disjunta

$$\mathsf{G}_u = \bigsqcup_{U \in \mathsf{U}_u} \mathsf{G}(U)/\sim,$$

onde $F_1 \in \mathsf{G}(U)$ é equivalente a $F_2 \in \mathsf{G}(V)$ se existe um elemento $W \in \mathsf{U}_u$ com $W \subset U \cap V$ tal que $F_1\big|_W = F_2\big|_W$. Dizemos que este $R$-módulo é o *stalk* do feixe $\mathsf{G}$ no ponto $u \in T$. Temos uma aplicação natural $\mathsf{G}(U) \to \mathsf{G}_u$ para todo $U \in \mathsf{U}_u$ (a aplicação quociente), e denotamos a imagem de $F \in \mathsf{G}(U)$ por $[F]_u \in \mathsf{G}_u$ (também vamos usar a notação $F_u$). Observe também que, se $\phi : \mathsf{G}_1 \to \mathsf{G}_2$ é um morfismo de (pré-)feixes, então ele induz um homomorfismo $\phi_x : (\mathsf{G}_1)_x \to (\mathsf{G}_2)_x$ de $R$-módulos.

Vamos agora usar esta construção dos stalks para descrever uma forma de obter (canonicamente) um feixe a partir do pré-feixe $\mathsf{G}$:

**Proposição A.0.7** (Feixificação). *Seja $\mathsf{G}$ um pré-feixe de $R$-módulos sobre $T$. Então, existe um feixe $\overline{\mathsf{G}}$ de $R$-módulos sobre $T$ e um morfismo $\phi : \mathsf{G} \to \overline{\mathsf{G}}$ satisfazendo a seguinte propriedade universal: dado qualquer outro morfismo $\psi : \mathsf{G} \to \mathsf{F}$, onde $\mathsf{F}$ é um feixe de $R$-módulos sobre $T$, existe um único morfismo $\psi^\bullet : \overline{\mathsf{G}} \to \mathsf{F}$ que satisfaz $\psi = \psi^\bullet \circ \phi$.*

*Demonstração.* Seja $U \subset T$ um aberto. Definimos o $R$-módulo

$$\overline{\mathsf{G}}(U) = \left\{ (s_u) \in \prod_{u \in U} \mathsf{G}_u;\ (s_u) \text{ satisfaz a propriedade } (*) \right\},$$

onde $(*)$ é a seguinte propriedade:

$(*)$: Para cada $u \in U$, existe uma vizinhança aberta $V \subset U$ de $u$ e uma seção $\sigma \in \mathsf{G}(V)$ tal que $s_v = [\sigma]_v$ para todo $v \in V$.

É evidente que, se $V \subset U$ são abertos de $T$, a projeção

$$\prod_{u \in U} \mathsf{G}_u \to \prod_{v \in V} \mathsf{G}_v$$

leva elementos de $\overline{\mathsf{G}}(U)$ em $\overline{\mathsf{G}}(V)$, e denotamos esta aplicação por $\overline{\rho} : \overline{\mathsf{G}}(U) \to \overline{\mathsf{G}}(V)$. Obtemos então um pré-feixe $(\overline{\mathsf{G}}, \overline{\rho})$ de $R$-módulos em $T$.

Considere o homomorifsmo, para $U \subset T$ aberto, $\mathsf{G}(U) \to \prod_{u \in U} \mathsf{G}_u$ dada por $F \mapsto ([F]_u)_{u \in U}$. Por definição, a imagem desta aplicação está contida em $\overline{\mathsf{G}}(U)$. Temos então, se $V \subset U$ são abertos, o diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccccc}
\mathsf{G}(U) & \longrightarrow & \overline{\mathsf{G}}(U) & \longrightarrow & \prod_{u \in U} \mathsf{G}_u \\
\Big\downarrow{\scriptstyle \rho_{UV}} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \overline{\rho}_{UV}} & & \Big\downarrow \\
\mathsf{G}(V) & \longrightarrow & \overline{\mathsf{G}}(V) & \longrightarrow & \prod_{v \in V} \mathsf{G}_v.
\end{array}$$

Obtemos desta maneira um morfismo de pré-feixes $\phi : \mathsf{G} \to \overline{\mathsf{G}}$. Vamos demonstrar que $\overline{\mathsf{G}}$ é um feixe. Seja $U = \bigcup_{i \in I} U_i$ uma cobertura aberta do aberto $U \subset T$. Considere uma família $s_i = (s_{i,u})_{u \in U_i} \in \overline{\mathsf{G}}(U_i)$ tal que $s_i\big|_{U_i \cap U_j} = s_j\big|_{U_i \cap U_j}$. Podemos então definir $s = (s_u)_{u \in U} \in \prod_{u \in U} \mathsf{G}_u$ da seguinte forma: dado $u \in U$ e $i \in I$ com $u \in U_i$, coloque $s_u := s_{i,u}$. Isto está bem-definido pela condição de igualdade em $U_i \cap U_j$ de $s_i$ e $s_j$. Precisamos verificar a propriedade $(*)$ para $s$: dado $u \in U$, temos $u \in U_i$ para algum $i \in I$. Como $s_v = s_{i,v}$ para $v$ numa vizinhança de $u$ e $s_i$ satisfaz $(*)$, $s$ satisfaz $(*)$. Assim, $s \in \overline{\mathsf{G}}(U)$. Como $s\big|_{U_i} = s_i$, verificamos a propriedade de existência. A propriedade de unicidade é automática, e portanto, $\overline{\mathsf{G}}$ é um feixe.

Prova da propriedade universal: omitida. □

Outra construção importante associada a um (pré-)feixe $\mathsf{G}$ é a do *espaço étalé*: considere

$$|\mathsf{G}| = \bigsqcup_{t \in T} \mathsf{G}_x$$

a reunião disjunta dos stalks de $\mathsf{G}$. Introduzimos uma topologia em $|\mathsf{G}|$ da seguinte forma: dados $U \subset T$ aberto e $F \in \mathsf{G}(U)$, colocamos

$$\Omega_{F;U} = \left\{[F]_t;\ t \in U\right\} \subset |\mathsf{G}|\,.$$

Observe que, se $U, V \subset T$ são abertos e $F \in \mathsf{G}(U)$ e $G \in \mathsf{G}(V)$, então $\Omega_{F;U} \cap \Omega_{G;V} = \Omega_{H;W}$, onde $W \subset U \cap V$ é o conjunto de pontos $t$ onde $[F]_t = [G]_t$ e $H = F\big|_W = G\big|_W$. Desta forma, a coleção $\{\Omega_{F;U};\ U \subset T$ aberto e $F \in \mathsf{G}(U)\}$ forma uma base para uma topologia em $|\mathsf{G}|$. Este espaço topológico é chamado de *espaço étalé* do pré-feixe $\mathsf{G}$, com projeção natural $\pi : |\mathsf{G}| \to T$ dada por $\pi([F]_t) = t$. Esta projeção é, evidentemente, um homeomorfismo local sobrejetivo.

Outra propriedade importante é a seguinte: se $U \subset T$ é aberto, então o conjunto

$$\Gamma\left(U; |\mathsf{G}|\right) = \left\{\sigma : U \to |\mathsf{G}| \text{ contínua; } \pi \circ \sigma = \mathrm{Id}_U\right\}$$

das seções contínuas, com estrutura de $R$-módulo definida em cada stalk, é um $R$-módulo. Na verdade, estas propriedades fornecem uma forma diferente de definir feixes.

**Definição A.0.8.** Sejam $S, T$ espaços topológicos e $\pi : S \to T$ uma aplicação contínua. Dizemos que $\pi : S \to T$ é um *espaço-feixe* de $R$-módulos sobre $T$ se as seguintes propriedades forem satisfeitas:

(1) $\pi$ é sobrejetiva e um homeomorfismo local.
(2) Cada pré-imagem $S_t := \pi^{-1}(t)$ tem estrutura de $R$-módulo.
(3) A estrutura algébrica de $S_t$ varia continuamente com $t$, no seguinte sentido: se $U \subset T$ é aberto, então o conjunto das seções contínuas $\Gamma(U; S) := \{\sigma : U \to S;\ \pi \circ \sigma = \mathrm{Id}_U\}$ com a estrutura de $R$-módulo em cada pré-imagem $S_t$ é um $R$-módulo.

Como vimos acima, o espaço étale $\pi : |\mathsf{G}| \to T$ de um (pré-)feixe $\mathsf{G}$ sobre $T$ é um espaço-feixe. Provemos algumas propriedades básicas de espaços-feixes:

**Proposição A.0.9.** *Seja $\pi : S \to T$ um espaço-feixe. Então,*

(1) *A projeção $\pi$ e as seções $\sigma \in \Gamma(U; S)$ (para $U \subset T$ aberto) são aplicações abertas.*
(2) *O conjunto $\left\{\sigma(U);\ U \subset T \text{ aberto e } \sigma \in \Gamma(U; S)\right\}$ é uma base para a topologia de $S$.*
(3) *Se $U, V \subset T$ são abertos e $f \in \Gamma(U; S)$, $g \in \Gamma(V; S)$, então o conjunto $\left\{t \in U \cap V;\ f(t) = g(t)\right\}$ é aberto em $T$.*

*Demonstração.* Item 1): a projeção $\pi$ é evidentemente aberta por ser um homeomorfismo local. Seja $\sigma \in \Gamma(U; S)$ e tome $p \in U$. Como $\pi$ é homeomorfismo local sobrejetor, existem abertos $W \subset S$ contendo $\sigma(p)$ e $V \subset T$ contendo $p$ tais que $\pi\big|_W : W \to V$ é homeomorfismo (denotamos sua inversa por $\phi : V \to W$). Seja $V_1 \subset U \cap V$ aberto contendo $p$ tal que $\sigma(V_1) \subset W$ (que existe pela continuidade de $\sigma$). Então, se $x \in V_1$, $\pi(\sigma(x)) = x \implies \sigma(x) = \phi(x)$, ou seja, $\sigma(V_1) = \phi(V_1)$, que é aberto em $S$ (pois $\phi$ é um homeomorfismo). Assim, $\sigma$ é aberta.

Item 2): Pelo item 1), todos os elementos de $\left\{\sigma(U);\ U \subset T \text{ aberto e } \sigma \in \Gamma(U; S)\right\}$ são abertos em $S$. Seja $s \in S$ e $W \subset S$ um aberto contendo $s$. Escreva $p := \pi(s)$. Como $\pi$ é homeomorfismo local, existem abertos $W_1 \subset W$ contendo $s$ e $V_1 \subset T$ contendo $p$ tais que $\pi\big|_{W_1} : W_1 \to V_1$ é homeomorfismo. Defina $\sigma \in \Gamma(V_1; S)$ por $\sigma := (\pi\big|_{W_1})^{-1}$. Então, $\sigma(V_1) = W_1 \subset W$, e $s = \sigma(p) \in \sigma(V_1)$. Segue que $\left\{\sigma(U);\ U \subset T \text{ aberto e } \sigma \in \Gamma(U; S)\right\}$ é base para a topologia de $S$.

Item 3): Seja $t_0 \in U \cap V$ tal que $f(t_0) = g(t_0) =: s_0$. Temos $\pi(s_0) = t_0$. Como $\pi$ é homeomorfismo local, existem abertos $W \subset S$ contendo $s_0$ e $V \subset T$ contendo $t_0$ tais que $\phi\big|_W : W \to V$ é homeomorfismo. Como $f$ e $g$ são contínuas, existe um aberto $V_1 \subset U \cap V$ contendo $t_0$ tal que $f(V_1) \cap g(V_1) \subset W$. Se $x \in V_1$, então $\pi(f(x)) = x = \pi(g(x)) \implies f(x) = \phi(x) = g(x)$. Assim, $f = g$ em $V_1$ e o resultado está demonstrado. □

Dados dois espaços-feixe $\pi_1 : S_1 \to T$ e $\pi_2 : S_2 \to T$, um morfismo entre estes espaços é uma aplicação contínua $f : S_1 \to S_2$ tal que $\pi_2 \circ f = \pi_1$ e tal que $f\big|_{\pi_1^{-1}(t)} : \pi_1^{-1}(t) \to \pi_2^{-1}(t)$ é um homomorfismo de $R$-módulos. A coleção dos espaços-feixe sobre $T$ com estes morfismos forma uma categoria, que denotamos por $\mathbf{Et}(T)$.

Podemos agora exibir a relação entre feixes e espaços-feixe.

**Teorema A.0.10.** *O funtor $F : \mathbf{Sh}(T) \to \mathbf{Et}(T)$ que associa um feixe $\mathsf{G}$ ao espaço-feixe $\pi : |\mathsf{G}| \to T$ e a um morfismo de feixes $f_1 : \mathsf{G}_1 \to \mathsf{G}_2$ o morfismo $F(f) : |\mathsf{G}_1| \to |\mathsf{G}_2|$ dado por $F(f)(v_x) = f_x(v_x)$, $v_x \in (\mathsf{G}_1)_x$, é uma equivalência de categorias.*

*Demonstração.* Sejam $\mathsf{G}_1$ e $\mathsf{G}_2$ dois feixes de $R$-módulos sobre $T$ e considere a aplicação induzida

$$F : \mathrm{Hom}_{\mathbf{Sh}(T)}\left(\mathsf{G}_1, \mathsf{G}_2\right) \to \mathrm{Hom}_{\mathbf{Et}(T)}\left(|\mathsf{G}_1|, |\mathsf{G}_2|\right).$$

Vamos provar que $F$ é uma bijeção: sejam $f_1, f_2 : \mathsf{G}_1 \to \mathsf{G}_2$ dois morfismos e suponha que $F(f_1) = F(f_2)$. Seja $U \subset T$ é aberto, temos as aplicações $f_1(U), f_2(U) : \mathsf{G}_1(U) \to \mathsf{G}_2(U)$. Para provar que $f_1(U)(s) = f_2(U)(s)$ para todo $s \in \mathsf{G}_1(U)$, basta notar que, se $\eta \in \mathsf{G}_2(U)$ é tal que $[\eta]_x = 0$ para todo $x \in U$, então $\eta = 0$ (isto segue da propriedade de unicidade de feixes e da definição dos stalks). Assim, como $F(f_1)([s]_x) = [f_1(U)(s)]_x = [f_2(U)(s)]_x = F(f_2)([s]_x)$ para todo $x \in U$, obtemos $f_1(U) = f_2(U)$, e aplicação $F$ é injetiva. Para a sobrejetividade, seja $g : |\mathsf{G}_1| \to |\mathsf{G}_2|$ um morfismo de espaços-feixe. Seja $U \subset T$ aberto e $s \in \mathsf{G}_1(U)$. Se $x \in U$, existe uma vizinhança $V \subset U$ de $x$ e uma seção $s_V \in \mathsf{G}_2(V)$ tal que $g([s]_x) = [s_V]_x$. A continuidade de $g$ permite (reduzindo $V$ se necessário) tomar $s_V$ com $g([s]_y) = [s_V]_y$ para todo $y$ numa vizinhança de $x$. Isto produz uma família de seções locais em $U$ dois-a-dois compatíveis. A propriedade de existência para feixes implica então que existe $r \in \mathsf{G}_2(U)$ com $g([s]_x) = [r]_x$ para todo $x \in U$. Isto produz uma aplicação $\mathsf{G}_1(U) \to \mathsf{G}_2(U)$ (que associa $s$ a $r$), o que define $f : \mathsf{G}_1 \to \mathsf{G}_2$ satisfazendo $F(f) = g$.

