MAP5707 - 1o. Semestre de 2022

1. A noção de somabilidade

Dada uma família $(a_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{Z}_+^N}$ de números complexos diremos que a série $\sum_{\alpha\in\mathbb{Z}_+^N} a_\alpha$ é *absolutamente somável* se a sequência de números reais positivos $\left(\sum_{|\alpha|\leq m}|a_\alpha|\right)_{m\in\mathbb{Z}_+}$ é limitada. Vamos escrever

$$\lambda \doteq \sup\left\{\sum_{|\alpha|\leq m}|a_\alpha| : m\in\mathbb{Z}_+\right\}. \tag{1.1}$$

Se $\sum_{\alpha\in\mathbb{Z}_+^N} a_\alpha$ é absolutamente somável então a série $\sum_{j=0}^\infty S_j$, onde $S_j = \sum_{|\alpha|=j} a_\alpha$, é absolutamente convergente, uma vez que

$$\sum_{j=0}^{m}|S_j| \leq \sum_{|\alpha|\leq m}|a_\alpha| \leq \lambda,\ \forall m\in\mathbb{Z}_+.$$

Se denotarmos por a o valor da série $\sum_{j=0}^\infty S_j$, e se notarmos também que $\sum_{j=0}^m S_j = \sum_{|\alpha|\leq m} a_\alpha$, faz sentido escrever, por definição,

$$a = \sum_{\alpha\in\mathbb{Z}_+^N} a_\alpha = \lim_{m\to\infty}\sum_{|\alpha|\leq m} a_\alpha.$$

Mostraremos agora que

$$\lambda = \sup\left\{\sum_{\alpha\in F}|a_\alpha| : F\subset\mathbb{Z}_+^N, \text{finito}\right\}. \tag{1.2}$$

Demonstração de (1.2): Dado $F\subset\mathbb{Z}_+^N$ finito existe $m\in\mathbb{Z}_+$ tal que $F\subset\{\alpha : |\alpha|\leq m\}$. Logo λ é um limitante superior do conjunto

$$\mathcal{A} = \left\{\sum_{\alpha\in F}|a_\alpha| : F\subset\mathbb{Z}_+^N, \text{finito}\right\}$$

e consequentemente $\sup\mathcal{A}\leq\lambda$. Como também sabemos que

$$\left\{\sum_{|\alpha|\leq m}|a_\alpha| : m\in\mathbb{Z}_+\right\}\subset\mathcal{A}$$

temos $\lambda\leq\sup\mathcal{A}$. Assim $\lambda=\sup\mathcal{A}$, o que demonstra (1.2). $\square$

No que se segue adotaremos a seguinte definição

Definição 1.1. *Uma sequência crescente $G_0\subset G_1\subset\ldots\subset G_n\subset G_{n+1}\subset\ldots$ de subconjuntos finitos e não-vazios de $\mathbb{Z}_+^N$ satisfaz a propriedade $(\star)$ se vale a seguinte propriedade:*

$$\textit{Dado } F\subset\mathbb{Z}_+^N \textit{ finito existe } m\in\mathbb{Z}_+ \textit{ tal que } F\subset G_m. \tag{1.3}$$

Observe que (1.3) é equivalente a $\bigcup_{n=0}^{\infty} G_n = \mathbb{Z}_+^N$.

Exercício 1.1. Mostre que se $\{G_n\}$ satisfaz a propriedade $(\star)$ e se $\sum_{\alpha \in \mathbb{Z}_+^N} a_\alpha$ é somável então

$$\lambda = \sup \left\{ \sum_{\alpha \in G_n} |a_\alpha| : n \in \mathbb{Z}_+ \right\}.$$

Proposição 1.1. *Seja $\{G_n\}$ uma sequência satisfazendo a propriedade $(\star)$ e seja também $\sum_{\alpha \in \mathbb{Z}_+^N} a_\alpha$ uma família absolutamente somável. Então*

$$\sum_{\alpha \in \mathbb{Z}_+^N} a_\alpha = \lim_{n \to \infty} \sum_{\alpha \in G_n} a_\alpha. \tag{3.4}$$

Demonstração. Seja $a = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}_+^N} a_\alpha$ e tomemos $\epsilon > 0$. Existe $n_* \in \mathbb{Z}_+$ tal que

$$\left| \sum_{|\alpha| \le n} a_\alpha - a \right| \le \epsilon/2, \;\; n \ge n_*. \tag{3.5}$$

e

$$\lambda - \epsilon/2 < \sum_{|\alpha| \le n_*} |a_\alpha| \le \lambda. \tag{3.6}$$

Tome agora $n_0 \in \mathbb{Z}_+$ tal que $\{\alpha : |\alpha| \le n_*\} \subset G_{n_0}$. Então se $n \ge n_0$ temos

$$\lambda - \epsilon/2 < \sum_{|\alpha| \le n_*} |a_\alpha| \le \sum_{\alpha \in G_n} |a_\alpha| \le \lambda$$

e consequentemente

$$\sum_{\alpha \in G_n \setminus \{\alpha : |\alpha| \le n_*\}} |a_\alpha| < \epsilon/2.$$

