MAP5707 - 1o. Semestre de 2022

Primeiramente observemos que se $U \subset V$ são subconjuntos abertos de $\mathbb{C}^N$, e se $K \subset U$ é compacto, então

$$\widehat{K}_U \subset \widehat{K}_V.$$

De fato, se $z \in \widehat{K}_U$ então $|h(z)| \leq \sup_K |h|$ para toda $h \in \mathcal{O}(U)$ e, consequentemente, para toda $h \in \mathcal{O}(V)$, já que a restrição a U de uma função holomorfa em V define uma função holomorfa em U.

Proposição. *Seja $\{\Omega_\alpha\}_{\alpha \in A}$ uma família de domínios de holomorfia em $\mathbb{C}^N$. Se $\Omega \doteq \cap_{\alpha \in A} \Omega_\alpha$ é aberto então Ω é um domínio de holomorfia. Em particular, a intersecção de um número finito de domínios de holomorfia é um domínio de holomorfia.*

Demonstração. , Seja $K \subset \Omega$ compacto. Pela observação precedente $\widehat{K}_\Omega \subset \widehat{K}_{\Omega_\alpha}$ para todo $\alpha \in A$ e, portanto,

$$\mathrm{d}(\widehat{K}_\Omega, \partial\Omega_\alpha) \geq \mathrm{d}(\widehat{K}_\alpha, \Omega_\alpha) = \mathrm{d}(K, \partial\Omega_\alpha) > 0.$$

Agora, tomemos $z_\star \in \partial\Omega$ tal que $\rho := \mathrm{d}(z_\star, \widehat{K}_\Omega) = \mathrm{d}(\widehat{K}_\Omega, \partial\Omega)$. Como $\partial\Omega \subset \cup_{\alpha \in A} \partial\Omega_\alpha$, existe $\alpha_\star \in A$ tal que $z_\star \in \partial\Omega_{\alpha_\star}$. Logo

$$\rho \geq \mathrm{d}(\widehat{K}_\Omega, \partial\Omega_\star) > 0,$$

o que prova o resultado. $\square$

Exercícios

1. Dê um exemplo de dois domínios de holomorfia cuja reunião não é um domínio de holomorfia.

2. Seja $\Omega \subset \mathbb{C}^N$ um subconjunto aberto. Mostre que as propriedades abaixo são equivalentes:

   (a) Ω é um domínio de holomorfia;

   (b) $K \subset \Omega$, fechado em Ω, é compacto se, e somente se, $\sup_K |f| < \infty$ para toda $f \in \mathcal{O}(\Omega)$.