Finalmente, o funtor $F$ é essencialmente sobrejetivo: dado um espaço-feixe $\pi : S \to T$, podemos definir um feixe $\mathsf{G}$ em $T$ colocando $\mathsf{G}(U) := \Gamma(U; S)$, com as aplicações naturais de restrição. É claro que este feixe é levado em $\pi : S \to T$ pelo funtor $F$, o que demonstra que $F$ é uma equivalência de categorias. □

Vamos agora construir, a partir de uma função continua $\phi : S \to T$ e um feixe $\mathsf{G}$ em $T$, um feixe em $S$:

**Definição A.0.11** (Feixe imagem inversa)**.** Sejam $\phi : S \to T$ uma função contínua entre espaços topológicos e $\mathsf{G}$ um feixe de $R$-módulos em $T$. Defina o seguinte pré-feixe em $S$: se $U \subset S$ é aberto,

$$\left(\phi^{-1}\mathsf{G}\right)(U) := \left\{\sigma : U \to |\mathsf{G}|\,;\, \sigma \text{ contínua e } \pi_{\mathsf{G}} \circ \sigma = \phi\right\}.$$

Então, este pré-feixe é um feixe de $R$-módulos em $S$, chamado de *imagem inversa* de $\mathsf{G}$ por $\phi$.

As seguintes propriedades do feixe imagem inversa são de simples verificação.

**Proposição A.0.12.** *Sejam $\phi : S \to T$ uma função contínua entre espaços topológicos, $\mathsf{G}$ um feixe de $R$-módulos em $T$ e $\phi^{-1}\mathsf{G}$ o feixe imagem inversa. Então,*

(1) *Para cada ponto $s \in S$, existe um isomorfismo canônico $\mathsf{G}_{\varphi(s)} \simeq \left(\phi^{-1}\mathsf{G}\right)_s$.*
(2) *O espaço-feixe de $\phi^{-1}\mathsf{G}$ é a projeção em $S$ do produto fibrado $S \times_T |\mathsf{G}|$:*

$$\begin{aligned} \pi_{\varphi^{-1}\mathsf{G}} : S \times_T |\mathsf{G}| := \left\{(s, f_t) \in S \times |\mathsf{G}|\,;\, \phi(s) = \pi_{\mathsf{G}}(f_t) = t\right\} &\to S \\ (s, f_t) &\mapsto s. \end{aligned}$$

Vamos construir agora o principal feixe que consideraremos neste trabalho.

**Exemplo A.0.13** (O feixe das funções holomorfas)**.** Dado $U \subset \mathbb{C}^N$ aberto, consideramos ${}_N\mathcal{O}(U)$ a $\mathbb{C}$-álgebra das funções holomorfas, com as aplicações de restrição de funções. O feixe ${}_N\mathcal{O}$ obtido é o feixe das funções holomorfas em $\mathbb{C}^N$. Dado um ponto $a \in \mathbb{C}^N$, um aberto $U \subset \mathbb{C}^N$ contendo $a$ e uma função holomorfa $f \in \mathcal{O}(U)$, denotamos por $f_a \in {}_N\mathcal{O}_a$ a classe de equivalência de $(a, f)$ (o *germe* da função $f$ em $a$). Podemos identificar cada stalk ${}_N\mathcal{O}_a$ com o anel das séries convergentes $\mathbb{C}\{z_1 - a_1, \ldots, z_N - a_N\}$ que estudamos na primeira seção deste trabalho.

Finalmente, uma sequência de feixes

$$\mathsf{F} \xrightarrow{\varphi} \mathsf{G} \xrightarrow{\psi} \mathsf{H}$$

é dita *exata* quando a correspondente sequência

$$\mathsf{F}_t \xrightarrow{\varphi_t} \mathsf{G}_t \xrightarrow{\psi_t} \mathsf{H}_t$$

nos stalks for exata para cada $t \in T$. Observe que isto é, em geral, mais fraco do que a sequência em seções

$$\mathsf{F}(U) \xrightarrow{\varphi(U)} \mathsf{G}(U) \xrightarrow{\psi(U)} \mathsf{H}(U)$$

ser exata.

## Referências

[1] H. Grauert e R. Remmert. *Coherent Analytic Sheaves*. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften. Springer Berlin Heidelberg, 2012.

[2] Ludger Kaup e Burchard Kaup. *Holomorphic Functions of Several Variables: An Introduction to the Fundamental Theory*. De Gruyter, 2011.

[Stacks] The Stacks Project Authors. *Stacks Project*. `https://stacks.math.columbia.edu`. 2018.

# Domínios de Reinhardt

Kelvyn Emmanoel

July 2022

## 1 Introdução

Falaremos um pouco sobre os chamados *domínios de Reinhardt*, em especial, a íntima conexão que estes possuem com séries de potência e domínios de holomorfia. Uma vez que começaremos com o primeiro tópico, convém dizer que há um apêndice à disposição do leitor, caso este julgue necessário recordar o essencial sobre séries de potências em $\mathbb{C}^n$.

**Definition 1.1.** Dada uma série de potências $P$ em $\mathbb{C}^n$, o *domínio de convergência* de $P$, denotado por $D(P)$ é definido como o conjunto: $D(P) := \{z_0 \quad \mathbb{C}^n; \sum_\alpha c_\alpha z^\alpha$ é absolutamente convergente para todo $z$ em uma vizinhança de $z_0\}$.

Apesar de talvez não ser tão aparente, esta definição empata com a definição usual de domínio de convergência para $N = 1$. Recordo que, neste caso, os domínios de convergência eram sempre discos. Isso pode nos fazer pensar que, para várias dimensões, o domínio de convergência será um polidisco ou uma bola. Isso de fato pode ser verdade, como mostra o primeiro exemplo abaixo, mas também há domínios de convergência bastante diferentes, como mostra o segundo exemplo.

**Example 1.1.** *Se $c_\alpha = 1$, para todo $\alpha$, temos uma generalização da série geométrica. Esta série é absolutamente convergente no polidisco $\Delta(0,1)$. De fato, dado $\Lambda \quad (\mathbb{N}_0)^n$ finito, denotando por $m_i$ o máximo da i-ésima coordenada dos elementos de $\Lambda$, temos:*

$$\sum_{\alpha \quad \Lambda} |z^\alpha| \leq \sum_{\alpha_1=1}^{m_1} \dots \sum_{\alpha_n=1}^{m_n} |z_1|^{\alpha_1} \dots |z_n|^{\alpha_n} = \sum_{\alpha_2=1}^{m_2} \dots \sum_{\alpha_n=1}^{m_n} \left( \sum_{\alpha_1=1}^{m_1} |z_1|^{\alpha_1} \right) |z_2|^{\alpha_2} \dots |z_n|^{\alpha_n}$$

$$\leq \sum_{\alpha_2=1}^{m_2} \dots \sum_{\alpha_n=1}^{m_n} \left( \frac{1}{1 - |z_1|} \right) |z_2|^{\alpha_2} \dots |z_n|^{\alpha_n} \leq \dots \leq \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{1 - |z_i|}$$

*Portanto, o conjunto de todas as somas finitas tem cota superior, donde o supremo está bem definido e é limitado pelo valor acima, isto é:*

$$\sum_\alpha c_\alpha z^\alpha \leq \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{1 - |z_i|}$$

**Example 1.2.** *Para $n = 2$, tome, $c_{\alpha_1,\alpha_2} = 1$ se $\alpha_1 = \alpha_2$ e 0 caso contrário. Isto produz a série $\sum_{\alpha=1}^{\infty} (z_1 z_2)^\alpha$. Note que esta série convergirá absolutamente exatamente nos pontos $z$ tais que $|z_1||z_2| = 1$, o que está muito longe de ser um polidisco.*

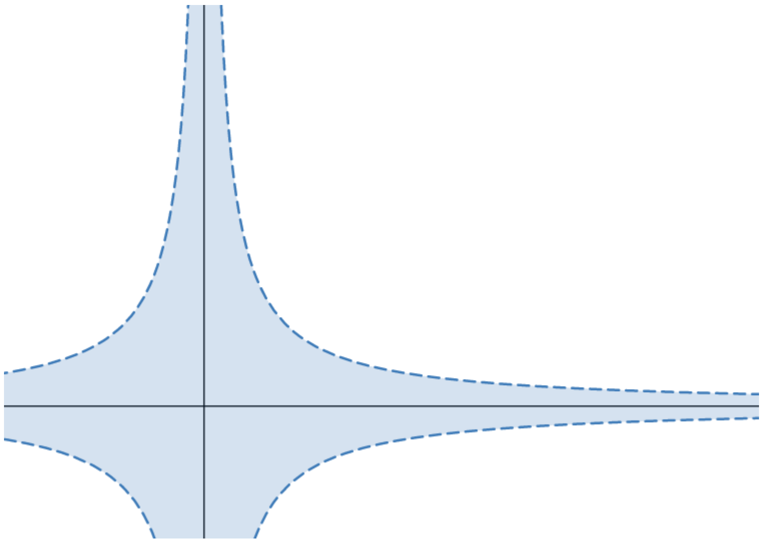


Figure 1: Perfil do domínio de convergência da série do exemplo 1.2 em $\mathbb{R}^2$

O fato que os domínios de convergência eram discos pra uma dimensão tem a ver com um resultado que agora será estendido para várias dimensões, e é conhecido como Lema de Abel.

**Lemma 1.1** (Lema de Abel)**.** *Seja* $w \quad \mathbb{C}^n$ *tal que exista* $M$ *com* $|c_\alpha w^\alpha| < M$ *para todo* $\alpha$*. Então a série de potências* $\sum_\alpha c_\alpha z^\alpha$ *converge normalmente em qualquer polidisco* $\Delta(0, z)$ *com* $|z_j| < |w_j|$*, isto é, a série:*

$$\sum_\alpha ||c_\alpha x^\alpha||_\infty := \sum_\alpha \sup_{x \quad \Delta(0,z)} |c_\alpha x^\alpha|$$

*é convergente.*

*Proof.* Como a função $|c_\alpha x^\alpha|$ é crescente, temos que:

$$\sup_{\Delta(0,z)} |c_\alpha||x^\alpha| = |c_\alpha||z^\alpha| = |c_\alpha||w^\alpha| \left|\frac{z^\alpha}{w^\alpha}\right| \leq M \left|\frac{z}{w}\right|^\alpha$$

E portanto:

$$\sum_\alpha \sup_{\Delta(0,z)} |c_\alpha x^\alpha| \leq M \sum_\alpha \left|\frac{z}{w}\right|^\alpha \leq \frac{M}{1 - \left|\frac{z}{w}\right|^\alpha}$$

□

Diferentemente do caso unidimensional, este lema não irá implicar que os domínios de convergência são discos, mas que são domínios de Reinhardt, como mostra a próxima seção.

## 2 Domínios de Reinhardt

Note que se uma série de potências $P$ converge absolutamente para um certo $z = (z_1, ..., z_n)$, então também converge absolutamente para $(\xi_1 z_1, ..., \xi_n z_n)$, desde que $|\xi_i| = 1$ para todo $i$. A fim de realizar um melhor tratamento deste tipo de fenômeno, iremos apresentá-lo usando a linguagem de grupos. Note que $\mathbb{C}^n$ pode ser munido com a operação $zw := (z_1 w_1, ..., z_n w_n)$ e torna $(\mathbb{C}^\times)^N$

um grupo. O torus $\mathsf{T} := \{\xi = (\xi_1, ..., \xi_n); |\xi_i| = 1, \quad i\}$ é um subgrupo de $(\mathsf{C}^\times)^N$ com respeito à operação apresentada, como facilmente se verifica. Note que este conjunto é exatamente a fronteira distinguida do polidisco de raio 1: $\mathsf{T} = \partial_0\Delta(0, 1)$. Introduziremos, também, uma função que nos será muito útil. Seja $\tau : \mathsf{C}^n \to \mathsf{R}^n$ definida por $\tau(z_1, .., z_n) = (|z_1|, ..., |z_n|)$. Então $\mathsf{T} := \tau^{-1}(1, ..., 1)$.

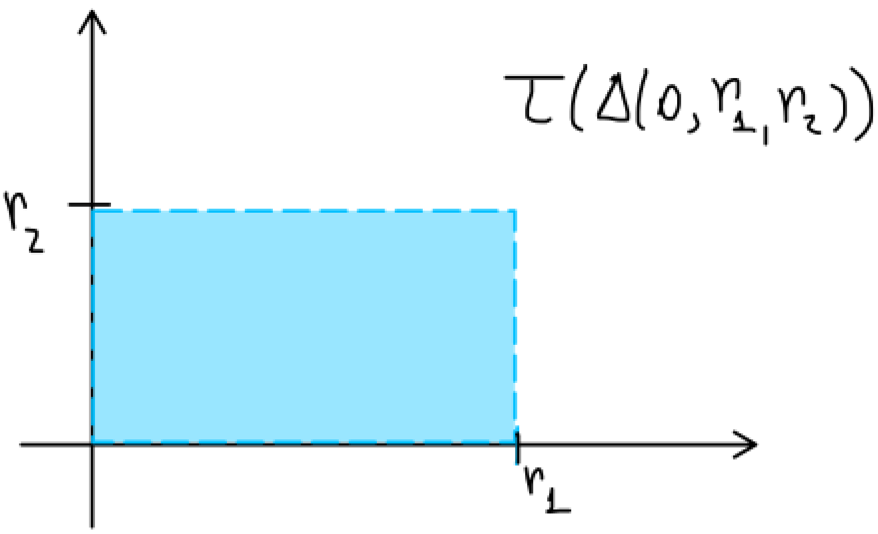
Apresentaremos agora a principal definição.

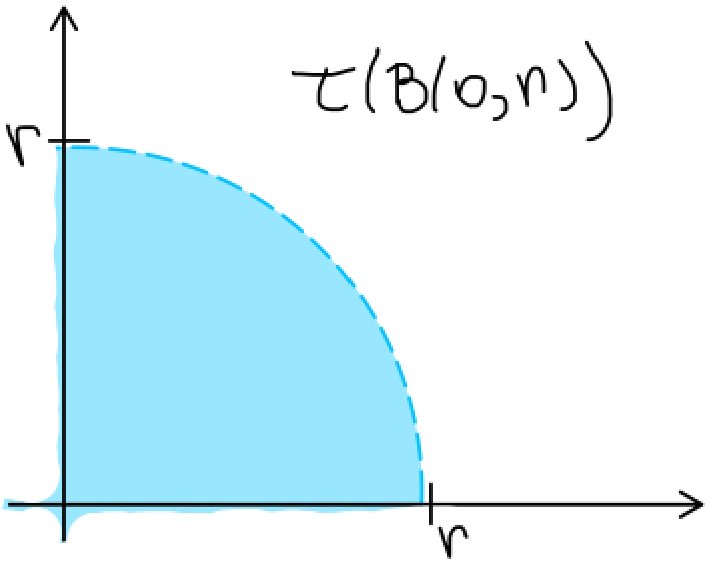
**Definition 2.1.** Um conjunto aberto $\Omega$ é dito um *domínio de Reinhardt (centrado em* 0*)* se, dado qualquer $z \quad \Omega$ e $\xi \quad \mathsf{T}$, $\xi z := (\xi_1 z_1, ..., \xi_n z_n) \quad \Omega$. Se esta propriedade é satisfeita para todo $\xi \quad \overline{\Delta(0, 1)}$, o conjunto é dito um *domínio de Reinhardt completo.*

A definição facilmente se adapta para domínios centrados em pontos quaisquer. Por simplicidade, não abordaremos isso neste texto. Vemos então, imediatamente, que um conjunto aberto $\Omega$ ser um domínio de Reinhardt é equivalente a:

- $(z_1, ..., z_n) \quad \Omega = \quad (e^{i\theta_1} z_1, ..., e^{i\theta_n} z_n) \quad \Omega$
- $\Omega$ é a união de órbitas da ação de $\mathsf{T}$ em $\mathsf{C}$
- $\Omega = \tau^{-1}(\tau(\Omega))$

Assim, uma das utilidades de $\tau$ é que a imagem de um domínio de Reinhardt possui toda a informação sobre o domínio original, isto é, ele pode ser completamente reconstruído. Isto facilita a visualização, já que a imagem de um conjunto por esta função está num espaço com a metade da dimensão do espaço original. Assim, por exemplo, um polidisco $\Delta(0, r_1, r_2)$ em $\mathsf{C}^2$ é um conjunto de quatro dimensões, e portanto muito difícil de ser visualizado. Entretanto, sua imagem por $\tau$ é um subconjunto de $\mathsf{R}^2$, como mostra a figura.