Assim, se $n \ge n_0$ obtemos

$$\begin{aligned}
\left| \sum_{\alpha \in G_n} a_\alpha - a \right| &\le \left| \sum_{\alpha \in G_n} a_\alpha - \sum_{|\alpha| \le n_*} a_\alpha \right| + \left| \sum_{|\alpha| \le n_*} a_\alpha - a \right| \\
&= \left| \sum_{\alpha \in G_n \setminus \{\alpha : |\alpha| \le n_*\}} a_\alpha \right| + \left| \sum_{|\alpha| \le n_*} a_\alpha - a \right| \\
&\le \sum_{\alpha \in G_n \setminus \{\alpha : |\alpha| \le n_*\}} |a_\alpha| + \left| \sum_{|\alpha| \le n_*} a_\alpha - a \right| \\
&< \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon. \qquad \square
\end{aligned}$$

Sejam agora X um conjunto não-vazio $f_\alpha : X \to \mathbb{C}$ uma família de funções indexada por $\alpha \in \mathbb{Z}_+^N$. Temos a seguinte versão do M-teste de Weierstrass adaptada ao nosso novo contexto:

Proposição 1.2. *Suponha que* $\sup_{x\in X} |f_\alpha(x)| \leq b_\alpha$ *e que* $\sum_{\alpha\in\mathbb{Z}_+^N} b_\alpha$ *seja absolutamente somável. Então* $\sum_{\alpha\in\mathbb{Z}_+^N} f_\alpha(x)$ *é absolutamente e uniformente somável em* X.

Demonstração. Para $m \in \mathbb{Z}_+$ podemos escrever

$$\sum_{|\alpha|\leq m} f_\alpha(x) = \sum_{j=0}^{m} S_j(x),$$

onde $S_j(x)$ satisfaz

$$|S_j(x)| = \left|\sum_{|\alpha|=j} f_\alpha(x)\right| \leq \sum_{|\alpha|=j} b_\alpha \doteq M_j, \quad x \in X.$$

Como $\sum_{j=0}^{\infty} M_j < \infty$ o M-teste usual de Weierstrass usual se aplica e concluímos que $\sum_{|\alpha|\leq m} f_\alpha(x)$ converge absolutamente e uniformemente em X. $\square$.

Exercício 1.2. Nas condições da Proposição 3.2 mostre que $\sum_{\alpha\in G_n} f_\alpha(x)$ converge uniformemente, onde $\{G_n\}$ é qualquer sequência satisfazendo a propriedade $(\star)$.

2. Séries de potências em $\mathbb{C}^N$

Uma série de potências em $\mathbb{C}^N$ centrada em $z_0 \in \mathbb{C}^N$ é uma série da forma

$$\sum_{\alpha\in\mathbb{Z}_+^N} a_\alpha (z - z_0)^\alpha, \tag{2.1}$$

onde $a_\alpha \in \mathbb{C}$ e $z \in \mathbb{C}^N$.

Recordemos a notação para um polidisco em $\mathbb{C}^N$ centrado em z_0:

$$D(z_0; R_1, \ldots, R_N) = \{z \in \mathbb{C}^N : |z_j - z_{0j}| < R_j,\ j = 1, \ldots, N\}.$$

Também escreveremos $D(z_0; R)$ se $R_j = R > 0$ para todo $j = 1, \ldots, N$.

Exercício 2.1 Mostre que se $K \subset D(z_0; R_1, \ldots, R_N)$ é compacto então existe $0 < r_j < R_j$ tais que $K \subset \overline{D(z_0, r_1, \ldots, r_N)}$

Exemplo 2.1. A série de potências $\sum_{\alpha\in\mathbb{Z}_+^N} z^\alpha$ é absolutamente e uniformente somável somável em cada subconjunto compacto de $D(0; 1)$.

De fato pelo exercício 2.1 bastará mostra que a série é uniformente e absolutamente somável em cada conjunto da forma $\overline{D(0; \rho)}$, com $\rho < 1$. Agora, se $z \in \overline{D(0; \rho)}$ e se $\alpha \in \mathbb{Z}_+^N$ então $|z^\alpha| \leq \rho^{|\alpha|}$. Tomando

$$G_n = \{\alpha \in \mathbb{Z}_+^N : 0 \leq \alpha_j \leq n,\ j = 1, \ldots, n\}$$

vemos que $\{G_n\}$ satisfaz a propriedade $(\star)$. Além disto

$$\sum_{\alpha \in G_n} \rho^{|\alpha|} = \left\{ \sum_{j=0}^{n} \rho^j \right\}^N \leq (1-\rho)^{-N}.$$

