

MAP0413 - 1o. Semestre de 2020

5a. lista de exercícios

1. Seja $f \in C^2(\mathbb{R})$ ímpar, $f = 0$ no complementar de $[-2, -1] \cup [1, 2]$. Esboce, no semi-plano $\{(x, t) \in \mathbb{R}^2 : t > 0\}$, o conjunto dos pontos onde você pode assegurar que a solução do problema abaixo se anula:

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0 & \text{em } \mathbb{R} \times]0, \infty[, \\ u(x, 0) = f(x), & x \in \mathbb{R}, \\ u_t(x, 0) = 0, & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

2. Considere o problema

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0 & \text{em }]0, \pi[\times \mathbb{R} \\ u(x, 0) = f(x), & x \in [0, \pi] \\ u_t(x, 0) = g(x), & x \in [0, \pi] \\ u_t(0, t) = u_t(\pi, t) = 0, & t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Determine as condições de compatibilidade do problema e a regularidade das funções f e g para que este tenha solução de classe C^2 . Determine a solução.

3. Sejam $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$. Mostre que

$$\int_{\mathbb{R}^N} f(x) \widehat{g}(x) \, dx = \int_{\mathbb{R}^N} g(y) \widehat{f}(y) \, dy.$$

4. Sejam $f, g \in C(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$. Suponha que f e g se anulam em $] - \infty, 0]$. Mostre então que $f \star g$ também se anula em $] - \infty, 0]$.
5. Sejam $m \in \mathbb{Z}_+$ e $P(\xi) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha \xi^\alpha$ um polinômio em $\mathbb{R}^N$ não identicamente nulo. Assuma o seguinte resultado como conhecido:

$$\{\xi \in \mathbb{R}^N : P(\xi) = 0\} \text{ é um conjunto com interior vazio.}$$

Mostre então que se $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ e se $P(D)f = 0$ então $f = 0$.