Como vimos, se uma série de potências $P$ converge absolutamente em $z$, então também converge absolutamente em $\xi z$, para todo $\xi \quad \mathsf{T}$. Entretanto, isto ainda não é suficiente para dizermos que o domínio de convergência de uma série de potências é um domínio de Reinhardt pois, para que $\xi z \quad D(P)$ é necessário que a convergência aconteça em uma vizinhança. Não obstante, isto é de fato o que acontece. A próxima proposição demonstra isso juntamente com outros fatos.

Antes disso, apresentamos mais uma definção. Se $z \quad (\mathsf{C}^\times)^N$, definimos $\log \tau(z) := (\log |z_1|, \ldots, \log |z_n|)$. Além disso, $\log \tau(\Omega) := \log \tau(\Omega \cap (\mathsf{C}^\times)^N)$. Dizemos que um conjunto $\Omega$ é logaritmicamente convexo se $\log \tau(\Omega)$ é convexo.

**Proposition 2.1.** *Se $D$ é o domínio de convergência de alguma série de potências, então $D$ é um domínio de Reinhardt completo e logaritmicamente convexo.*

*Proof.* Se $P$ converge absolutamente numa vizinhança $V$ de $z$, então $P$ também converge absolutamente em $\xi V$, que é uma vizinhança de $\xi z$, (pois a ação é por homeomorfismos) e portanto $z \quad D(P) = \quad \xi z \quad D(P)$. Assim, se $x \quad D(P)$, então $\tau(z) \quad D(P)$ e, como $D$ é aberto, podemos achar um $r \quad (\mathsf{R}_+)^N$ tal que $\overline{\Delta(\tau(z), 3r)} \quad D$, em particular, $\tau(z) + 2r \quad D$, e portanto podemos aplicar o lema de Abel para este número, concluindo que a série converge absolutamente para todo ponto em $\Delta(0, \tau(z) + r)$, donde $\overline{\Delta(0, \tau(z))} \quad D$, e portanto $D$ é domínio de Reinhardt completo.

Provaremos que é logaritmicamente convexo. Tome $x, y \quad \log \tau(D)$. Dado $t \quad [0, 1]$, quero mostrar que $tx + (1 - t)y \quad \log \tau(D)$. Por hipótese, existem $z, w \quad D$ tais que $x_j = \log |z_j|$ e $y_j = \log |w_j|$, para todo $j$. De modo que $tx + (1 - t)y \quad \log \tau(D)$ equivale a $(|z_1|^t |w_1|^{1-t}, \ldots, |z_n|^t |w_n|^{1-t}) \quad D$

Como o domínio de convergência é aberto, existem $\lambda_1, \lambda_2 > 1$ tais que $\lambda_1 z, \lambda_2 w \quad D$ (também é possível argumentar por continuidade). Tomando $\lambda := \min\{\lambda_1, \lambda_2\}$, vale que $\lambda z, \lambda w \quad D$. Notando que $(\lambda z)^\alpha = \lambda^{|\alpha|} z^\alpha$ temos que existe um $C$ tal que:

$$\sup_{\alpha} \left\{ |c_\alpha| \lambda^{|\alpha|} |z^\alpha|, |c_\alpha| \lambda^{|\alpha|} |w^\alpha| \right\} \leq C$$

Iremos mostrar que, para todo $\alpha$ vale:

$$|c_\alpha| \lambda^{|\alpha|} |z^\alpha|^t |w^\alpha|^{1-t} \leq C$$

E o lema de Abel implicará que $\sum_\alpha c_\alpha \xi^\alpha$ converge para todo $\xi$ tal que $|\xi_i| < \lambda |z_i|^t |w_i|^{1-t}$, o que, em particular, nos diz que $(|z_1|^t |w_1|^{1-t}, \ldots, |z_n|^t |w_n|^{1-t}) \quad D$, e a prova estará concluída.

De fato, temos:

$$|z^\alpha| \leq \frac{C}{|c_\alpha| \lambda^{|\alpha|}} \quad = \quad |z^\alpha|^t \leq \left( \frac{C}{|c_\alpha| \lambda^{|\alpha|}} \right)^t$$

E analogamente:

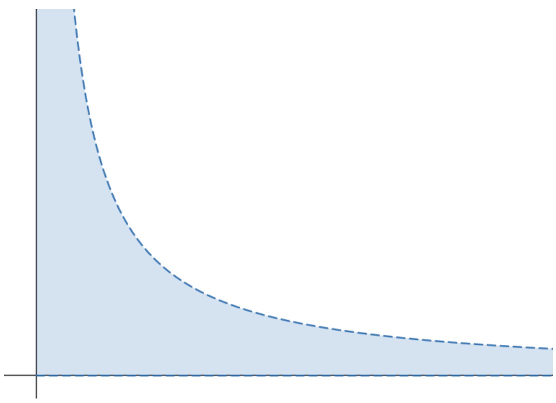
$$|w^\alpha|^{1-t} \leq \left( \frac{C}{|c_\alpha| \lambda^{|\alpha|}} \right)^{1-t}$$

Multiplicando ambos (note que são não-negativos), ficamos com:

$$|z^\alpha|^t |w^\alpha|^{1-t} \leq \frac{C}{|c_\alpha| \lambda^{|\alpha|}}$$

O caso em que $|c_\alpha| = 0$ é trivial. $\square$

Uma consequência do resultado anterior é que um domínio de convergência pode ser escrito como a união de polidiscos com o mesmo centro. Para $N = 1$, isso significa que eles são discos, mas para $N > 1$, uma união de polidiscos de mesmo centro pode não ser um polidisco pois os raios são objetos multidimensionais, podendo não ser todos paralelos. Isso fornece uma rica coleção de possíveis domínios de convergência.



O fato dos domínios de convergência serem de Reinhardt completos também faz com que haja sentido em enxergá-los através de $\tau$. A figura ao lado mostra a imagem por $\tau$ do domínio de convergência da série do exemplo 1.2

Chamo a atenção para o fato que $\log \tau(D)$, ainda no caso do exemplo 1.2, é o conjunto dos pontos $\{(x, y) \quad \mathbb{R}^2; y < -x\}$, isto é, o semiplano inferior delimitado pela função $f(x) = -x$.

Note que, apesar de $\tau(D)$ estar sempre no primeiro quadrante (ou, mais geralmente, ter todas as coordenadas não-negativas), isto não é verdade para $\log \tau(D)$. Com efeito, vale o seguinte lema, que será usado na próxima seção:

**Lemma 2.2.** *Seja $D$ um domínio de Reinhardt completo. Se $y \quad \log \tau(D)$, então $x \quad \log \tau(D)$ desde que $x$ seja tal que $x_j \leq y_j$ para todo $j$.*

*Proof.* Como $y \quad \log \tau(D)$, $(e^{y_1}, ..., e^{y_n}) \quad \tau(D)$, e na verdade $(e^{y_1}, ..., e^{y_n}) \quad D$, pois $D$ é de Reinhardt. Agora, tome $\xi$ tal que $\xi_i = e^{x_i - y_i}$. Por hipótese, $|\xi_i| \leq 1$, e, como $D$ é completo, segue que $\xi(e^{y_1}, ..., e^{y_n}) = (e^{x_1}, ..., e^{x_n}) \quad \tau(D)$. □

Para encerrar a seção, apresentaremos mais um resultado que também será usado posteriormente. Sabemos que toda função holomorfa definida num disco pode ser escrita como uma série de potências centrada no centro deste disco. O próximo resultado generaliza este fato para domínios de Reinhardt conexos.

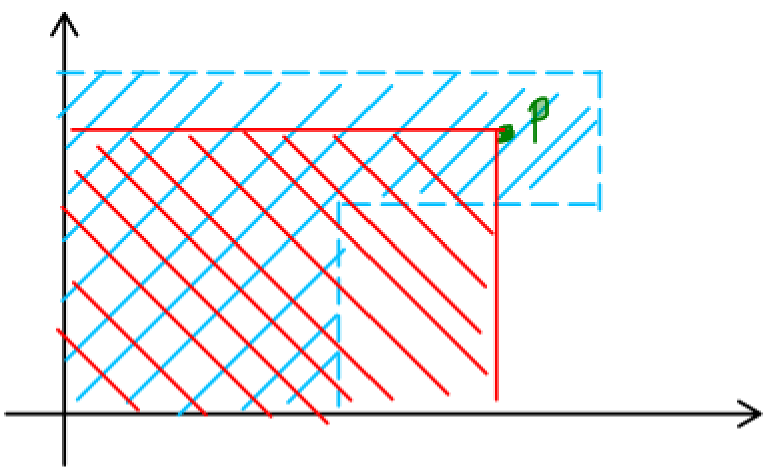
**Theorem 2.3.** *Seja $\Omega$ um domínio de Reinhardt conexo contendo a origem e $f$ uma função holomorfa em $\Omega$. Então existe (e é única) uma série de potências tal que:*

$$f(z) = \sum_{\alpha} c_\alpha z^\alpha$$

*E a série converge normalmente nas partes compactas de $\Omega$.*

*Proof.* Assim como nas versões simplificadas deste resultado, a ideia é obter a série a partir da fórmula integral de Cauchy para $f$. Dado um ponto $z$, o primeiro passo é encontrar um polidisco fechado que contenha $z$ em seu interior. Veja, entretanto, como a primeira complicação surge. Nem sempre um tal disco irá existir, a menos que $\Omega$ seja de Reinhardt completo...

Note que nem todo domínio de Reinhardt conexo que contém a origem é um domínio de Reinhardt completo, como exemplifica a figura abaixo.



A figura representa um conjunto em $\mathrm{R}^2$, e portanto sua pré-imagem por $\tau$ será certamente um domínio de holomorfia que contém a origem. Facilmente se verifica que é conexo, mas o polidisco vermelho que contém o ponto $p$ não está inteiramente contido no conjunto.

Entretanto, suponha, a princípio, que $\Omega$ seja de fato, completo. Então será possível, por $\Omega$ ser aberto, encontrar um $\quad > 0$ tal que $z(1+\quad)\quad\Omega$. Pela hipótese que acabamos de fazer, irá valer que $\overline{\Delta(0,\tau(z)(1+\quad)}\quad\Omega$. Agora, o teorema da fórmula integral de Cauchy nos diz que:

$$
\begin{aligned}
f(z) &= \int_{\partial_0\Delta(0,\tau(z)(1+\ ))} \frac{f(\zeta)}{(\zeta_1 - z_1)...(\zeta_n - z_n)} d\zeta_1 \quad ... \quad d\zeta_n \\
&= \int_{\partial_0\Delta(0,1+\ )} \frac{f(tz)}{(t_1 - 1)...(t_n - 1)} dt_1 \quad ... \quad dt_n
\end{aligned} \tag{1}
$$

Onde fizemos a mudança de variável $G_z(t) = tz$ e lançamos mão do fato que $G(\partial_0\Delta(0,1+\ )) = \partial_0\Delta(0,\tau(z)(1+\ ))$. Note que, em verdade, esta igualdade vale para todo $z$ tal que $\overline{\Delta(0,\tau(z)(1+\ ))}\quad\Omega$. Usando o fato que $\Omega$ é um domínio de Reinhardt completo, pode ser verificado que isto vale desde que $z\quad\Omega\ $, onde:

$$\Omega\ := \{z\quad\Omega; d(z,\Omega^c) > \ \tau(z)\}$$

Pegaremos, no lugar deste conjunto todo, sua componente conexa que contém a origem, e que será chamada de $\Omega\ $. Agora, note que:

$$\frac{1}{t-1} = \frac{t}{t-1} - 1 = \frac{1}{1-1/t} - 1 = \sum_{n=0}^{\infty} t^{-n} - 1 = \sum_{n=1}^{\infty} t^{-n} = \sum_{n\geq 0} t^{-n-1}$$

E esta série converge normalmente nas partes compactas da região tal que $|t| > 1$. Para várias dimensões concluímos que:

$$\frac{1}{(t_1-1)...(t_n-1)} = \sum_{\alpha} t^{-\alpha-1}$$

Onde $-\alpha - 1$ deve ser entendido como $(-\alpha_1 - 1, ..., -\alpha_n - 1)$, e a convergência é normal para $t\quad\partial_0\Delta\ $, onde $\Delta\ = \Delta(0,1+\ )$, o que significa que $\sum_\alpha f_\alpha$ converge normalmente para $f$ nas partes compactas de $\Omega\ $, onde:

$$f_\alpha = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{\partial_0\Delta} f(t_1z_1,...,t_nz_n) t^{-\alpha-1} dt_1...dt_n$$

Isso é *quase* o que queremos, com exceção de que $\Omega$ no lugar de $\Omega\ $. Para consertar este problema, iremos provar que: (i) para todo compacto $K\quad\Omega$, existe um $\quad$ tal que $K\quad\Omega$ e (ii) $f_\alpha = c_\alpha z^\alpha$ e $c_\alpha$ não depende de $\ $. Com estes dois passos, a afirmação seguirá (para $\Omega$ de Reinhardt completo.

(i) De fato, seguindo argumentos padrões, é possível provar que devemos ter necessariamente:

$$f_\alpha(z) = z^\alpha \frac{\partial^\alpha f(0)}{\alpha!}$$

Pelo menos numa vizinhança da origem. Mas derivando $f_\alpha$ sob o sinal de integração é possível enxergar que ela é analítica. Usando isto e a conexidade de $\Omega$ , concluímos que a igualdade vale em todo este conjunto. A propósito, mostrar que os coeficientes devem ser necessariamente desta forma é exatamente como se mostra a unicidade da série de potências.

(ii) A ideia é notar que $(\Omega\ )$ cresce quando  decresce e $\bigcup \Omega\ = \Omega$. A conexidade de $\Omega$ é usada aqui. Assim, dado $K$, esta família será uma cobertura aberta, que portanto admitirá uma subcobertura finita. Pela monotonicidade da família, conseguiremos achar apenas um conjunto que cobre $K$.

Por fim, vejamos como adaptar este resultado para o caso em que $\Omega$ não é completo. Esta hipótese foi necessária para usar a fórmula integral de Cauchy. No caso de não ser verdade, ainda podemos definir:

$$g(z) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{\partial_0 \Delta} \frac{f(t_1 z_1, ..., t_n z_n)}{(t_1 - 1)...(t_n - 1)} dt_1...dt_n$$

O fato de $\Omega$ ser domínio de Reinhardt ainda será necessário para mostrar que esta integral está bem-definida. De fato: se $z \quad \Omega$ , qualquer ponto que esteja a uma distância de $z$ menor ou igual a $\ \tau(z)$ está em $\Omega$, como é o caso de $(1 + \ )z$. Como $\Omega$ é domínio de Reinhardt, $tz$ também está, se $t \quad \Delta$ .

