MAP5911 - 2o. Semestre de 2020

Lista de exercícios

$\rightarrow$ No primeiro exercício utilizaremos a identificação $\mathbb{C}^m \simeq \mathbb{R}^{2m}$ pelo isomorfismo $\mathbb{R}$-linear $(z_1, \ldots, z_m) \mapsto (\mathsf{Re} z_1, \mathsf{Im} z_1, \ldots, \mathsf{Re} z_m, \mathsf{Im} z_m)$.

1. Sejam $\Omega \subset \mathbb{C}^N$ aberto e $f = (f_1, \ldots, f_M) : \Omega \to \mathbb{C}^M$. Mostre que f é holomorfa se, e somente se, $\tilde{f} = (\mathsf{Re} f_1, \mathsf{Im} f_1, \ldots, \mathsf{Re} f_M, \mathsf{Im} f_M) : \Omega \to \mathbb{R}^{2M}$ é continuamente diferenciável em Ω e, para todo $z \in \Omega$, sua derivada $D\tilde{f}(z) \in L(\mathbb{R}^{2N}, \mathbb{R}^{2M})$ define uma transformação $\mathbb{C}$-linear de $\mathbb{C}^N$ em $\mathbb{C}^M$. Quando f é holomorfa a transformação em $L(\mathbb{C}^N, \mathbb{C}^M)$ definida por $D\tilde{f}(z)$ é denotada por $f'(z)$. Mostre que $f'(z)$ é representada, com relação às respectivas bases canônicas de $\mathbb{C}^N$ e $\mathbb{C}^M$, pela matriz $\{(\partial f_j / \partial z_k)(z)\}$.

$\rightarrow$ Sejam Ω, Ω' abertos de $\mathbb{C}^N$ e $f : \Omega \to \Omega'$ uma aplicação holomorfa. Dizemos que f é um *bi-holomorfismo entre* Ω *e* Ω' se f é uma bijeção e sua inversa $f : \Omega' \to \Omega$ é também holomorfa.

2. Teorema da função inversa: sejam $\Omega \subset \mathbb{C}^N$ aberto e $f = (f_1, \ldots, f_N) : \Omega \to \mathbb{C}^N$ uma aplicação holomorfa. Seja $z_0 \in \Omega$ e suponha que $f'(z_0) \in L(\mathbb{C}^N)$ seja inversível. Mostre que existe um aberto $U \subset \Omega$ contendo z_0 satisfazendo a seguinte propriedade: $V \doteq f(U)$ é aberto em $\mathbb{C}^N$ e a aplicação $f|_U : U \to V$ é um bi-holomorfismo.

3. Enuncie e demonstre o teorema da função implícita para aplicações holomorfas. Obtenha, em particular o seguinte resultado: sejam $\Omega \subset \mathbb{C}^N$ aberto e $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ satisfazendo a seguinte propriedade:

$$\forall z \in \Omega,\ f(z) = 0 \implies \partial f(z) \neq 0.$$

Seja $\mathcal{M} = \{z \in \Omega : f(z) = 0\}$. Mostre que localmente $\mathcal{M}$ pode ser descrita como o gráfico de uma aplicação holomorfa de $N-1$ variáveis e a valores em $\mathbb{C}$. $\mathcal{M}$ é chamada *hipersuperfície holomorfa* em Ω e é, então, uma variedade holomorfa de dimensão complexa $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{M} = N - 1$ (note que, como subvariedade real, $\mathcal{M}$ tem dimensão $2(N-1)$ em $\mathbb{R}^{2N}$). Se $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{M} = 1$ ($N = 2$) então $\mathcal{M}$ é uma *superfície de Riemann*, isto é, uma variedade complexa de dimensão complexa igual a um.

$\rightarrow$ A seguir adotaremos seguinte definição: dada uma hipersuperfície holomorfa $\mathcal{M} \subset \Omega$ e uma função $h : \mathcal{M} \to \mathbb{C}$ dizemos que h é *holomorfa em* $\mathcal{M}$ (e escrevemos $h \in \mathcal{O}(\mathcal{M})$) se existir um aberto $\tilde{\Omega}$ de Ω contendo $\mathcal{M}$ e $\tilde{h} \in \mathcal{O}(\tilde{\Omega})$ tal que $\tilde{h} = h$ em $\mathcal{M}$.

