MAP0413/MAP5712 - 1o. Semestre de 2021

1a. lista de exercícios

Digressão. É possível dar um outro argumento para resolver o problema para um ODPL de 1a. ordem que estudamos na primeira aula (na realidade, o argumento que apresentei precisa de uma correção). Seja $\vec{a} = (a_1, \ldots, a_N) \in \mathbb{R}^N$ não nulo e considere o operador

$$P_0(\partial) = \sum_{j=1}^{N} a_j \frac{\partial}{\partial x_j}.$$

Então se π denota **qualquer hiperplano tal que** $\vec{a} \notin \pi$ o problema

$$P_0(\partial)u = f, \quad u|_\pi = g, \tag{1}$$

onde $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$, $g : \pi \to \mathbb{R}$ são funções contínuas, admite uma única solução. Para verificar isto tome $\{\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_{N-1}\}$ uma base qualquer de π e considere o isomorfismo linear

$$T : \mathbb{R}^{N-1} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^N, \quad (y, t) \mapsto x = \sum_{k=1}^{N-1} y_j \vec{e}_j + t\vec{a}.$$

Defina

$$v(y, t) = g\left(\sum_{k=1}^{N-1} y_j \vec{e}_j\right) + \int_0^t f\left(\sum_{k=1}^{N-1} y_j \vec{e}_j + s\vec{a}\right) \mathrm{d}s.$$

Mostre que $u := v \circ T^{-1}$ é solução de (1).

1. Seja $a_0 \in \mathbb{R}$ e considere o ODPL com coeficientes constantes de 1a. ordem

$$P(\partial) = P_0(\partial) + a_0.$$

Seja, também, π como na digressão e considere agora o problema

$$P(\partial)u = f, \quad u|_\pi = g, \tag{2}$$

onde $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$, $g : \pi \to \mathbb{R}$ são funções contínuas. Mostre que (2) admite uma única solução.

Resolver também os exercícios 1, 2, 3 e 5 da apostila.