Agora, note que o teorema ainda pode ser aplicado para $z$ tal que $\tau(z)$ seja pequeno o suficiente de modo a termos $tz \quad \Omega$ para todo $t \quad \Delta(0, 1 + \ )$, de modo que $f = g$ nesta região. Novamente por meio da derivação sob o sinal de integração vemos que $g$ é analítica, donde as duas funções devem ser iguais em todo $\Omega$ . A partir daqui, o argumento segue sem nenhuma modificação. ▫

**Corollary 2.3.1.** *Toda função holomorfa definida num domínio de Reinhardt conexo $\Omega$ que contém a origem pode ser estendida para o menor domínio de Reinhardt logaritmicamente convexo, $\widetilde{\Omega}$ que contém $\Omega$, ou seja, o interior da intersecção de todos os domínios de Reinhardt logaritmicamente convexos que contêm $\Omega$.*

*Proof.* Em primeiro lugar, mostraremos que $\widetilde{\Omega}$ está, de fato, bem definido. Note que uma intersecção arbitrária de abertos não necessariamente é aberta, e por isso que o menor domínio de Reinhardt logaritmicamente convexo que contém um conjunto $\Omega$ não basta ser somente a intersecção de todos os conjuntos desse tipo, mas devemos também tomar o interior. Para mostrar que $\widetilde{\Omega}$ está bem definido, basta mostrar que uma intersecção arbitrária de conjuntos logaritmicamente convexos $(A_\lambda)_{\lambda \ \Lambda}$ é logaritmicamente convexo. Denote por $A$ a intersecção, tome $x, y \quad \log \tau(A)$ e $z, w \quad A \cap (\mathbb{C}^\times)^N$ de modo que $x = \log \tau(z)$ e $y \quad \log \tau(w)$. Em particular, $z, w \quad A_\lambda$ para todos os $\lambda$. Como cada $A_\lambda$ é logaritmicamente convexo, temos que $tx + (1 - t)y \quad \log \tau(A_\lambda)$, para todo $t$. Mas como todo $A_\lambda$ é Reinhardt, isso significa que $(|z_1|^t |w_1|^{1-t}, ..., |z_n|^t |w_n|^{1-t}) \quad A_\lambda$ para todo $\lambda$, e portanto este mesmo elemento está em $A$, donde $tx + (1 - t)y \quad \log \tau(A)$. Note também que $\widetilde{\Omega}$ é não vazio pois a intersecção contém pelo menos $\Omega$ e, como $\Omega$ é aberto, o interior da intersecção também contém $\Omega$, logo $\Omega \quad \widetilde{\Omega}$.

Agora, seja $f$ uma função holomorfa em $\Omega$. Sabemos que $f$ pode ser escrita como uma série de potências pelo resultado anterior. Mas sabemos também que o domínio de convergência desta série, $D(P)$ deve ser um domínio de Reinhardt logaritmicamente convexo pelo que foi discutido anteriormente. Por construção, $\widetilde{\Omega}$ deve estar contido neste conjunto por ser o menor domínio desta forma, logo a série de potências de $f$ converge em todo $\widetilde{\Omega}$, pelo menos, e portanto $f$ pode ser estendida para este conjunto. □

# 3 Relação com Domínios de Holomorfia

Começaremos estabelecendo a relação entre domínios de Reinhardt e conjuntos holomorficamente convexos.

**Theorem 3.1.** *Se $D$ é um domínio de Reinhardt completo e logaritmicamente convexo, então $D$ é holomorficamente convexo.*

*Proof.* Noto que, dado um conjunto de funções $F$, a envoltória convexa de um conjunto $K$ com relação a $F$ é $\widehat{K}_{D,F} := \{z \in D;\ |f(z)| \leq \sup_{k \in K} |f(k)|,\ \forall f \in F\}$. Seja $M$ o conjunto dos monômios, isto é, das função $z \to z^\alpha$, com $\alpha$ um multi-índice. Por simplicidade, passaremos a denotar $\widehat{K}_{D,M}$ simplesmente por $\widehat{K}$. Como o conjunto da funções holomorfas contém os monômios, a envoltória holomorfa de um conjunto $K$ está contido em $\widehat{K}$. Para mostrarmos que $D$ é holomorficamente convexo, basta mostrarmos que a envoltória convexa de um compacto $K$ não encosta na fronteira $\partial D$, e, pela observação anterior, basta mostrarmos que $\widehat{K} \cap \partial D = \emptyset$.

*Motivação:. Note que, para $\xi \notin \widehat{K}$ deve existir algum $\alpha$ tal que $|\xi_1|^{\alpha_1}...|\xi_n|^{\alpha_n} > |k_1|^{\alpha_1}...|k_n|^{\alpha_n}$ para todo $k \in K$. Como devemos usar que o domínio é logaritmicamente convexo, faz sentido reescrever a relação em $\log\tau(D)$ para ver como esta hipótese poderá nos ajudar. Abreviando $\log\tau(z)$ por $z$, devemos ter:*

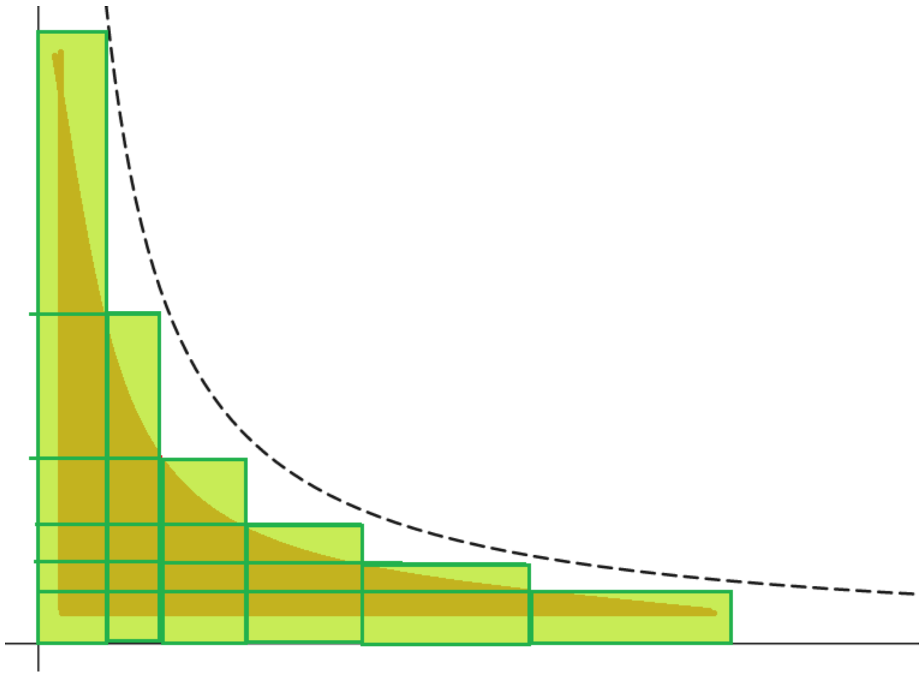
$$\sum_i \alpha_i \xi_i > \sum_i \alpha_i k_i \tag{2}$$

*isto é, o funcional $L(x) = \sum_i \alpha_i x_i$ deve crescer ao passar de $\log\tau(\widehat{K})$ para a fronteira. A convexidade de fato garante a existência de funcionais com a propriedade (2), via o teorema geométrico de Hahn-Banach, mas o problema está no fato de que o funcional originado por este teorema pode ter coeficientes $\alpha_i$ reais, enquanto queremos que sejam naturais. O resto da demonstração será, basicamente, dedicado a mostrar que o funcional originado por Hahn-Banach pode ser modificado fazendo com que seus coeficientes sejam naturais e ainda assim satisfaçam (2). A ideia é notar que, pela densidade dos racionais nos reais, é possível tomar coeficientes racionais suficientemente próximos dos reais. Para que possamos fazer isso, entretanto, devemos ter no máximo um número finito de pontos em $\log\tau(\widehat{K})$. Obviamente isto não é necessariamente verdade, mas usaremos a compacidade de $K$ para conseguir algo tão bom quanto: conseguiremos um número finito de pontos de maneira que, se (2) valer para eles, valerá também para o resto. Passar de racionais para naturais é fácil: basta multiplicar pelo MMC.*

Em primeiro lugar, tome $\xi \in \partial D$ tal que $|\xi_i| > 0$ para todo $i$ de modo que o mapa $\log\tau$ esteja bem definido (o caso remanescente será feito posteriormente). Para encontrarmos os tais pontos, precisaremos de uma cobertura de $K$ por polidiscos com raios no próprio $K$. A construção desta cobertura se fará da seguinte forma:

Dado $p \in K$, como $D$ é um domínio de Reinhardt, existe $r_p > 0$ tal que $\Delta(\tau(p), 2r_p) \subset D$. Como $w_p := \tau(p) + r_p \in \Delta(\tau(p), 2r_p)$, usando novamente que $D$ é um domínio de Reinhardt (completo), temos que $\overline{\Delta(0, w_p)} \quad D$, com $w_p \quad D$. Assim, $(\Delta(0, w_p))_{p \quad K}$ é um cobertura aberta de $K$, donde podemos extrair uma subcobertura finita $(\Delta(0, w \quad))^n_{\quad =1}$. Denote por $W$ o conjunto $\{w^1, \ldots, w^n\}$.

Como mencionado acima, o fato do raio dos polidiscos ser multidimensional faz com que não seja possível reduzir $W$ para um conjunto unitário. A figura a seguir tenta ilustrar este fenômeno. A figura avermelhada faz o papel do compacto, e está sendo coberta por um número finito de polidiscos verdes.



Temos que $\widehat{K} \quad \widehat{W}$. De fato, dado $k \quad K$, existe $j$ tal que $k \quad \Delta(0, w^j)$ por construção, o que significa que $|k_i| < |(w^j)_i|$ para todo $i$, e portanto $|k^\alpha| < |w^{j\,\alpha}|$ para todo $\alpha$, donde $\sup_{k \quad K} |k^\alpha| \leq \sup_{w \quad W} |w^\alpha|$, e isto basta, pois se $z \quad \widehat{K}$, então $|z^\alpha| \leq \sup_{k \quad K} |k^\alpha| \leq \sup_{w \quad W} |w^\alpha|$ para todo $\alpha$, e portanto $z \quad \widehat{W}$. A partir destas considerações, realmente basta encontrar um funcional tal que $L(w \quad) < L(\xi \quad)$ para todo $w \quad W$ .

Para encontrar tal funcional, vamos usar o teorema geométrico de Hahn-Banach nos conjuntos $\log \tau(D)$ e $\{\xi \quad\}$. O segundo é obviamente convexo e o primeiro o é por hipótese. Falta apenas provar que $\xi \quad / \operatorname{int} [\log \tau(D)]$.

Com isso, somos capazes de encontrar um funcional:

$$L(x) = \sum_{j=1}^{N} y_j x_j$$

tal que:

$$L(x) < L(\xi \quad), \quad x \quad \log \tau(D)$$

Também vale que todos os coeficientes são não-negativos. De fato, tome $y \quad \log \tau(D)$ qualquer e note que, se $y_k$ for negativo para algum $k$, o conjunto dos números da forma: $\sum_{j \quad =k} y_j y_j + y_k x$

com $x \leq y_k$ é ilimitado superiormente e está na imagem de $\log \tau(D)$ por $L$ pois o conjunto $\{x; x_j \leq y_j, \quad j\}$ está contido em $\log \tau(D)$, que contradiz a hipótese sobre $L$.

Agora, mostrarei que uma pequena mudança nos coeficientes $(y_j)_j$ não altera o fato que $L(w\ ) < L(\xi\ )$ desde que tomemos $w \quad W\ $, que é finito. Defina:

$$d := \min_{w \quad W^{\square}} \{L(\xi\ ) - L(w)\} > 0$$

Então:

$$\frac{d}{2} + \frac{d}{2} \leq L(\xi\ ) - L(w\ ) \quad = \quad L(w\ ) + \frac{d}{2} \leq L(\xi\ ) - \frac{d}{2}$$

Tome $0 < \delta_1, \delta_2$ tais que:

$$\delta_1 < \min_{w \quad W^{\square}} \left\{ \frac{d}{2|\sum_i w_i|} \right\}$$

E $\delta_2 < \delta_1$. Assim:

$$\sum_i (y_i + \delta_1) w_i = L(w\ ) + \delta_1 \sum_i w_i \leq L(w\ ) + \delta_1 \left| \sum_i w_i \right| < L(w\ ) + \frac{d}{2}$$
$$\leq L(\xi\ ) - \frac{d}{2} < L(\xi\ ) - \delta_2 \left| \sum_i w_i \right| \leq L(\xi\ ) + \delta_2 \sum_i w_i = \sum_i (y_i + \delta_2) \xi_i$$

Para todo $w \quad W$

Pelo fato que os racionais são densos nos reais, podemos tomar $\mu_i$ tais que $\delta_2 < \mu_i < \delta_1$ e $q_i := y_i + \mu_i \quad \mathbb{Q}$. Definindo $\widetilde{L}(x) = \sum_i q_i x_i$ e usando a desigualdade obtida acima, temos, para todo $w \quad W\ $:

$$\widetilde{L}(w\ ) = L(w\ ) + \sum_i \mu_i w_i \leq L(w\ ) + \delta_1 \sum_i w_i$$
$$< \sum_i y_i \xi_i + \delta_2 \sum_i \xi_i \leq \sum_i y_i \xi_i + \sum_i \mu_i \xi_i = \widetilde{L}(\xi\ )$$

Naturalmente, a igualdade continuando valendo se a multiplicarmos pelo MMC dos denominadores dos $q_i$, dando origem a números naturais $\alpha_i$ de modo que temos:

$$\sum_i \alpha_i \xi_i > \sum_i \alpha_i w_i$$

Para todo $w \quad W\ $ e isto é suficiente, em vista do que discutimos anteriormente.

No caso de $\xi$ ter coordenadas nulas, podemos tomar $\pi$ a projeção de $\mathbb{C}^N$ para $\mathbb{C}^M$, onde $M$ é o número de coordenadas não-nulas e aplicar o mesmo argumento. Ele será válido pois $\log \tau\pi(D)$ ainda será convexo.

□

**Corollary 3.1.1.** *Seja $\Omega$ um domínio de Reinhardt completo e conexo. As afirmações seguintes são equivalentes:*

1. *$\Omega$ é o domínio de convergência de uma série de potências*
2. *$\Omega$ é logaritmicamente convexo*
3. *$\Omega$ é holomorficamente convexo*
4. *$\Omega$ é um domínio de holomorfia*

*Proof.* (1) = (2) Feito

(2) = (3) Feito

(3) = (4) Bem conhecido

(4) = (1) Tome $f$ uma função holomorfa em $\Omega$ e que seja ilimitada em qualquer vizinhança de qualquer ponto da fronteira. Como $\Omega$ é domínio de Reinhardt conexo, sabemos que a série de potências converge em $\Omega$, isto é, $\Omega$ $D(P)$, mas o fato de ser ilimitado em qualquer vizinhança da fronteira faz com que a fronteira não faça parte do domínio de convergência da série, e portanto $\Omega = D(P)$ □

# A Série de Potências em $\mathbb{C}^n$

Em uma variável, uma série de potências era uma série da forma $\sum_{k\geq 0} c_k(z-p)^k$. Entretanto, tendo mais variáveis, $z_1, ..., z_n$, podemos associar um expoente diferente para cada variável, de modo a ficarmos com:

$$\sum_{\alpha_1,...,\alpha_n\geq 0} c_{\alpha_1,...,\alpha_n}(z_1-p_1)^{\alpha_1}...(z_n-p_n)^{\alpha_n} =: \sum_{\alpha} c_\alpha(z-p)^\alpha$$

Onde $\alpha$ $(\mathbb{N}_0)^n$ é chamado de multi-ordem. Assim como no caso unidimensional, gostaríamos que a série acima fizesse sentido para que pudéssemos calculá-la ou saber quando ela converge, mas para isso precisamos de uma nova noção de resultado de uma série, já que a noção usual necessita de uma ordem e não existe ordem natural em $(\mathbb{N}_0)^n$.