Pelo exercício 1.1 segue que $\sum_{\alpha \in \mathbb{Z}_+^N} \rho^{|\alpha|}$ é absolutamente somável e nossa afirmação segue da Proposição 1.2. Note que podemos calcular explicitamente

$$\sum_{\alpha \in \mathbb{Z}_+^N} z^\alpha = \lim_{n \to \infty} \sum_{\alpha \in G_n} z^\alpha = \lim_{n \to \infty} \prod_{j=1}^{N} \sum_{\alpha_j = 0}^{n} z_j^{\alpha_j} = \prod_{j=1}^{N} \frac{1}{1 - z_j}, \quad x \in D(0;1). \qquad \square$$

O resultado central da seção é o seguinte:

Proposição 2.1. *Suponha que a série de potências (2.1) seja absolutamente somável em cada ponto $z \in D(z_0; R_1, \ldots, R_N)$. Então:*

1. *A série (2.1) é absolutamente e uniformente somável sobre os compactos de $D(z_0; R_1, \ldots, R_N)$;*
2. *Defina $h(z) = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}_+^N} a_\alpha (z - z_0)^\alpha$. Então h é uma função holomorfa em $D(z_0; R_1, \ldots, R_N)$ e suas derivadas podem ser calculadas como* [1]

$$(\partial_z^\beta h)(z) = \sum_{\beta \leq \alpha} \frac{\alpha!}{(\alpha - \beta)!} a_\alpha (z - z_0)^{\alpha - \beta}, \tag{2.2}$$

onde as séries em (2.2) são também absolutamente e uniformente somáveis sobre os compactos de $D(z_0; R_1, \ldots, R_N)$. Note, em particular, que

$$a_\alpha = \frac{(\partial^\alpha h)(z_0)}{\alpha!}. \tag{2.3}$$

Demonstração. Pelo exercício 2.1 devemos mostrar que a série (2.1) é uniformemente somável em cada conjunto da forma $\overline{D(z_0; r_1, \ldots, r_N)}$ como $0 < r_j < R_j$ para todo j. Mas a série (2.1) é absolutamente somável no ponto $z_0 + (r_1, \ldots, r_N)$ e, portanto, $\sum_{\alpha \in \mathbb{Z}_+^N} |a_\alpha| r_1^\alpha \cdots r_N^\alpha$ é absolutamente somável. Nossa contenção segue do M-teste de Weierstrass (Proposição 1.2).

Como cada $h_n(z) = \sum_{|\alpha| \leq n} a_\alpha (z - z_0)^\alpha$ define uma função holomorfa em $D(z_0; R_1, \cdots, R_N)$, e como $h_n \longrightarrow h$ uniformemente sobre os compactos de $D(z_0; R_1, \ldots, R_N)$, segue que h é holomorfa em $D(z_0; R_1, \ldots, R_N)$ e que $\partial_z^\beta h_n \longrightarrow \partial_z^\beta h$ uniformemente sobre os compactos

[1] Se $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}_+^N$ escremos $\alpha \leq \beta$ se $\alpha_j \leq \beta_j$ para $j = 1, \ldots, N$.

de $D(z_0; R_1, \ldots, R_N)$. Destes fatos concluímos (2).

3. Expansão de funções holomorfas em séries de potências.

Provaremos agora o resultado principal destas notas:

Teorema 3.1. *Seja $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ e suponha que $D(z_0; R_1, \ldots, R_N) \subset \Omega$. Podemos escrever*

$$f(z) = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}_+^N} a_\alpha (z - z_0)^\alpha, \quad z \in D(z_0; R_1, \ldots, R_N),$$

com convergência uniforme sobre os compactos de $D(z_0; R_1 \ldots, R_N)$. As derivadas de f em $D(z_0; R_1, \ldots, R_N)$ são obtidas por derivação termo a termo e

$$a_\alpha = \frac{(\partial_z^\alpha f)(z_0)}{\alpha!}.$$

Demonstração. Sejam $0 < r_j < R_j$, $j = 1, \ldots, N$. Pela fórmula integral de Cauchy podemos escrever, para $z \in D(z_0; r_1, \ldots, r_N)$.

$$f(z) = \frac{1}{(2\pi i)^N} \int_{\partial_0 D(z_0,;r_1,\ldots r_N)} \frac{f(w)}{(w_1 - z_1) \cdots (w_N - z_N)} \mathrm{d}w_1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}w_N.$$

Agora, para cada $j = 1, \ldots, N$ temos

$$\frac{1}{w_j - z_j} = \frac{1}{(w_j - z_{0j}) - (z - z_{0j})} = \frac{1}{w_j - z_{0j}} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z_j - z_{0j}}{w_j - w_{0j}}}.$$

Mas

$$\left| \frac{z_j - z_{0j}}{w_j - w_{0j}} \right| = \frac{|z_j - z_{0j}|}{r_j} < 1$$

e, portanto,

$$\frac{1}{w_j - z_j} = \frac{1}{w_j - z_{0j}} \sum_{k=0}^{\infty} (z_j - z_{0j})^k, \quad j = 1, \ldots, N.$$

Substituindo estas expressões na fórmula integral de Cauchy, e invertendo a ordem de integração com a de somatória, o resultado segue facilmente. Os detalhes ficam a cargo do estudante interessado. □