4. A Sejam $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C}^2)$, $f(z_1, z_2) = z_1 - e^{z_2}$ e

$$X = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 :\ f(z_1, z_2) = 0\} = \{(e^{\zeta}, \zeta) : \zeta \in \mathbb{C}\}.$$

1. Mostre que X é hipersuperfície holomorfa de $\mathbb{C}^2$ (denominada *superfície de Riemann da função logarítmo.*);

2. Defina $\pi : X \to \mathbb{C} \backslash \{0\}$, $\pi(e^{\zeta}, \zeta) = e^{\zeta}$. Mostre que π é uma aplicação de recobrimento;

3. Defina $\operatorname{Log} : X \to \mathbb{C},\ \operatorname{Log}(e^{\zeta}, \zeta) = \zeta$. Mostre que $\operatorname{Log} \in \mathcal{O}(X)$;

4. Considere $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Mostre que $\exp \circ \mathrm{Log} = \pi$ e que $\mathrm{Log} \circ F =$ identidade em $\mathbb{C}$, onde $F(\zeta) = (e^{\zeta}, \zeta)$.

5. Construa a superfície de Riemann da função $\sqrt{\zeta}$.

6. O objetivo deste exercício é demonstrar um resultado provado por H. Cartan, que pode ser considerado como a versão multi-dimensional do Lema de Schwarz: sejam $\Omega \subset \mathbb{C}^N$ um domínio (i.e., aberto e conexo) limitado, $a \in \Omega$ e $f = (f_1, \ldots, f_N) : \Omega \to \mathbb{C}^N$ holomorfa. Suponha que $f(\Omega) \subset \Omega$, $f(a) = a$ e que $f'(a)$ seja a aplicação identidade. Mostre então que f é a aplicação identidade.

1. Suponha que $a = 0$ e que o fecho do polidisco aberto $D = \{z \in \mathbb{C}^N : |z_j| < r_j\}$ esteja contido em Ω. Mostre que em D vale uma expansão da forma
$$f(z) = \text{identidade} + \sum_{j=k}^{\infty} P_j(z),$$
onde $k \geq 2$ e cada $P_j(z)$ é um polinômio homogêneo de grau j.
2. Determine uma estimativa para $\|P_j\|_{L^\infty(D)}$ em termos de $\|f\|_{L^\infty(D)}$.
3. Seja $f^m = f \circ \ldots \circ f$ (m-vezes). Mostre que, em D,
$$f^m(z) = \text{identidade} + mP_k(z) + \text{termos de ordem} \geq k+1.$$
4. Aplique a estimativa obtida em (2) para f^m e faça $m \to \infty$ para concluir que $P_k = 0$.

$\to$ Um domínio Ω em $\mathbb{C}^N$ é *circular* se $z \in \Omega$, $\theta \in \mathbb{R} \Longrightarrow e^{i\theta} z \in \Omega$. Por exemplo, um domínio Ω em $\mathbb{C}$ é circular se, e somente se, existem $0 \leq r < R \leq \infty$ tais que ou $\Omega = \{|z| < R\}$ ou $\Omega = \{r < |z| < R\}$.

7. Sejam Ω_j, $j = 1, 2$, domínios circulares limitados em $\mathbb{C}^N$, com $0 \in \Omega_1 \cap \Omega_2$, e $f : \Omega_1 \to \Omega_2$ um bi-holomorfismo tal que $f(0) = 0$. Mostre que f é $\mathbb{C}$-linear. *Sugestão:* Para $\theta \in \mathbb{R}$ inicie considerando $z \mapsto f^{-1}\left(e^{-i\theta} f(e^{i\theta} z)\right) \ldots$

$\to$ Dado $\Omega \subset \mathbb{C}^N$ aberto denotamos por $\mathsf{Aut}(\Omega)$ o conjunto de todos os bi-holomorfismos de Ω sobre si mesmo. A operação de composição define sobre $\mathsf{Aut}(\Omega)$ uma estrutura de grupo.

8. Mostre que se $H : \Omega \to \Omega'$ é um bi-holomorfismo entre os abertos Ω e Ω' de $\mathbb{C}^N$ então $H_* : \mathsf{Aut}(\Omega) \to \mathsf{Aut}(\Omega')$, definido por $H_*(h) = H \circ h \circ H^{-1}$, é um isomorfismo de grupos.