**Digressão.** Iremos apresentar brevemente um conceito bastante geral de soma e algumas de suas propriedades, sem provar, a título de curiosidade. Seja $V$ um espaço vetorial topológico e $I$ um conjunto não-vazio arbitrário. Uma família $(v_i)_{i\ \ I}$ é dita *somável* se existe e é único o valor $s$ $V$ tal que:

$$s = \lim_{\Lambda} v_\Lambda$$

Onde $\Lambda \in P_f(I)$ é um subconjunto finito de $\Lambda$ e $v_\Lambda := \sum_{\lambda \in \Lambda} v_\lambda$. O limite acima naturalmente deve ser entendido no sentido de limite de uma rede. Definimos então $\sum_{i \in I} v_i = s$.

Em alguns casos específicos, podemos dizer mais coisas, por exemplo:

A) Caso $I$ for contável:

- $(v_i)_i$ é somável se, e somente se, a série $\sum_{k\geq 0} v_{\sigma(k)}$ converge para toda bijeção $\sigma : \mathbb{N} \to I$ e seu valor não depende da bijeção (isto é, é comutativamente convergente). Vale então:

$$\sum_{i \in I} v_i = \sum_{k \geq 0} v_{\sigma(k)}$$

- $(v_i)_i$ é somável se, e somente se a função $v(x) = v_x$ é integrável com respeito a medida de contagem em $I$, que denotaremos por $\#$. Vale:

$$\sum_{i \in I} v_i = \int_I v(x)\ \#(dx)$$

B) No caso de $(v_i)_i \subset \mathbb{R}_0^+$:

- A família é somável se, e somente se existir o supremo $\sup\{v_\Lambda, \Lambda \in P_f\}$, e vale:

$$\sum_{i \in I} v_i = \sup\{v_\Lambda; \Lambda \in P_f(I)\}$$

Se $V$ for um espaço normado, dizemos que a família $(v_i)_i$ é absolutamente convergente se $(||v_i||)_i$ for somável. Como uma sequência de reais não-negativos é convergente se, e somente se, for comutativamente convergente, então para mostrar que uma família enumerável é absolutamente convergente, podemos tomar sempre uma bijeção específica. Vale ainda que uma família enumerável de elementos absolutamente convergente é convergente. Devido a este bom comportamento da convergência absoluta, definiremos o domínio de convergência de uma série com base neste conceito, em detrimento do conceito puro de convergência.

# Uma Versão Complexa do Teorema de Cauchy Kowalevsky

luiza

Agosto 2022

## 1 Introdução

O objetivo deste trabalho é apresentar uma prova alternativa do Teorema de Cauchy Kowalevsky usando ferramentas mais elementares do que comumente são apresentadas em cursos básicos de Equações Diferenciais. Ademais, também estamos interessados em trabalhar com equações cujas variáveis são complexas.

Essa nova versão que surgiu, primeiramente, em 1941 nos trabalhos de Nagumo, envolveu primeiramente um sistema quasilinear com valor inicial nulo (se não for nulo, sem perda de generalidade, é possível considerar um sistema equivalente), com equação:

$$v = u_t$$

$$v(t,z) = \sum_{j=1}^{n} B_j(t,z,Iv)Iv_{z_j} + c(t,z,Iv),$$

com $Iv(t,z) = \int_0^t v(\tau,z)d\tau\,(:= u)$. O método abordado foi considerar um espaço apropriado com que a equação acima tenha solução, ao considerar o operador integral associado à equação, e então aplicar algum teorema do ponto fixo. Como a equação envolve funções e suas respectivas derivadas, Nagumo criou um lema técnico que estima, ponto a ponto, a derivada de uma função holomorfa em termos da própria função.

Para facilitar as contas, iremos considerar o problema linear:

$$u_t = A(t,z)u + \sum_{j=1}^{n} B_j(t,z)u_{z_j} + c(t,z), \tag{1}$$

$$u(0,z) = \varphi(z) \tag{2}$$

em que $B_j$, $A$ são matrizes $m$ por $m$ e $u, c$ matrizes 1 por $m$ (vetores coluna). Para aplicar as ideias de Nagumo, buscaremos soluções na região cônica $0 \le t < l$, $|z| < R - Lt$ (diferente de $R^{n-1}$ como no caso real).

A ferramenta que usaremos para mostrar a equação (1) tem uma única solução analítica é o teorema do ponto fixo de Banach, após considerar tanto os coeficientes da equação quanto o dado inicial funções analíticas. Para aplicar o teorema também precisaremos de algumas estimativas. Posteriormente, também iremos verificar as vantagens em trabalhar com as variáveis complexas em cima de um exemplo, comparado ao Teorema de Cauchy Kowalevsky caso real.

# 2 Preliminares

Listaremos alguns resultados de variáveis complexas e multivariáveis complexas que serão essenciais no texto:

**Definição 2.1** (Definição de Função Holomorfa). Seja $G \subset \mathbb{C}^n$ um aberto. Uma função $f : G \to \mathbb{C}$ é holomorfa em $G$ se $f$ e $\frac{\partial f}{\partial z_i}$, $i = 1 \dots n$ são contínuas em $G$.

**Teorema 2.1** (Convergência de Função Holomorfa). Seja $G \subset \mathbb{C}^n$ um aberto e $\{f_n : G \to \mathbb{C}\}$ uma sequência de funções holomorfas que converge uniformemente em subconjuntos compactos de $G$ para uma função $f$. Então $f$ é holomorfa em $G$.

**Teorema 2.2** (Fórmula Integral de Cauchy). Seja $G \subset \mathbb{C}$ um aberto e $f : G \to \mathbb{C}$ uma função holomorfa. Então:

$$f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}} dw,$$

em que $\gamma(t) = a + re^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$.

## 2.1 Um repasso ao Teorema de Cauchy Kowalevsky caso Real

Nesta seção, iremos demonstrar o Teorema de Cauchy Kowalevsky em uma versão mais simples que a original, para simplificar as contas. O que o teorema nos garante é que dado uma equação quasilinear com coeficientes analíticos e condição inicial analítico, então existe uma única solução local analítica.

Vamos definir o tipo de problema que usaremos, aqui em $\mathbb{R}^N$, com condições no semiplano:

Seja $U = V \times [-R, R]$ um aberto de $\mathbb{R}^N$, em que $V \subset \mathbb{R}^{N-1}$ é um aberto e $R > 0$. Consideremos a equação:

$$\sum_{|\alpha|=k} a_\alpha(x, u(x), \partial u(x), \dots, \partial^{k-1}u(x))\partial^\alpha u(x) + a_0(x, u(x), \dots, \partial^{k-1}u(x)) = 0 \qquad (3)$$

**Definição 2.2.** Dadas funções $g_0, \dots, g_{k-1} : V \to \mathbb{R}$, o problema de Cauchy consiste em, para cada $x_0 \in V \times \{0\}$, achar um aberto $\tilde{V} \subset V$ e $0 < \tilde{R} < R$ tal que $x_0 \in \tilde{V} \times 0 \subset U$ e uma função $u \in C^k(\tilde{U})$, $\tilde{U} = \tilde{V} \times (-\tilde{R}, \tilde{R})$ tal que $u$ é solução de (3) em $\tilde{U}$ e é tal que:

$$\begin{aligned} u(x) &= g_0(x) \\ \frac{\partial u}{\partial x_n}(x) &= g_1(x) \\ &\vdots \\ \frac{\partial^{k-1} u}{\partial x_n^{k-1}}(x) &= g_{k-1}(x), \end{aligned}$$

para todo $x \in \tilde{V} \times \{0\}$.

Um fato importante é que as condições iniciais permitem determinar as derivadas da solução até ordem $k-1$ em $V$:

**Proposição 2.1.** Sejam $g_j \in C^\infty(U)$ e $u : \tilde{U} \to \mathbb{R}^N$ uma função de classe $C^k$ que é uma solução do problema de Cauchy acima. Então podemos determinar de maneira única as derivadas

$$\frac{\partial^j u}{\partial x_1^{k_1} \dots \partial x_N^{k_N}}(x)$$

para todo $x \in \tilde{V} \times \{0\}$ e $k_N \leq K - 1$.

*Demonstração.* Basta ver que, se $k_N \leq k - 1$ e $k_1 + \dots + k_N = j$ então

$$\frac{\partial^j u}{\partial x_1^{k_1} \dots \partial x_N^{k_N}}(x) = \frac{\partial^{j-k_N} u}{\partial x_1^{k_1} \dots \partial x_N^{k_N}}\left(\frac{\partial^{K_N} u}{\partial \partial x_N^{k_N}}(x)\right)(x) = \frac{\partial^{j-k_N} u}{\partial x_1^{k_1} \dots \partial x_N^{k_N}}(g_{k-N}(x)) = \frac{\partial^{j-k_N} g_{k_N}}{\partial x_1^{k_1} \dots \partial x_{N-1}^{k_{N-1}}}(x)$$

$\square$

Para demonstrar o teorema, o método consiste em buscar uma solução em série de potências nas variáveis convenientes em que os coeficientes são determinados recursivamente em função dos coeficientes $a_\alpha$ e $a_0$. O ingrediente principal é o método dos majorantes, no qual garantirá a convergência da série se considerarmos um problema auxiliar com a mesma estrutura em que majora o problema inicial, no sentido que todos os coeficientes envolvidos são positivos e o valor absoluto é maior que o do problema inicial.

Antes de mais nada, vamos enunciar o teorema em uma das suas formas mais simples (na bola), mas é possível encontrar sistemas equivalentes a esse mais completos (ver [2]).

**Teorema 2.3.** [Teorema de Cauchy-Kowalevsky caso Real] Seja $B \subset \mathbb{R}^n$ e $B' \subset \mathbb{R}^{n-1}$ bolas abertas de raio 1 e centro 0 em $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{R}^{n-1}$. Considere:

$$\frac{\partial u}{\partial x_n}(x) = \sum_{j=1}^{n-1} a_j(x', u(x)) \frac{\partial u}{\partial x_j}(x) + f(x', u(x)), \quad x \in B$$

$$u(x', 0) = 0, \quad x \in B' := B \cap (\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\})$$

Vamos supor que $a_j : B' \times \mathbb{R}^{nN} \to \mathbb{R}^{N \times N}$ é real analítica, $f : B' \times \mathbb{R}^{nN} \to \mathbb{R}^N$ é real analítica. Então existe uma bola $B_r = B(0, r) \subset \mathbb{R}^n$ de centro 0 e raio $0 < r \leq 1$ e $u : B_r \to \mathbb{R}^N$ que é a única solução analítica do problema em $B_r$.

Separaremos a demonstração em etapas:

**Definição 2.3.** Sejam $f = \sum f_\alpha x^\alpha$ e $g = \sum g_\alpha x^\alpha$ duas séries de potências. Dizemos que $g$ majora $f$ ($g >> f$) se $g_\alpha \geq |f_\alpha|$, para todo $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$

**Lema 2.1.** Seja $r > 0$ e $f : B \to \mathbb{R}$ em que $B = \{x \in \mathbb{R}^n; |x| < \frac{r}{\sqrt{n}}\}$ é dado por

$$f(x) = \frac{r}{r - (x_1 + \dots + x_n)} = \frac{1}{1 - \frac{x_1 + \dots + x_n}{r}}.$$

Então $f$ é analítica.

*Demonstração.* Observe que

$$\left|\frac{x_1 + \dots + x_n}{r}\right| \leq \frac{|x_1| + \dots + |x_n|}{r} \leq \frac{\sqrt{(|x_1|^2 + \dots + |x_n|^2)}}{r} \leq \frac{\sqrt{n|x|^2}}{r} \leq \frac{\sqrt{n}}{r}|x| < 1.$$

Assim:

$$\frac{1}{1-\frac{x_1+\ldots+x_n}{r}} = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{x_1+\ldots+x_n}{r}\right)^k = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{r^k}\sum_{|\alpha|=k}\frac{k!}{\alpha!}x^\alpha = \sum_{\alpha}\frac{|\alpha|!}{r^\alpha\alpha!}x^\alpha.$$

Veja que a série converge absolutamente, pois:

$$\sum_{\alpha}\frac{|\alpha|!}{r^\alpha\alpha!}|x^\alpha| = \frac{1}{1-\frac{x_1+\ldots+x_n}{r}} < 1$$

$\square$

**Lema 2.2.** Sejam $f = \sum_\alpha f_\alpha x^\alpha$ e $g = \sum_\alpha g_\alpha x^\alpha$ duas séries de potência.

1. Se $g >> f$ e $g$ converge para $|x| < r$ então $f$ converge para $|x| < r$.
2. se $f = \sum_\alpha f_\alpha x^\alpha$ converge absolutamente para $|x| < r$ e $0 < s\sqrt{n} < r$ então $f$ tem um majorante se $|x| < \frac{s}{\sqrt{n}}$.

*Demonstração.*

1. Se $|x| < r$ então $\sum_\alpha |f_\alpha x^\alpha| \leq \sum_\alpha g_\alpha |x_1|^{\alpha_1}\ldots|x_n|^{\alpha_n} \leq \infty$
2. Seja $0 < s\sqrt{n} < r$ e $y = (s,\ldots,s)$. Logo $|y| = \sqrt{n}s < r$. Assim $\sum_\alpha f_\alpha y^\alpha$ converge absolutamente. Logo existe $C > 0$ tal que $|f_\alpha y^\alpha| \leq C$, para todo $\alpha$. Assim:

$$|f_\alpha| \leq \frac{C}{y_1^{\alpha_1}\ldots y_n^{\alpha_n}} \leq \frac{C}{s^\alpha} \leq \frac{C|\alpha|!}{s^{|\alpha|}\alpha!}.$$

Mas:

$$g(x) = \frac{Cs}{s-(x_1+\ldots+x_n)} = C\sum_\alpha \frac{|\alpha|}{s^\alpha\alpha!}x^\alpha.$$

Logo $f << g$ se $|x| \leq \frac{s}{\sqrt{n}}$.

$\square$

**Lema 2.3.** Consideremos o sistema para $m = 1,\ldots,N$:

$$\frac{\partial u_m}{\partial u_n}(x) = \frac{M_r}{r-\sum_{j=1}^{n-1}x_j-\sum_{j=1}^{N}u_j(x)}\left(\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{N}\frac{\partial u_j(x)}{\partial x_i}+1\right),\quad x \in R^n$$

$$u_m(x',0) = 0,\quad x' \in R^{n-1}.$$

Logo existe uma bola $B(0,r) \subset R^n$ e uma função analítica $u : B \to R^N$ que resolve o problema acima.

