MAP5707 - 1o. Semestre de 2022 - Lista de exercícios

1. Dê um exemplo de dois domínios de holomorfia cuja reunião não é um domínio de holomorfia.

2. Seja $\Omega \subset \mathbb{C}^N$ um subconjunto aberto. Mostre que as propriedades abaixo são equivalentes:

   (a) Ω é um domínio de holomorfia;

   (b) $K \subset \Omega$, fechado em Ω, é compacto se, e somente se, $\sup_K |f| < \infty$ para toda $f \in \mathcal{O}(\Omega)$.

3. Seja $\Omega \subset \mathbb{C}^N$ aberto. Mostre que as afirmações abaixo são equivalentes:

   (a) Ω é um domínio de holomorfia;

   (b) Qualquer que seja a sequência infinita $\{p_j\}$ em Ω, sem pontos de acumulação em Ω, existe $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ com $\sup_j |f(p_j)| = \infty$.

4. Seja $\Omega \subset \mathbb{C}^N$ um aberto holomorficamente convexo e sejam $f_1 \ldots, f_n \in \mathcal{O}(\Omega)$. Mostre que
$$\{z \in \Omega : |f_j(z)| < 1, j = 1, \ldots, n\}$$
também é holomorficamente convexo.

5. Seja $\Omega \subset \mathbb{C}$ um subconjunto aberto e $a \in \Omega$. Seja $u \in C(\Omega)$ e suponha que u seja subharmônica em $\Omega \setminus \{a\}$. Mostre que u é subharmônica em Ω. *Sugestão: considere a função* $u_\varepsilon(z) = u(z) + \varepsilon \log |z - a|$.

6. Sejam $f, g \in \mathcal{O}(\mathbb{C}^N)$ tais que $|f(z)| \leq |g(z)|$ para todos $z \in \mathbb{C}^N$. Mostre que existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que $f = \lambda g$. Sugestão: para este exercício utilize a seguinte versão do teorema de Riemann para singularidades removíveis em $\mathbb{C}^N$: *Teorema. Sejam* $\Omega \subset \mathbb{C}^N$ *aberto e conexo e* $g \in \mathcal{O}(\Omega)$ *não identicamente nula. Defina* $V(g) = \{z \in \Omega : g(z) = 0\}$. *Seja* $f \in \mathcal{O}(\Omega \setminus V(g))$ *e suponha que* f *seja limitada em* $\Omega \setminus V(g)$. *Então* f *se estende como uma função holomorfa em* Ω.

7. Seja K um subconjunto compacto de $\mathbb{C}^N$. Mostre que
$$\widehat{(K)}_{\mathbb{C}^N} = \{\zeta \in \mathbb{C}^N : |P(\zeta)| \leq \sup_K |P|, \ \forall P \in \mathbb{C}[z_1, \ldots, z_N]\}.$$

   O conjunto $\widehat{(K)}_{\mathbb{C}^N}$ é simplesmente denotado por $\widehat{K}$ e denomina-se a *envoltória polinomial convexa de* K.

8. Mostre que se $K \subset \mathbb{C}$ é compacto então

$$\widehat{K} = K \cup \{\text{componentes conexas limitadas de } \mathbb{C} \setminus K\}.$$

9. Uma *função racional em* $\mathbb{C}^N$ é uma função da forma $R(z) = P(z)/Q(z)$, onde $P, Q \in \mathbb{C}[z_1, \ldots, z_N]$ e Q não é identicamente nulo. Note que R é uma função holomorfa em $\mathbb{C}^N \setminus Q^{-1}\{0\}$. Os pontos $z \in Q^{-1}\{0\}$ denominam-se *polos de* $R(z)$. Se K é um compacto de $\mathbb{C}^N$ definimos sua *envoltória racional convexa* como sendo o conjunto $K^\sharp$ de todos os pontos $\zeta \in \mathbb{C}^N$ tais que $|R(\zeta)| \leq \sup_K |R|$ para toda função racional em $\mathbb{C}^N$ que é holomorfa em uma vizinhança de K (nesta definição adotamos $|R(\zeta)| = \infty$ se ζ é um polo de R). Mostre que $K^\sharp$ é compacto e que $K \subset K^\sharp \subset \widehat{K}$.

10. Mostre que se $K \subset \mathbb{C}$ é compacto então $K^\sharp = K$.

11. Mostre que se $K \subset \mathbb{C}^N$ é compacto então

$$K^\sharp = \{\zeta \in \mathbb{C}^m : P(\zeta) \in P(K),\ \forall P \in \mathbb{C}[z_1, \ldots, z_N]\}.$$

Conclua então que $\zeta \in \mathbb{C}^N$ pertence a $K^\sharp$ se, e somente se, para todo $P \in \mathbb{C}[z_1, \ldots, z_N]$ satisfazendo $P(\zeta) = 0$ tem-se $P^{-1}\{0\} \cap K \neq \emptyset$.

12. Sejam $\Omega_j \subset \mathbb{C}^{N_j}$, $j = 1, 2$, abertos pseudoconvexos. Seja $F : \Omega_1 \to \mathbb{C}^{N_2}$ uma aplicação holomorfa. Mostre que $\{z \in \Omega_1 : F(z) \in \Omega_2\}$ é pseudoconvexo.