9. Determine $\mathsf{Aut}(\Delta)$, onde $\Delta = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$.

10. O teorema da aplicação de Riemann afirma que se Ω é um subconjunto aberto e simplesmente conexo de $\mathbb{C}$ então ou $\Omega = \mathbb{C}$ ou Ω é bi-holomorfo a Δ, o disco unitário centrado na origem. Este resultado deixa de ser verdade em $\mathbb{C}^N$, para $N \geq 2$. O objetivo deste exercício é verificar tal afirmação.

Teorema. *Sejam* $D = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 : |z_1| < 1, |z_2| < 1\}$ *e* $B = \{z \in \mathbb{C}^2 : |z| < 1\}$. *Então não existe um bi-holomorfismo entre* D *e* B.

Sugestão: Para $a \in B$ denote por $[a]$ o subespaço de $\mathbb{C}^2$ gerado por a e considere as projeções ortogonais

$$P_a = \mathbb{C}^2 \to [a], \quad P_a^{\perp} : \mathbb{C}^2 \to [a]^{\perp}.$$

Defina

$$\Psi_a : B \to \mathbb{C}^2, \qquad \Psi_a(z) = \frac{a - P_a z - (1 - |a|^2) P_a^{\perp} z}{1 - \langle z, a \rangle}.$$

Aqui $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denota o produto euclidiano em $\mathbb{C}^2$.

1. Mostre que $\Psi_a(B) \subset B$ e que $\Psi_a \circ \Psi_a =$ identidade em B. Para isto inicie calculando $(\Psi_a \circ \Psi_a)'(0)$ e aplique o Teorema de Cartan enunciado no exercício F.

2. Conclua que $\Psi_a \in \mathsf{Aut}(B)$, para todo $a \in B$.

3. Mostre que $\mathsf{Aut}(B)$ age transitivamente em B, isto é, dado $(z, w) \in B \times B$ existe $h \in \mathsf{Aut}(B)$ tal que $h(z) = w$.

4. Aplique novamente o Teorema de Cartan para concluir que se existir um bi-holomorfismo $H : D \to B$ então necessariamente existe $T \in L(\mathbb{R}^2)$ inversível tal que $T(B) = D$.

$\to$ O Teorema de Riemann das singularidades removíveis em uma variável complexa admite a seguite versão multi-dimensional:

Teorema. *Sejam* $\Omega \subset \mathbb{C}^N$ *aberto e conexo e* $g \in \mathcal{O}(\Omega)$ *não identicamente nula. Defina* $V(g) = \{z \in \Omega : g(z) = 0\}$. *Seja* $f \in \mathcal{O}(\Omega \setminus V(g))$ *e suponha que* f *seja limitada em* $\Omega \setminus V(g)$. *Então* f *se estende como uma função holomorfa em* Ω.

11. Sejam $\Omega \subset \mathbb{C}^N$ aberto e conexo e $g \in \mathcal{O}(\Omega)$ não identicamente nula. Mostre que $V(g)$ é fechado com interior vazio e que $\Omega \setminus V(g)$ é conexo. Conclua então que se $V(g) \neq \emptyset$ então $V(g)$ não é compacto em Ω.

12. Sejam $f, g \in \mathcal{O}(\mathbb{C}^N)$ tais que $|f(z)| \leq |g(z)|$ para todos $z \in \mathbb{C}^N$. Mostre que existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que $f = \lambda g$.

13. Seja $\Omega \subset \mathbb{C}^N$ aberto. Mostre que uma condição necessária e suficiente para que Ω seja um domínio de holomorfia é que:

- Se $F \subset \Omega$ é fechado e $\sup_F |f| < \infty$ para toda $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ então F é compacto.

14. Sejam Ω e Ω' domínios de holomorfia em $\mathbb{C}^N$ e $\mathbb{C}^M$ respectivamente e $F : \Omega \to \mathbb{C}^M$ uma aplicação holomorfa. Mostre que $F^{-1}(\Omega')$ é um domínio de holomorfia. Mostre também que se $F^{-1}(\Omega') \subset\subset \Omega$ então não é necessário assumir que Ω seja um domínio de holomorfia para se obter a mesma conclusão.