*Demonstração.* Considere o problema em $R^2$:

$$\frac{\partial v}{\partial t}(s,t) = \frac{Mr}{r-s-Nv(s,t)}\left(N(n-1)\frac{\partial v}{\partial s}(s,t)+1\right),\quad (s,t) \in R^2 \tag{4}$$

$$v(s,0) = 0, s \in R \tag{5}$$

Se $v$ é uma solução numa vizinhança do zero, então:

$$u_m(x', x_n) = v(x_1 + \ldots + x_{n-1}, x_n), m \in \{1, \ldots, N\}$$

é uma solução do problema original. De fato, para todo $m \in \{1, \ldots, N\}$:

$$\frac{\partial u_m}{\partial x_n}(x) = \frac{\partial v}{\partial t}\left(\sum_{i=1}^{n-1} x_i, x_n\right)$$

$$\frac{\partial u_m}{\partial x_i}(x) = \frac{\partial v}{\partial s}\left(\sum_{i=1}^{n-1} x_i, x_n\right), \quad i \in \{1 \ldots, n-1\}$$

Assim:

$$\sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial u_m}{\partial x_i}(x) = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial v}{\partial t}\left(\sum_{i=1}^{n-1} x_i, x_n\right) = (n-1)\frac{\partial v}{\partial s}\left(\sum_{i=1}^{n-1} x_i, x_n\right)$$

e

$$\frac{\partial u_m}{\partial x_n}(x) = \frac{\partial v}{\partial t}\left(\sum_{i=1}^{n-1} x_i, x_n\right) = \frac{Mr}{r - \sum_{i=1}^{n-1} x_i - N u_m(x)}\left(N \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial u_m}{\partial x_i}(x) + 1\right)$$

Como $u_1 = \ldots = u_m = \ldots = u_N$ então $\sum_{j=1}^{N} u_j = N u_m$ e $\sum_{j=1}^{N} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} = N \frac{\partial u_m}{\partial x_i}$. Portanto:

$$\frac{\partial u_m}{\partial x_n}(x) = \frac{Mr}{r - \sum_{i=1}^{n-1} x_i - \sum_{j=1}^{N} u_j(x)}\left(\sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial u_j}{\partial x_i}(x) + 1\right).$$

Por fim, $u_m(x', 0) = v(x_1 + \ldots + x_{n-1}, 0) = 0$. Assim, resta resolver o problema em $v$. Para isso podemos usar o método das características em (4). Veja que manipulando (4), temos:

$$(r - s - Nv(s,t))\frac{\partial v}{\partial t}(s,t) - MrN(n-1)\frac{\partial v}{\partial s}(s,t) = Mr$$
$$v(s, 0) = 0.$$

Vamos usar $\tau$ e $\sigma$ ao invés de $s$ e $r$ para evitar confusões. Assim, devemos resolver:

$$t'(\tau) = (r - s(\tau) - Nz(\tau)), \ t(0) = 0$$
$$s'(\tau) = -MrN(n-1), \ s(0) = \sigma,$$
$$z'(\tau) = Mr, \ z(0) = 0.$$

As variáveis $s$ e $z$ nos dá que

$$z(\tau) = Mr\tau, \quad s(\tau) = \sigma - MrN(n-1)\tau.$$

Para a variável $t$, temos:

$$t'(\tau) = r - \sigma + MrN(n-1)\tau - NMr\tau, \ t(0) = 0.$$

Logo

$$t(\tau) = (r - \sigma)\tau + (MrN(n-1) - NMr)\frac{\tau^2}{2} = (r - \sigma)\tau + \frac{1}{2}MrN(n-1)\tau^2.$$

Agora, sabemos que a solução será dada por

$$v(s,t) = z(\tau(s,t))$$

Vamos escrever $\tau$ apenas em função de $s$ e $t$. Assim, $\sigma = s + MrN(n-1)\tau$ e

$$\begin{aligned} t &= (r-\sigma)\tau + \frac{1}{2}MrN(n-2)\tau^2 \\ &= (r-\sigma)\tau - MrN(n-1)\tau^2 + \frac{1}{2}MrN(n-2)\tau^2 \\ &= (r-s) - \frac{1}{2}MrNn\tau^2. \end{aligned}$$

Logo $MrNn\tau^2 - 2(r-s)\tau + 2t = 0$ e

$$\tau = \frac{r-s}{MrNn} \pm \frac{\sqrt{4(r-s)^2 - 8tMrNn}}{2MrNn} = \frac{r-s}{MrNn} \pm \frac{\sqrt{(r-s)^2 - 2MrNnt}}{MrNn}.$$

Note que se $\tau = 0$ implica que $t = 0$. Assim, $t = 0$ deve implicar que $\tau = 0$ já que devemos ter um difeomorfismo. Colando $t = 0$ na expressão acima, temos:

$$\tau = \frac{r-s}{MrNn} \pm \frac{\sqrt{4(r-s)^2 - 8tMrNn}}{2MrNn} = \frac{r-s}{MrNn} \pm \frac{\sqrt{(r-s)^2}}{MrNn}.$$

Como $\tau$ deve ser igual a zero, então o sinal $-$ é o correto, assim:

$$v(s,t) = Mr\tau(s,t) = \frac{r-s}{Nn} - \frac{\sqrt{(r-s)^2 - 2MrNnt}}{Nn}.$$

Portanto, $u$ é real analítica, numa vizinhança de zero, por ser composição de funções reais analíticas. $\square$

**Lema 2.4.** Seja $u : B_r \to \mathbb{R}^N$ uma função real analítica. Suponha que existisse uma função $u$ reais analítica que seja uma solução da equação abaixo:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial u}{\partial x_n}(x) = \sum_{j=1}^{n-1} a_j(x', u(x)) \frac{\partial u}{\partial x_j}(x) + f(x', u(x)), \;\; x \in B \\ &u(x', 0) = 0, \;\; x' \in B'. \end{aligned}$$

Suponha que $a_j(x', y) = \sum_{\alpha,\beta} A_{j\alpha\beta} x'^{\alpha} y^{\beta}$ e $f(x', y) = \sum_{\alpha,\beta} f_{j\alpha\beta} x'^{\alpha} y^{\beta}$. Logo a função $u$ é dada por uma série $u(x) = \sum_{\alpha} u_\alpha x^\alpha$ e é tal que os coeficientes $u_\alpha \in \mathbb{R}^N$ são unicamente determinados e são dados por

$$u_\alpha = Q_\alpha(A_{j\alpha\beta}, f_{j\alpha\beta}),$$

em que $Q_\alpha$ são polinômios (funções em $\mathbb{R}^N$ cujas entradas são polinômios) com coeficientes não negativos que independem de $A_{j\alpha\beta}$ e $f_{j\alpha\beta}$.

*Demonstração.* Vamos denotar $\alpha = (\alpha', \alpha_n) \in \mathbb{N}_0^{n-1} \times \mathbb{N}_0$ e mostrar o teorema por indução. Observemos que $\alpha_n = 0$ então como $u(x', 0)$ temos necessariamente que $u_{(\alpha',0)} = 0$ para todo $\alpha' \in \mathbb{N}_0^{n-1}$. Suponha que o lema valha para $\alpha_n \le N$ vemos que

$$\frac{\partial u}{\partial x_n}(x) = \frac{\partial}{\partial x_n}\left(\sum_{(\alpha',\alpha_n)} u_{(\alpha',\alpha_n)} x'^{\alpha'} x_n^{\alpha_n}\right) = (a_n + 1) \sum_{(\alpha',\alpha_n)} u_{\alpha',\alpha_n+1} x'^{\alpha'} x_n^{\alpha_n}.$$

Do lado direito, só temos derivadas em $i \in 1, \dots, n-1$. Assim, o termos $x'^{\alpha'} x_n^{\alpha_n}$ só depende de $u_{(\sigma',\sigma_n)}, \sigma_n \le \alpha_n$. Afinal, os termos com $\sigma_n > \alpha_n$ estarão multiplicados por $x_n^{\sigma_n}$. De otura forma, temos

$$\sum_{j=1}^{n-1} a_j(x', u(x)) \frac{\partial u}{\partial x_j}(x) + f(x', u(x)) = \sum_{\gamma \in \mathbb{N}_0^n} P_\gamma((u_\alpha)_{\alpha_n \le \gamma_n}, A_{j\alpha'\beta}, f_{j\alpha'\beta}) x'^{\gamma'} x_n^{\gamma_n}.$$

Concluímos que

$$u_{(\alpha',\alpha_n+1)} = \frac{1}{1+\alpha_n} P_\alpha((u_\sigma)_{\sigma_n \le \alpha_n}, A_{j\alpha'\beta}, f_{j\alpha'\beta}),$$

em que $P_\alpha$ só tem coeficientes não negativos pelo lema. Como $(u_\sigma)_{\sigma_n \le \alpha_n}$ é, pela hipótese de indução, também determinado por polinômios de coeficientes não negativos e $A_{j\alpha'\beta}$ e $f_{j\alpha'\beta}$, concluímos que

$$u_{(\alpha',\alpha_n+1)} = Q_{(\alpha',\alpha_n+1)}(A_{j\alpha'\beta}, f_{j\alpha'\beta}),$$

em que $Q_{(\alpha',\alpha_n+1)}$ é um polinômio com coeficientes não negativos. $\square$

Vamos demonstrar o Teorema de Cauchy Kowalevsky:

*Cauchy-Kowalevsky.* Consideremos $u(x) = \sum_\alpha u_\alpha x^\alpha$ a série com os termos dados por $u_\alpha = Q_\alpha(A_{j\alpha'\beta}, f_{j\alpha'\beta})$. Se esta série convergir, então pela sua própria construção, concluímos que $u$ será solução de

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x_n}(x) &= \sum_{j=1}^{n-1} a_j(x', u(x)) \frac{\partial u}{\partial x_j}(x) + f(x', u(x)), \ x \in B \\ u(x', 0) &= 0, \ x' \in B', \end{aligned}$$

já que a série de potências de $\frac{\partial u}{\partial x_n}(x)$ coincidirá com a série de potências de

$$\sum_{j=1}^{n-1} a_j(x', u(x)) \frac{\partial u}{\partial x_j}(x) + f(x', u(x))$$

e, portanto, as funções serão iguais. Seja $M$ e $r$ tal que a função abaixo:

$$(x, y) \to \frac{Mr}{r - \sum_{j=1}^{n-1} x_j - \sum_{j=1}^{N} y_j}$$

majora todas as componentes $a_j$ para todo $j$ e todas as componentes de $f$. Consideremos a equação:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial v}{\partial x_n}(x) = \sum_{j=1}^{n-1} \tilde{a}_j(x', u(x)) \frac{\partial v}{\partial x_j}(x) + \tilde{f}(x', u(x)), \ x \in B \\ &v(x', 0) = 0, \ x' \in B'. \end{aligned}$$

em que todas as componentes de $\tilde{\alpha}_j$ e $\tilde{f}$ são dadas pela função

$$(x, y) \to \frac{Mr}{r - \sum_{j=1}^{n-1} x_j - \sum_{j=1}^{N} y_j}.$$

Assim, o sistema se torna:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial v}{\partial x_n}(x) = \frac{Mr}{r - \sum_{j=1}^{n-1} x_j - \sum_{j=1}^{N} y_j} \left( \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\partial v_i(x)}{\partial x_j}(x) + 1 \right), \ x \in B \\ &v(x', 0) = 0, \ x' \in B', \end{aligned}$$

para $m \in \{1, \ldots, N\}$. Sabemos qeu existe uma solução do problema acima pelo lema provado anteriormente e que, se $v(x) = \sum_\alpha v_\alpha x^\alpha$, então $v_\alpha = Q_\alpha(\tilde{A}_{j\alpha'\beta}, \tilde{f}_{j\alpha'\beta})$,em que $\tilde{A}_{j\alpha'\beta}$ e $\tilde{f}_{j\alpha'\beta}$ corresponde aos termos da expansão de $\tilde{a}_j$ e $\tilde{f}$, respectivamente. Assim:

$$|u_\alpha| = |Q_\alpha(A_{j\alpha'\beta}, f_{j\alpha'\beta})| = Q_\alpha(|A_{j\alpha'\beta}|, |f_{j\alpha'\beta}|) \leq Q_\alpha(\tilde{A}_{j\alpha'\beta}, \tilde{f}_{j\alpha'\beta}) \leq v_\alpha,$$

ou seja, a série $u(x) = \sum_\alpha u_\alpha x^\alpha$ é majorada por uma série convergente, logo também converge, como queríamos. $\square$

# 3 Teorema de Cauchy Kowalevsky-Nova Versão

Essa nova versão do Teorema de Cauchy Kowalevsky nos fornecerá uma única solução analítica de equação diferencial com coeficientes (nem todos) analíticos com problema de valor inicial analítico, parecido com a versão anteriormente vista. A diferença é que como agora os coeficientes da equação são complexos, veremos que essa nova versão nos trará mais vantagens: a primeira delas é que conseguiremos controlar a solução a partir da condição inicial e que não precisaremos exigir que todos os coeficientes da equação sejam analíticos em todas as entradas, diferente da versão real. Resumindo, estamos prestes a provar uma versão melhorada do teorema.

Para isso, usaremos o conhecido Teorema do Ponto Fixo de Banach, isto é, dado um espaço métrico completo $(X, d)$ e $T : X \to X$ uma função que satisfaz, para algum $C \in (0, 1)$

$$d(Tx, Ty) \le Cd(x, y),$$

para todo $x, y \in X$ então existe um único $u \in E$ tal que $Tu = u$.

A principal dificuldade em criar as hipóteses dessa nova versão do Teorema de Cauchy Kowalevsky foi em encontrar um espaço de Banach em que induza que a norma do operador contínuo associado a nossa equação diferencial seja menor que 1. Porém, como motivação e garantia que os próximos resultados estão bem colocados é o Teorema de Bessaga, cuja demonstração utiliza-se o Axioma da Escolha e pode ser vista em [4]. Esse resultado pode ser interpretado como a recíproca do Teorema do Ponto Fixo de Banach:

**Teorema 3.1.** [Teorema de Bessaga] Se $M$ é um conjunto, $t \in [0, 1)$ e $T : M \to M$ é um operador linear com a propriedade que $T^n$ tem um único ponto fixo para todo $n \in \mathbb{N}$ então existe uma métrica $d$ que induz $M$ a ser um espaço métrico complexo e vale $d(Tx, Ty) \le d(x, y)$.

Veja que o teorema acima garante que existe uma métrica que faz a norma do operador $T$ ser menor que 1. O que veremos agora é que, no artigo [1], o autor conseguiu construir um conjunto tal que foi simples explicitar a métrica que realmenete obedece as exigências do Teorema 3.1 e assim dar uma prova alternativa do Teorema de Cauchy Kowalevsky.

## 3.1 Considerações Geométricas

Com as ideias expostas acima, vamos primeiramente definir o espaço em que trabalharemos.

Seja $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ um conjunto aberto com fronteira não vazia $\partial\Omega$ e considere

$$d(z) := d(z, \partial\Omega)$$

a distância de $z \in \Omega$ à $\partial\Omega$, que é calculada via norma do máximo $|z| := \max_{i=1,\ldots,n} |z_i|$.

O conjunto $G$, subconjunto de $\mathbb{R} \times \mathbb{C}^n$, será todos os pontos $(t, z)$, com $z \in \Omega$ e $|t| < \eta d(z)$, com $\eta$ constante positiva que posteriormente será escolhida com mais cuidado. Para cada $t \in \mathbb{R}$ fixo, defina $\Omega_t$ o conjunto de todos os pontos $z \in \Omega$ tais que $(t, z) \in G$. Veja que $d(t, z) = d(z) - \frac{|t|}{\eta} > 0$ é a distância de $z$ até $\partial\Omega_t$. Resumindo, temos:

$$G = \{(t, z); \quad z \in \Omega \text{ e } |t| < \eta d(z)\};$$
$$\Omega_t = \{z \in \Omega; \quad d(z) > |t|/\eta\}$$

Para exemplificar, consideremos $\Omega = B(z_0, R)$ a bola de centro $z_0$ e raio $R > 0$. Então, $d(z) = R - |z - z_0|$ e, para cada $t \in \mathbb{R}$ fixo, temos que

$$\Omega_t = \left\{ z \in \Omega; R - |z - z_0| > \frac{|t|}{\eta} \right\} = B(z_0, r),$$

com $r = R - \frac{|t|}{\eta}$ e $d(t,z) = R - |z - z_0| - \frac{|t|}{\eta}$. Veja que, geometricamente falando, o conjunto $G$ é um duplo cone com inclinação $\eta$. Em cada $t \in \mathbb{R}$ fixo, temos que $\Omega_t$ limita o cone para todo $\tilde{t} \in (-t, t)$. Neste caso em especifico, $t$ não ultrapassa de $\eta R$.

