MAP0413 - 1o. Semestre de 2020

6a. lista de exercícios

1. Seja $F(x,t)$ uma função de classe C^1 em $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}$ e suponha que para cada $s \in \mathbb{R}$ o seguinte problema admita uma solução $(x,t;s)$ em de classe C^2 em $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} U_{tt}(x,t,s) - \Delta_x U(x,t,s) &= 0 \\ U(x,0,s) &= 0 \\ U_t(x,0,s) &= F(x,s) \end{cases}$$

Defina

$$v(x,t) = \int_0^t U(x,t-s,s)\mathrm{d}s.$$

Mostre estão que u é de classe C^2 em $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ e satisfaz (princípio de Duhamel):

$$\begin{cases} v_{tt}(x,t) - \Delta_x v(x,t) &= F(x,t) \\ v(x,0) &= 0 \\ v_t(x,0) &= 0. \end{cases}$$

2. Considere o problema de Cauchy não homogêneo em $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} u_{tt}(x,t) - u_{xx}(x,t) &= F(x,t) \\ u(x,0) &= f(x) \\ u_t(x,0) &= g(x). \end{cases}$$

Aqui $f \in C^2(\mathbb{R})$, $g \in C^1(\mathbb{R})$ e $F \in C^1(\mathbb{R}^2)$. Mostre que este problema admite uma solução de classe C^2 em $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ exibindo-a explicitamente. Determine no plano (x,t) o domínio de dependência do ponto (x_0,t_0), $t_0 > 0$.