15. Mostre que se $\{\Omega_\alpha\}$ é uma família de domínios de holomorfia em $\mathbb{C}^N$ então o interior de $\cap_\alpha \Omega_\alpha$ também é um domínio de holomorfia.

16. Seja K um subconjunto compacto de $\mathbb{C}^N$. Mostre que

$$\widehat{(K)}_{\mathbb{C}^N} = \{\zeta \in \mathbb{C}^N : |P(\zeta)| \leq \sup_K |P|, \ \forall P \in \mathbb{C}[z_1, \ldots, z_N]\}.$$

$\rightarrow$ O conjunto $\widehat{(K)}_{\mathbb{C}^N}$ é simplesmente denotado por $\widehat{K}$ e denomina-se a *envoltória polinomial convexa de* K.

17. Mostre que se $K \subset \mathbb{C}$ é compacto então

$$\widehat{K} = K \cup \{\text{componentes conexas limitadas de } \mathbb{C} \setminus K\}.$$

$\rightarrow$ Uma *função racional em* $\mathbb{C}^N$ é uma função da forma $R(z) = P(z)/Q(z)$, onde $P, Q \in \mathbb{C}[z_1, \ldots, z_N]$ e Q não é identicamente nulo. Note que R é uma função holomorfa em $\mathbb{C}^N \setminus Q^{-1}\{0\}$. Os pontos $z \in Q^{-1}\{0\}$ denominam-se *polos de* $R(z)$. Se K é um compacto de $\mathbb{C}^N$ definimos sua *envoltória racional convexa* como sendo o conjunto $K^\sharp$ de todos os pontos $\zeta \in \mathbb{C}^N$ tais que $|R(\zeta)| \leq \sup_K |R|$ para toda função racional em $\mathbb{C}^N$ que é holomorfa em uma vizinhança de K (nesta definição adotamos $|R(\zeta)| = \infty$ se ζ é um polo de R).

18. Mostre que $K^\sharp$ é compacto e que $K \subset K^\sharp \subset \widehat{K}$.

19. Mostre que se $K \subset \mathbb{C}$ é compacto então $K^\sharp = K$.

20. Mostre que se $K \subset \mathbb{C}^N$ é compacto então

$$K^\sharp = \{\zeta \in \mathbb{C}^m : P(\zeta) \in P(K), \ \forall P \in \mathbb{C}[z_1, \ldots, z_N]\}.$$

Conclua então que $\zeta \in \mathbb{C}^N$ pertence a $K^\sharp$ se, e somente se, para todo $P \in \mathbb{C}[z_1, \ldots, z_N]$ satisfazendo $P(\zeta) = 0$ tem-se $P^{-1}\{0\} \cap K \neq \emptyset$.

21. Seja $\Omega \subset \mathbb{C}^N$ aberto. Para cada $q = 0, 1, \ldots, N$ defina

$$\mathcal{O}_{(q)}(\Omega) = \{f = \sum_{|J|=q} f_J(z)\, \mathrm{d}z_J : \ f_J \in \mathcal{O}(\Omega)\}$$

(note que $\mathcal{O}_{(0)}(\Omega) = \mathcal{O}(\Omega)$). Mostre que se Ω é um domínio de holomorfia então a cohomologia do complexo

$$\partial : \mathcal{O}_{(q)}(\Omega) \longrightarrow \mathcal{O}_{(q+1)}(\Omega), \quad q = 0, 1, \ldots, N,$$

é igual à $H^*(\Omega, \mathbb{C})$ (cohomologia de DeRham de Ω). Conclua que $H^q(\Omega, \mathbb{C}) = 0$ se $q > N$.

22. Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um domínio de Runge. Mostre que $H^N(\Omega, \mathbb{C}) = 0$.

Sugestão. Mostre que dada $f \in \mathcal{O}_{(N)}(\mathbb{C}^N)$ existe $g \in \mathcal{O}_{(N-1)}(\mathbb{C}^N)$ satisfazendo $\partial g = f$. Conclua que $\partial : \mathcal{O}_{(N-1)}(\Omega) \longrightarrow \mathcal{O}_{(N)}(\Omega)$ tem imagem densa. Combine isto com o fato da derivada exterior ser um operador com imagem fechada (teorema de DeRham).

- - - - o o o - - - -