Agora, vamos apresentar uma proposição a cerca das propriedades de $d(t,z)$ que nos ajudará posteriormente:

**Proposição 3.1.** Se $z \in \Omega_t$ com $|z - z'| = r < d(t,z)$ então $z' \in \Omega_t$ e $d(t,z') \geq d(t,z) - r$.

*Demonstração.* Veja que vale para todo $z' \in \Omega$:

$$d(z, \partial\Omega) \leq d(z, z') + d(z', \partial\Omega) \tag{6}$$
$$\Longrightarrow d(z', \partial\Omega) \geq d(z, \partial\Omega) - d(z, z') \tag{7}$$

Com isto, $z' \in \Omega_t$ pois, se vale (6):

$$d(z', \partial\Omega) > d(z) - d(t,z) = d(z) - d(z) + \frac{|t|}{\eta} = \frac{|t|}{\eta}.$$

Ainda por (6), temos:

$$\begin{aligned} d(z', \partial\Omega) &\geq d(z, \partial\Omega) - d(z, z') = d(z, \partial\Omega) - r \\ \Longrightarrow d(z', \partial\Omega) - \frac{|t|}{\eta} &\geq d(z, \partial\Omega) - \frac{|t|}{\eta} - r \\ \Longrightarrow d(z', \partial\Omega) &\geq d(z, \partial\Omega) - r. \end{aligned}$$

Somando o termos $-\frac{|t|}{\eta}$, temos

$$d(t, z') \geq d(t, z) - r,$$

como queríamos. □

É importante relembrar que será no ambiente do conjunto $G$ que iremos colocar nossa equação e por fim, definir o espaço vetorial em que a solução pertencerá.

## 3.2 Equação Diferencial Caso Linear

Vimos no caso real que podemos aplicar o Teorema de Cauchy-Kowalevsky em equações diferenciais quasilineares. Essa consideração pode ser mantida para o caso em que vamos estudar, mas para facilitar algumas contas, iremos abordar apenas o caso linear. Defina o seguinte problema de valor inicial:

$$u_t = A(t,z)u + \sum_{j=1}^{n} B_j(t,z)u_{z_j} + c(t,z) \quad \text{in} \quad G; \tag{8}$$
$$u(0,z) = \varphi(z) \quad \text{in} \quad \Omega \tag{9}$$

que é equivalente a equação integral:

$$u(t,z) = g(t,z) + \int_0^t [A(\tau,z)u(\tau,z) + \sum_{j=1}^{m} B_j(\tau,z)u_{z_j}(\tau,z)]d\tau, \tag{10}$$

em que $g(t,z) = \varphi(z) + \int_0^t c(\tau,z)d\tau$, $u = (u_1,\ldots,u_m) \in \mathbb{C}^m$. Consideremos os coeficientes $A, B_j$ como sendo matrizes $M_{m\times m}(\mathbb{C})$ e $c, \varphi : \mathbb{C}^m \to \mathbb{C}$.

No nosso caso, como $t \in \mathbb{R}$, pelo Teorema Fundamental do Cálculo, temos:

$$\begin{aligned}\int_0^t u_\tau(\tau,z)d\tau = u(t,z) - u(0,z) &= \int_0^t [A(\tau,z)u(\tau,z) + \sum_{j=1}^{m} B_j(\tau,z)u_{z_j}(\tau,z)]d\tau \\ \Longrightarrow u(t,z) &= \varphi(z) + \int_0^t [A(\tau,z)u(\tau,z) + \sum_{j=1}^{m} B_j(\tau,z)u_{z_j}(\tau,z)]d\tau.\end{aligned}$$

Vamos definir o que significa ser uma solução de 10 nos termos deste trabalho:

**Definição 3.1.** Uma solução de (10) é uma aplicação contínua em $G$ e holomorfa em $z$, para cada $t \in \mathbb{R}$ fixo.

Antes de continuarmos, esclareceremos algumas notações: iremos usar a norma do máximo para denotar a norma de $u$, $|u| = \max_{j=1,\ldots,m} |u_j|$. A norma do operador matriz $A = (a_{jk})$ será denotada por $|A| = \max_k \sum_{j=1}^{m} |a_{jk}|$.

## 3.3 Teorema de Cauchy-Kowalevsky

Vamos apresentar um lema que será crucial para a demonstração do teorema de Cauchy-Kowalevsky, o Lema de Nagumo, que é uma ferramenta que permitirá, pontualmente, encontrar uma majoração da derivada de uma função holomorfa a partir da própria função. Segundo o artigo [1], historicamente, o lema surgiu nos trabalhos de Nagumo em 1941, no caso em que o teorema estava sob condições de $\Omega$ é uma bola de centro na origem e raio $R > 0$. Aqui, utilizaremos o lema no caso em que $\Omega$ é a região cônica anteriormente descrita.

**Lema 3.1** (Lema de Nagumo)**.** Seja $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ um aberto com fronteira $\partial\Omega$ não vazia. Seja $f : \Omega \to \mathbb{C}^m$ uma aplicação holomorfa e $p \geq 0$. Então para cada $z \in \Omega$, se $|f(z)| \leq \frac{C}{d^p(z)}$ então

$$|f_{z_j}| \leq C_p \frac{C}{d^{p+1}(z)},$$

em $C_p = (1+p)(1+\frac{1}{p})^p (< e(p+1))$, $C_0 = 1$.

Demonstração. Seja $z \in \Omega$. Como $\Omega$ é um aberto de $\mathbb{C}^n$ então existe $B(z,r) = B_1(z_1,r) \times \ldots \times B_n(z_n,r) \subset \Omega$. Veja que como $f : \Omega \to \mathbb{C}^m$ então $\tilde{f} : B(z,r) \to \mathbb{C}^m$, restrição da $f$ em $B(z,r)$, também é holomorfa. Considere a aplicação, definida para cada $j = 1,\ldots,n$, em que $B_j(\xi_0,r) = \{\xi \in \mathbb{C}; |\xi - \xi_0| < r\}$:

$$\begin{aligned}\varphi_j &: B_j(\xi_0,r) \to \mathbb{C} \\ \varphi_j(\xi) &= f(z_1,\ldots,\xi,\ldots,z_n),\end{aligned}$$

em que $\xi$ está posicionado na j-ésima coordenada. Veja que para cada $j = 1, \ldots, n$, $\varphi_j$ é holomorfa. De fato, $\varphi_j$ é contínua pois dado $\varepsilon > 0$ e $\xi_j \in B_j(\xi_0, r)$, $|\xi_j - \eta_j| \leq \max_j |\xi_j - \eta_j| \leq \delta$ (pois $f$ é holomorfa) implica que

$$|\varphi_j(\xi) - \varphi_j(\eta)| = |f(z_1, \ldots, \xi, \ldots, z_n) - f(z_1, \ldots, \eta, \ldots, z_n)| < \varepsilon.$$

Ademais, como argumento análogo, podemos ver que

$$\varphi_j'(\xi) = \frac{\partial}{\partial \xi} f(z_1, \ldots, \xi, \ldots, z_n) = f_{z_j}(z_1, \ldots, z_n)$$

é contínua, pois $\frac{\partial f}{\partial \xi}$ é contínua, concluindo que $f$ é holomorfa.

Assim, aplicando a fórmula integral de Cauchy (versão derivada) para $\varphi$, temos:

$$\varphi_j'(\xi) = \frac{1!}{2\pi i} \int_\gamma \frac{\varphi_j(\xi)}{(\xi' - \xi)^{1+1}} d\xi',$$

em que $\gamma$ é uma curva fechada em $B_j(\xi_0, r)$. Escolhendo $\xi' = \xi + re^{i\theta}$, com $\theta \in [0, 2\pi]$, então

$$\varphi_j'(\xi) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\xi' - \xi| = r} \frac{\varphi_j(\xi)}{(\xi' - \xi)^2} d\xi'. \tag{11}$$

Assim, para todo $j = 1, \ldots, n$

$$\begin{aligned}
|\varphi_j'(\xi)| &= \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{|\xi' - \xi| = r} \frac{\varphi_j(\xi)}{(\xi' - \xi)^2} d\xi' \right| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{|\xi - \xi'| = r} \frac{|\varphi_j(\xi')|}{(\xi' - \xi)^2} d\xi' \\
&\leq \frac{1}{2\pi} \frac{1}{r^2} \max_{|\xi' - \xi| = r} |\varphi_j(\xi')| \int_{|\xi' - \xi| = r} |d\xi'| = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{r^2} \max_{|\xi' - \xi| = r} |\varphi_j(\xi')| \cdot 2\pi r \\
&= \frac{1}{r} \max_{|\xi' - \xi| = r} |\varphi_j(\xi')|.
\end{aligned}$$

Concluindo então que, para todo $j = 1, \ldots, n$, temos

$$|\varphi_j'(\xi)| = \frac{1}{r} \max_{|\xi' - \xi| = r} |\varphi(\xi')|.$$

Veja que a estimativa é válida com $\xi \in \mathbb{C}$. Estenderemos o resultado para $z \in \mathbb{C}^n$. Seja $|z' - z| \leq r$ e observe que, se $z = (z_1, \ldots, z_{j-1}, \xi, z_{j+1}, \ldots, z_n)$ então

$$\left|\frac{\partial f}{\partial z_j}(z)\right| \leq \frac{1}{r} \sup_{|\xi' - z_j| = r} |f(z_1, \ldots, z_{j-1}, \xi', z_{j+1}, \ldots, x_n)|,$$

em que (lembremos que estamos usando a norma do máximo):

$$|(z_1, \ldots, z_{j+1}, \xi', z_{j-1}, \ldots, z_n) - (z_1, \ldots, z_n)| = |\xi' - z_j| = r,$$

isto é, $(z_1, \ldots, z_{j-1}, \xi', z_{j+1}, \ldots, x_n) \in S_r(z) = \{z' \in \Omega, |z - z'| = r\}$. Aplicando esse argumento, temos que

$$|f_{z_j}(z)| \leq \frac{1}{r} \max_{|z - z'| = r} |f(z')| \overset{\text{hip}}{\leq} \frac{c}{r} \max_{|z - z'| = r} \frac{1}{d^p(z')}.$$

Veja que se $B(z,r) \subset \Omega$, então $d(z) > r$. Como vale, pela Proposição 6 que (lembremos que $d(z) := d(z, \partial\Omega)$)

$$\begin{aligned} & d(z') \geq d(z) - |z - z'| \\ \implies & d(z') \geq d(z) - r > 0 \end{aligned}$$

então

$$|f_{z_j}(z)| \leq \frac{C}{r} \max_{|z-z'|=r} \frac{1}{d^p(z')} \leq \frac{C}{r} \frac{1}{(d(r) - r)^p}.$$

Como $r$ depende da escolha da bola, vamos escolher de forma que a estimativa independa dessa bola e que seja ótima. Veja que $d(z) > r > 0$ e que queremos que

$$|f_{z_j}(z)| \leq \inf_{0<r<d} \frac{C}{r} \frac{1}{(d(r) - r)^p}.$$

Defina a função:

$$\begin{aligned} \lambda &: (0, d(z)) \to \mathbb{R} \\ \lambda(r) &= \frac{c}{r(d-r)^p} \end{aligned}$$

Veja que a aplicação está bem definida, sua derivada existe e é dada por

$$\lambda'(r) = \frac{-[(d-r)^p + rp(d-r)^{p-1}]}{r^2(d-r)^{2p}}.$$

Queremos $\tilde{r} \in (0, d(r))$ tal que $\lambda'(\tilde{r}) = 0$, isto é,

$$-[(d-\tilde{r})^p + \tilde{r}p(d-\tilde{r})^{p-1}] = 0 \implies \tilde{r} + \tilde{r}p = d \implies \tilde{r} = \frac{d}{1+p}.$$

Veja que $p$ deve ser diferente de 0. Logo $\tilde{r} = \frac{d}{1+p}$ é um ponto ótimo da função $\lambda$. Assim, substituindo $\tilde{r}$ em $\lambda$:

$$\lambda(\tilde{r}) = \frac{c}{\frac{d}{(1+p)}\left(d - \frac{d}{1+p}\right)^p} = \frac{c}{d^{p+1}} \frac{1}{\frac{1}{1+p}\left(1 - \frac{1}{(1+p)}\right)^p} = \frac{c}{d^{p+1}}(1+p)\left(1 + \frac{1}{p}\right)^p,$$

concluindo que

$$|f_{z_j}(z)| \leq C_p = (1+p)(1+\frac{1}{p})^p.$$

O caso $p = 0$ nos dá que $\lambda$ é uma função constante positiva, logo a derivada é constante igual a 1, concluindo que $C_0 = 1$. □

**Proposição 3.2.** O conjunto $E$ das funções $u \in C^0(G, \mathbb{C}^m)$ que são holomorfas em $z$ e tem norma finita

$$\|u\| := \sup_G(|u(t,z)|d^p(t,z)).$$

é um espaço de Banach.

Demonstração. Veja que $E$ é um espaço vetorial pois dado $u, v \in E$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, $u + \lambda v$ é contínuo em $G$ e holomorfo em $z$. Também temos que $\|.\| : E \to \mathbb{R}^+$ é uma norma pois dados $u, v \in E$, $\lambda \in \mathbb{R}$:

1. $\|u + v\| = \sup_G |u(t,z) + v(t,z)|d^p(t,z) \leq \sup_G |u(t,z)|d^p(t,z) + \sup_G |v(t,z)|d^p(t,z)$ $= \|u\| + \|v\|$.
2. $\|\lambda z\| = \sup_G |\lambda u(t,z)|d^p(t,z) = |\lambda|\|u\|$.
3. Se $\|u\| = 0$ então $\sup_G |u(t,z)|d^p(t,z) = 0$. Assim, seja $\epsilon > 0$ então existe $(t,z) \in G$ tal que $-\epsilon < |u(t,z)|d^p(t,z) \leq 0$. Como $d^p(t,z) > 0$, então $0 \leq |u(t,z)| \leq 0$ implica que $u(t,z) = 0$. Como vale para todo $\epsilon > 0$, $u = 0$.

Por fim, vamos mostrar que $E$ é um espaço de Banach. Seja $\{u_j\}$ uma sequência de Cauchy em $E$. Assim, dado $\epsilon > 0$, existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que, para qualquer $j, k > N_0$ tem-se que $\|u_j - u_k\| < \epsilon$, isto é:

$$\sup_G(|u_j(t,z) - u_k(t,z)|d^p(t,z)) < \epsilon.$$

Seja $K$ um conjunto relativamente compacto de $G$. Logo, existem $c, C > 0$ tais que $c \leq d^p(t,z) < C$ para todo $(t,z) \in K$. Assim:

$$c|u_j(t,z) - u_k(t,z)| \leq d^p(t,z)|u_j(t,z) - u_k(t,z)| < C|u_j(t,z) - u_k(t,z)|,$$

para todo $(t,z) \in K$. Como $|u_j(t,z) - u_k(t,z)|d^p(t,z) < \epsilon$, então $c|u_j(t,z) - u_k(t,z)| < \epsilon$. Logo $u_j$ é uniformemente de Cauchy em compactos de $G$, então existe $u$ contínua em $G$, holomorfa em $z$ tal que $u_j \to u$ (norma do sup). Falta mostrar que $\|u_j - u\| \to 0$.

