MAP0413/MAP5712 - 1o. Semestre de 2021

2a. lista de exercícios

1. Seja Ω um aberto com fronteira regular em $\mathbb{R}^N$. Usando a identidade

$$|\vec{\nabla} v|^2 + 2\,\mathrm{div}\Big((u-v)\vec{\nabla} u\Big) = |\vec{\nabla} u|^2 + |\vec{\nabla}(u-v)|^2 + 2(u-v)\Delta u,$$

válida para $u, v \in C^2(\bar{\Omega})$, mostre que se $u_0 \in C^2(\bar{\Omega})$ satisfaz

$$\begin{cases} \Delta u_0 = 0 & \text{em } \Omega; \\ u_0 = g & \text{em } \partial\Omega, \end{cases}$$

então u_0 fornece o mínimo absoluto da função

$$J : \mathcal{M} \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad J[v] = \int_\Omega |\vec{\nabla} v|^2 \mathrm{d}x,$$

onde

$$\mathcal{M} = \{v \in C^2(\bar{\Omega}) : v = g \text{ em } \partial\Omega\}.$$

Resolver os exercícios 4,6,7,8,9 da apostila.