Se dado $\epsilon > 0$ existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$|u_j(t,z) - u_k(t,z)|d^p(t,z) \leq \epsilon,$$

para todo $j, k \geq j_0$ e $(t,z) \in G$. Então fixando $j \in \mathbb{N}$, $(t,z) \in G$ e fazendo $k \to \infty$ temos

$$|u_j(t,z) - u(t,z)|d^p(t,z) \leq \epsilon,$$

para todo $j \geq j_0, (t,z) \in G$ implica em

$$\sup_G |u_j(t,z) - u(t,z)|d^p(t,z) := \|u_j - u\| \leq \epsilon$$

□

Agora estamos aptos para demonstrar o Teorema de Cauchy-Kowalevsky:

**Teorema 3.2.** [Teorema de Cauchy-Kowalevsky] Assuma que:

- As funções $A(t,z)$, $B_j(t,z), c(t,z)$ são contínuas em $G$ e holomorfas em $z$ para um $t$ fixo. Assuma que $\varphi(z)$ seja holomorfa em $z$;
- Existem $\alpha$, $\beta_j$, $\gamma$, $\delta$ e $p$ tais que valem as estimativas em $G$:

$$|A(t,z)| \leq \frac{\alpha}{d(t,z)}, \quad |B_j(t,z)| \leq \beta_j$$

$$|c(t,z)| \leq \frac{\gamma}{d^{p+1}(t,z)}, \quad |\varphi(z)| \leq \frac{\delta}{d^p(z)}$$

- $\frac{\alpha}{p} + (1 + (\frac{1}{p}))^{p+1} \sum b_j \leq \frac{1}{\eta}$ (esta constante sempre pode ser encontrada diminuindo $\eta$, se necessário).

Então a equação (8) tem uma única solução $u$ em $G$ e satisfaz $|u(t,z)| \leq \frac{C}{d^p(t,z)}$ em $G$.

Demonstração. Vamos trabalhar com a equação (10):

$$u(t,z) = g(t,z) + \int_0^t [A(\tau,z)u(\tau,z) + \sum_{j=1}^{m} B_j(\tau,z)u_{z_j}(\tau,z)]d\tau,$$

em que $g(t,z) = \varphi(z) + \int_0^t c(\tau,z)d\tau$. Seja $E$ o espaço como a Proposição 3.2 e definindo a aplicação:

$$T : E \to C^0(G, C^m) \tag{12}$$

$$T(u)(t,z) = \int_0^t \left( A(\tau,z)u(\tau,z) + \sum_{j=1}^{m} B_j(\tau,z)u_{z_j}(\tau,z) \right) d\tau \tag{13}$$

Reescrevendo (10) na forma $u = g + Tu$, vamos mostrar que $T$ é um operador linear tal que $Im(T) \subset E$ e $\|T\| < 1$.

Para a primeira afirmação, veja que $Tu = u - g$, em que $u \in E$. Como $E$ é um espaço vetorial, basta mostrar que $g \in E$. Isto é, temos que mostrar que $g$ é holomorfa em $z$, contínua em $G$ e $\|g\|$ é finita. Vejam que, por hipótese, $c, \varphi$ são funções holomorfas em $z$ com $t$ fixo. Assim, dado $\epsilon > 0$ existe $\tilde{\delta} > 0$ tal que $|z - z_0| \leq \tilde{\delta}$ implica que $|c(\tau,z) - c(\tau,z_0)| \leq \epsilon$.

Seja $\epsilon > 0$ e $t \geqq 0$, tomando $\delta < \tilde{\delta}$, temos que

$$|f(t,z) - f(t,z_0)| = |\int_0^t c(\tau,z)d\tau - \int_0^t c(\tau,z_0)d\tau| \leq \epsilon|t|,$$

Logo $f(t,z) = \int_0^t c(\tau,z)d\tau$ é holomorfo em $z$. O caso para $t = 0$ é simples, pois $f(0,z) = 0$, portanto holomorfo em $z$. Vale notar também que como $c, \varphi$ são contínuos em $G$, então $f$ também é. terminar de fazer a conta

Vejamos que $\|g\| := \sup_G |g(t,z)|d^p(t,z)$ é finita. Antes veja que:

$$\begin{aligned}
\sup_G |\varphi(z) + \int_0^t c(\tau,z)d\tau| &\leq \sup_G |\varphi(z)| + \sup_G |\int_0^t c(\tau,z)d\tau| \\
&= \underbrace{\sup_G |u(0,z)|}_{<\infty} + \sup_G |\int_0^t c(\tau,z)d\tau|
\end{aligned}$$

Veja que $\|\varphi\| = \sup_G (|u(0,z)|d(t,z)^p)$ é finita. Falta mostrar que $\|c\|$ é finito, para todo $t \in R$.

$$
\begin{aligned}
\left|\int_0^t c(\tau,z)d\tau\right| &\leq \int_0^t |c(\tau,z)d\tau| \overset{hip}{=} \int_0^t \frac{\gamma}{d^{p+1}(\tau,z)}d\tau \overset{def}{=} \gamma \int_0^t \frac{d\tau}{(d(z)-\frac{|\tau|}{\eta})^{p+1}} \\
&\overset{(1)}{=} \gamma \int_0^{|t|} \frac{d\tau}{(d(z)-\frac{s}{\eta})^{p+1}} \overset{(2)}{=} \frac{\gamma\eta}{p}\left[\frac{1}{(d(z)-\frac{|t|}{\eta})^p} - \frac{1}{d(z)^p}\right] \\
&= \frac{\gamma\eta}{p}\left(\frac{1}{d(t,z)^p} - \frac{1}{d(z)^p}\right) < \frac{\gamma\eta}{p}\frac{1}{d(t,z)^p}.
\end{aligned}
$$

implica que

$$
d(t,z)^p\left|\int_0^t c(\tau,z)d\tau\right| \leq \frac{\gamma\eta}{p}
$$

em que em (2) foi usado a mudança de variável $x = d(z) - \frac{s}{\eta}$ e em (1) foi analisado os casos $t \geq 0$ e $t < 0$. Veja que este último pode ser verificado com a passagem:

$$
\int_0^{-t} \frac{d\tau}{(d(z)-\frac{|\tau|}{\eta})^{p+1}} \overset{s=-\tau}{=} \int_0^{-t} \frac{ds}{(d(z)-\frac{s}{\eta})^{p+1}}.
$$

Veja que concluímos que vale a desigualdade:

$$
d(t,z)^p\left|\int_0^t c(\tau,z)d\tau\right| \leq \frac{\gamma\eta}{p}
$$

Como $\frac{\gamma\eta}{p}$ é um termo limitado, segue que $\sup_G |d(t,z)^p \int_0^t c(\tau,z)d\tau| < \infty.$, concluindo o que queríamos.

Vamos mostrar que $T : E \to E$ é um operador limitado com norma 1, isto é, $\|Tu\| \leq \|T\|\|u\| < \|u\|$, para todo $u \in E$ em que $\|u\| = \sup_G(|u(t,z)|d^p(t,z))$.

Primeiramente, como $\|u\| = \sup_G(|u(t,z)|d^p(t,z)) \geq |u(t,z)|d^p(t,z)$, para todo $(t,z) \in G$ então

$$
|u(t,z)| \leq \frac{\|u\|}{d^p(t,z)}, \tag{14}
$$

para todo $(t,z) \in G$.

Como $u$ é holomorfo em $z$ e $p \geq 0$, aplicando o Lema 3.1 para $\Omega_t$ para $t$ fixo temos:

$$
|u_{z_j}(t,z)| \leq C_p\frac{\|u\|}{d^{p+1}(t,z)}. \tag{15}
$$

Como queremos majorar a norma de $T$, observemos que

$$
|T(u)(t,z)| \leq \int_0^t (|A(\tau,z)u(\tau,z)| + \sum_{j=1}^{N} |B_j(\tau,z)u_{z_j}(\tau,z)|)d\tau \tag{16}
$$

em que

$$
|A(t,z)||u(t,z)| \leq \frac{\alpha}{d(t,z)}\frac{\|u\|}{d^p(t,z)} = \frac{\alpha\|u\|}{d^{p+1}(t,z)}, \quad \forall (t,z) \in G,
$$

e, para cada $j = \{1,\ldots,N\}$:

$$|B_j(t,z)||u_{z_j}(t,z)| \leq \beta_j C_p \frac{\|u\|}{d^{p+1}(t,z)}.$$

Logo, se $\beta = \beta_1 + \ldots + \beta_n$:

$$\begin{aligned}
|T(u)(t,z)| &\leq \int_0^t \frac{\alpha\|u\|}{d^{p+1}(\tau,z)} + \beta C_p \frac{\|u\|}{d^{p+1}(\tau,z)} d\tau \\
&\leq \|u\|(\alpha+\beta C p) \int_0^t \frac{d\tau}{d^{p+1}(\tau,z)} \\
&\leq \|u\|(\alpha+\beta C p) \frac{\eta}{p d^p(t,z)}.
\end{aligned}$$

Assim, por (14),

$$|(T(u))(t,z)|d^p(t,z) \leq \|Tu\| \leq q\|u\|,$$

para todo $u \in E$, em que

$$\left(\frac{\alpha}{p}+\frac{\beta C_p}{p}\right)\eta = \left(\frac{\alpha}{p}+\beta\left(\frac{(1+p)}{p}(1+\frac{1}{p})^p\right)\right)\eta = \left(\frac{\alpha}{p}+\beta\left(1+\frac{1}{p}\right)^{p+1}\right) < 1. \quad (17)$$

Assim, pelo Teorema do Ponto Fixo de Banach, existe um único ponto fixo para a equação $u - g = Tu$, o que segue que a equação tem uma única solução em $E$. (Isso não exclui o fato que pode ter outras soluções fora de $E$.) □

Um teorema bastante importante cuja demonstração pode ser encontrada em [[1], pag 122] é a dependência continua da solução do problema (8) comparada aos coeficientes da equação. Veremos posteriormente que unicidade do problema com a propriedade acima define um problema bem posto no sentido de Hadamard, o que nem sempre ocorre na mesma classe de problemas se estivessem com coeficientes reais.

**Teorema 3.3.** Com as mesmas condições impostas no Teorema 3.2, a solução $u$ do problema de Cauchy (8) depende continamente das funções $A, B_j, c$ e $\varphi$. Isto é, dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que a solução $u^\epsilon$ do problema correspondente (8), agora com coeficientes $A^\epsilon, B_j^\epsilon, c^\epsilon$ e $\varphi^\epsilon$ tais que satisfazem:

$$|A(t,z) - A^\epsilon(t,z)| \leq \frac{\delta}{d(t,z)}, \; |B_j(t,z) - B_j^\epsilon(t,z)| \leq \delta$$
$$|c(t,z) - c^\epsilon(t,z)| \leq \frac{\delta}{d^{p+1}(t,z)}, \; |\varphi(z) - \varphi^\epsilon(z)| \leq \frac{\delta}{d^p(z)}$$

pertence a $\epsilon$-vizinhança de $u$ (em $E$):

$$|u(t,z) - u^\epsilon(t,z)| \leq \frac{\epsilon}{d^p(t,z)}.$$

## 3.4 Teorema de C-K clássico versus Teorema de C-K atual

Começaremos com um exemplo no âmbito das equações elípticas, para mostrarmos como a equação se comporta se mudarmos para variáveis complexas:

**Exemplo 3.1.** Considere a equação elíptica:

$$u_{tt} + u_{xx} = 0,$$

com $u(0, x) = 0$ e $u_t(0, x) = \varphi(x)$.

Veja que, se existe uma solução para todo t, então ela é harmônica, portanto analítico (pois toda função harmônica é parte real de uma função holomorfa, logo é analítica). Assim, $\varphi$ é uma função analítica. O que acabamos de argumentar é que, se a equação acima tem solução, então a condição inicial deve ser analítica.

Agora, veja que se todos os seus coeficientes são analíticos e as condições iniciais também então, pelo Teorema de Cauchy-Kowalevsky, o problema tem uma solução analítica local. Assim, o que concluímos é que o problema acima nunca terá solução se $\varphi$ não for analítica.

Vejamos uma das vantagens de se trabalhar com as variáveis complexas. Antes, vejamos o que significa o problema acima estar bem posto no sentido de Hadamard:

**Definição 3.2.** O problema acima está bem posto se ocorre três condições:

1. O problema possui uma solução;
2. Essa solução é única;
3. A solução depende continuamente da condição inicial e seus parâmetros, isto é, pequenas variações nas condições iniciais deve implicar em pequenas variações na solução.

**Exemplo 3.2** (Exemplo de Hadamard)**.** Considere a equação elíptica:

$$u_{tt} + u_{xx} = 0, \tag{18}$$
$$u(0, x) = 0 \tag{19}$$
$$u_t(0, x) = a\sin(kx). \tag{20}$$

Vejamos em R como o problema se comporta, verificando a condição (3) da definição acima. Primeiramente, vamos atrás da sua solução explicita. Faremos isso método separação de variáveis.

Seja $u(t, x) = X(t)Y(x)$ uma solução do problema (18). Daí:

$$X''(t)Y(x) + X(t)Y''(x) = 0$$

implica em, se a solução não tiver pontos nulos:

$$\frac{X''(t)}{X(t)} = \frac{-Y''(x)}{Y(x)}.$$

Se vale a igualdade para variáveis independentes, então existe constante C tal que

$$\frac{X''(t)}{X(t)} = \frac{-Y''(x)}{Y(x)} = C.$$

Vamos escolher a constante de forma apropriada: Como $u_t(t,x) = X'(t)Y(x)$ implica que

$$u_t(0,x) = X'(0)Y(x) = a\sin(kx).$$

Como podemos escolher $X'(0) = 1$, temos que $Y(x) = a\sin(kx)$ e assim, resolvendo $X''(t) = CX(t)$, temos:

$$X(t) = \frac{A}{k}\cosh(kx) + \frac{B}{k}\sinh(kt).$$

Pelas escolhas, temos $X'(0) = 1$ e $X(0) = 0$. Substituindo, temos que $A = 0$ e $B = 1$ concluindo que

$$u(t,x) = \frac{a}{k}\sin(kx)\sinh(kt).$$

Observe que este problema não está bem posto no sentido da Definição (3.2) pois, considerando o problema com $a = 0$, temos que a solução é $\tilde{u}(t,x) = 0$. Por outro lado, se $a > 0$ é pequeno então

$$|u_t(0,x)| = |a\sin(kx)| \leq a,$$

logo

$$|u(t,x)| = \left|\frac{a}{k}\sin(kx)\sinh(kt)\right| \leq \frac{a}{k}\sinh(kt) \to \infty,$$

se $k \to \infty$. Assim, o problema com $a = 0$ não depende continuamente das condições iniciais, concluindo que o problema de Hadamard não é bem posto.

Agora, ao considerar o problema em $\mathbb{C}$, temos que o problema está bem posto no sentido de Hadamard e considerando o Teorema (3.3). A solução é dada por $u(t,z) = \frac{a}{k}\sin(kz)\sinh kt$ em que $G$ é definido $|t| < \eta(\rho - |z|)$ e é possível verificar que se $|z| \leq \sigma$ tanto o máximo de $|\sin(kz)|$ quanto de $|\sinh kt|$ é aproximadamente $\frac{1}{2}e^{k\sigma}$ em $G$.

**Observação 3.1.** Esse exemplo é uma particularidade do que ocorre nas equações elípticas. Geralmente, nas equações hiperbólicas em $\mathbb{R}$, temos que essa classe de problemas respeitam o bom posicionamento definido por Hadamard.

Referências em maior escala de uso:

# Referências

[1] Walter; Wolfgang. An Elementary Proof of Cauchy-Kowalevsky Theorem, The American Mathematical Monthly, Vol. 92, No.2, 1985, pp. 115-126. TaylorFrancis, Ltd.

[2] Evans; Lawrence. Partial Di�erential Equations, American Mathematical Soc., 2010.

[3] Conway; John. Function of One Complex Variable I. Springer; 2nd 1978. Corr. 7th Printing 1995 ed. edição (7 abril 1995).

[4] Bessaga;C. On the converse of the Banach fixed-point principle, Colloq. Math. 7( 1959), 41–43